Эллиптические и параболические уравнения с регулярными и сингулярными возмущениями: асимптотики и качественная структура решений

Заявка на участие в конкурсе Пьера Делиня и фонда "Династия"

Борисов Денис Иванович

Россия, г. Уфа, ул. Октябрьской рев. 3а, Башкирский государственный педагогический университет

E-mail: borisovdi@yandex.ru

Проведённые исследования

1. Задачи с часто чередующимися краевыми условиями. Общая постановка этих задач выглядит следующим образом. На границе области выделяется подмножество, состоящее из большого числа непересекающихся частей малой меры, расположенных близко друг к другу. На этом подмножестве задается граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы – граничное условие Неймана. Цель исследований – описать асимптотическое поведение решений, когда описанное разбиение границы измельчается. Решения таких задач сходятся к решениям усреднённых задач для прежнего оператора с классическим краевым условием, тип которого зависит от размеров и распределения частей границы с разными краевыми условиями в возмущённой задаче.

В работах [1]–[12] был проведён подробный анализ спектральных задач для оператора Лапласа в двух- и трёхмерных ограниченных областях с частым чередованием краевых условий. Основным результатом были асимптотические разложения для собственных значений и соответствующих собственных функций по малым параметрам, описывающим разбиение границы. Двумерные задачи исследовались в работах [1, 2, 3, 5, 6, 9, 10]. Для случая периодического чередования в [1, 2, 3, 5, 9] были построены полные асимптотические разложения спектра рассматриваемых задач для всех возможных случаев усреднённых задач. Гораздо более сложный случай непериодического чередования рассматривался в [6, 10]. Здесь была разработана нетривиальная схема, которая позволила построить первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций для широкого класса различных непериодических разбиений границы в возмущённой задаче. Для более широкого класса были получены неулучшаемые оценки скорости сходимости собственных значений.

Трёхмерные задачи с частой смены краевых условий изучались в [4, 7, 8, 11, 12]. Для периодического чередования в [4, 7, 8, 11] были построены полные асимптотические разложения собственных значений и соответствующих собственных функций в случае всех возможных усреднённых задач. В работе [12] для непериодического чередования при весьма слабых предположениях на структуру чередования были получения неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости собственных значений и собственных функций.

2. Геометрические возмущения квантовых волноводов. Одной из популярных математических моделей квантового волновода является задача о спектре Лапласиана с краевым условием Дирихле в областях типа плоской неограниченной полосы, трёхмерного слоя, ограниченного двумя параллельными плоскостями, и неограниченного цилиндра. В работе [13] исследовалось возмущение двумерных полос и трёхмерных слоёв путем малого локального искривления границы. Было показано, что в определённых случаях такое возмущение приводит к возникновению изолированных собственных значений из края существенного спектра; было построено асимптотическое разложение для данного собственного значения в терминах малого параметра, описывающего локальное искривление границы. Подобный эффект возникновения собственного значения изучался и в [14, 18]. Здесь рассматривалась пара параллельных плоских волноводов с общей границей, из которой был удалён конечный отрезок ("окно"). При увеличении длины у такой системы увеличивается число изолированных собственных значений, которые возникают из края существенного спектра при прохождении окном некоторых критических длин. Были построены асимптотические разложения для возникающих собственных значений, а также для соответствующих собственных функций. Кроме того, в [18] был исследован режим неограниченного расширения окна. Аналогичные результаты для пары трёхмерных плоско-параллельных слоёв были получены в [30]. Спектр волновода с окном в присутствии магнитного поля исследовался в [16]. Было показано, что наличие магнитного поля препятствует возникновению изолированных собственных значений из края существенного спектра для малого окна. В то же время, при достаточно большом окне собственные значения возникают.

2. Разбегающиеся возмущения. В работах [15, 24] изучалась пара плоских волноводов с общей границей, на которой была вырезана пара окон. Расстояние между окнами было большим параметром; исследовалось асимптотическое поведение спектра при стремлении данного параметра к бесконечности. Фактически, в рассматриваемой задаче окна "убегают" в бесконечность, что позволяет нам назвать такие возмущения разбегающимися. Классической моделью для таких возмущений является задача об операторе Шрёдингера с двойной потенциальной ямой в случае, когда расстояние между ямами велико. В работе [15] был исследован аналог данной задачи в теории волноводов. Были доказаны теоремы сходимости и построены асимптотические разложения для собственных значений возмущённой задачи, а также описано асимптотическое поведение соответствующих собственных функций. Гораздо более общая постановка рассматривалась в [23, 25]. Здесь рассматривались разбегающиеся возмущения в многомерном цилиндре и многомерном пространстве, описываемые произвольными абстрактными операторами, локализованными на некоторых ограниченных множествах – "носителях". Расстояние между этими "носителями" стремилось к бесконечности. Была разработана принципиально новая общая функциональная схема, позволившая эффективно изучать подобные задачи. Были доказаны теоремы сходимости и получены первые члены асимптотических разложений для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора.

3. Дифференциальные операторы в неограниченных областях с быстро осциллирующими коэффициентами. Спектральные свойства дифференциальных операторов в неограниченных областях с быстро осциллирующими коэффициентами в настоящее время привлекают достаточно много внимания как в связи с различными приложениями таких задач, так и в связи развитием исследования таких операторов с точки зрения спектральной теории в работах М.Ш. Бирмана, Т.А. Суслиной, В.В. Жикова, С.Е. Пастуховой. В одномерном случае такие задачи исследовались в работах [19, 20, 21, 22]. В [19, 20] исследовалась задача об одномерном операторе Шрёдингера с компактным потенциалом, возмущённого быстро осциллирующим периодическим потенциалом. Были получены полные асимптотические разложения краёв лакун в непрерывном спектре такого оператора и показано, что все внутренние лакуны в пределе "убегают" в бесконечность. Был исследован эффект возникновения новых собственных значений из краёв лакун в непрерывном спектре, получены необходимые и достаточные условия возникновения таких собственных значений, в случае возникновения были построены их полные асимптотические разложения. Также были построены полные асимптотические разложения для собственных значений, сходящихся к изолированным собственным значениям усреднённого оператора. В работах [21, 22] изучался эллиптический оператор дивергентного типа, здесь быстрые осцилляции коэффициентов были сосредоточены на конечном отрезке. Исследована структура спектра такого оператора, изучен эффект возникновения новых собственных значений из края непрерывного спектра, для собственных значений и собственных функций построены полные асимптотические разложения. В [29, 32] рассматривался многомерный матричный самосопряжённый оператор второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами. Были получены первые члены асимптотики резольвенты такого оператора в равномерных операторных нормах, а также построены полные асимптотические разложения собственных значений, сходящихся к изолированным собственным значениям усреднённого оператора, а также полные асимптотики соответствующих собственных функций.

4. Несимметричные локализованные возмущения периодических операторов на оси и плоскости. В работах [26, 28] рассматривался самосопряжённый периодический оператор на оси с малым регулярным возмущением. Возмущение описывалось произвольным абстрактным оператором, не обязательно симметричным, и локализованным на конечном отрезке. Возмущённый оператор оказывался несамосопряжённым. Была исследована структура спектра такого оператора и доказано, что непрерывный спектр устойчив относительно возмущения, остаточный пуст, точечный спектр счётен, не имеет конечных точек накопления и состоит из собственных значений конечной кратности. Был доказан ряд теорем сходимости для собственных значений. Были получены необходимые и достаточные условия возникновения новых собственных значений из краёв лакун в существенном спектре и в случае возникновения построены их асимптотические разложения. Отдельно был рассмотрен вопрос о наличии/отсутствии вложенных собственных значений. В [27] аналогичные результаты были получены для некоторых сингулярных возмущений: малый δ-потенциал с комплексной константой связи и быстро осциллирующий потенциал с локализованными осцилляциями. В [37] схожие результаты были получены для двумерного периодического оператора на плоскости. Здесь были существенно ослаблены условия на возмущающий оператор: он уже не предполагался локализованным на конечной области, а локализация состояла в том, что он переводил достаточно быстро растущие функции в достаточно быстро убывающие. В настоящее время работа [37] направлена в печать.

5. Тонкие области. В [33] рассматривалась спектральная задача для Лапласиана в тонкой двумерной области с краевым условием Дирихле. Область была получена в результате сжатия по второй переменной. Предполагалось, что область имеет единственную внутреннюю точку максимума ширины области по направлению сжатия. Было выделено двупараметрическое семейство собственных значений, для которых и для соответствующих собственных функций были построены полные асимптотические разложения по малому параметру, описывающему ширину области. Было отдельно показано, что среди этих собственных значений содержится любое наперед заданное число первых собственных значений рассматриваемого оператора. В работе [35] аналогичные результаты были получены для тонкой многомерной пластины, полученной в результате сжатия по последней переменной, также в предположении, что пластина имеет единственную внутреннюю точку максимума ширины в направлении сжатия.

6. Разные задачи. В [17] рассматривался оператор Шрёдингера в конечной многомерной области, возмущённый узким потенциалом. Были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций. В [31] рассматривался Лапласиан в полосе с $\mathcal{PT}$-симметричными краевыми условиями. Была исследована структура спектра такого оператора. Отдельно был исследован эффект возникновения новых собственных значений из края существенного спектра при локализованных возмущениях коэффициента в краевом условии. В работе [34] рассматривалось одномерное эллиптическое уравнения на собственные значения, соответствующее волновому уравнению с затухающим членом. Были получены асимптотики собственных значений по номеру, получена формула для регуляризованного следа и решены некоторые вопросы, связанные с обратной спектральной задачей. В [36] рассматривался плоский волновод с часто периодически чередующимися краевыми условиями. Рассматривался случай усреднённого краевого условия Дирихле. Была доказана равномерная резольвентная сходимость такого оператора к усреднённому, а также были построены первые члены асимптотик зонных функций возмущённого оператора, на основе которых было показано, что все возможные внутренние лакуны убегают в бесконечность. Отдельно было построено полное асимптотическое разложение нижнего края существенного спектра. В статье [38] рассматривался самосопряжённый скалярный оператор достаточно общего вида в многомерной области, не обязательно ограниченной. Данный оператор возмущался локализованным возмущением достаточно общего вида и предполагалось, что такое возмущение порождает два изолированных собственных значения ниже границы спектра невозмущённого оператора, которые является двумя наименьшими спектральными точками. В терминах коэффициентов оператора и геометрии области была получена нижняя оценка для расстояния между данными собственными значениями.

Проект будущих исследований

Целью проекта является изучение асимптотических свойств и структуры решений эллиптических и параболических операторов с различными возмущениями. Планируется рассмотреть квантовые волноводы с частым чередованием краевых условий и быстро осциллирующей границей, задачи в тонких областях, локализованные несимметричные возмущения периодических эллиптических операторов в цилиндрах, а также нелинейные параболические уравнения в режимах, близких к обострению. Всюду далее ε – малый положительный параметр.

1. Несимметричные локализованные возмущения периодических операторов в цилиндрах. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – произвольная ограниченная связная область с гладкой границей, $\Omega := \omega \times \mathbb{R}$. Рассматривается дифференциальный оператор

$$H_0 := -- \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \right) + a_0,$$

в $L_2(\Omega)$ с краевым условием Дирихле, где вещественные функции a_{ij}, a_i достаточно гладкие и периодичны по x_n, $a_{ij} = a_{ji}$. Пусть χ_1, χ_2 – некоторые неотрицательная достаточно быстро убывающие функции, $W_2^2(\Omega, \chi_1\,\mathrm{d}x)$ – весовое пространство Соболева, $\mathcal{L}_\varepsilon^{(0)} : W_2^2(\Omega, \chi_1\,\mathrm{d}x) \to L_2(\Omega)$ – некоторый оператор, ограниченный равномерно по ε, $\mathcal{L}_\varepsilon := \chi_2\mathcal{L}_\varepsilon^{(0)}$. Возмущённый оператор зададим формулой: $\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{H}_0 - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon$. В проекте предполагается полное исследование спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, причём операторы $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_\varepsilon$ не предполагаются ни симметричными, ни самосопряжёнными. При определённых условиях на функции χ_1 и χ_2 планируется доказать, что непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не зависит от $\mathcal{L}_\varepsilon$ и имеет зонную структуру, а остаточный спектр пуст. Будет исследован вопрос о дискретности точечного спектра возмущённого оператора. Планируется исследовать асимптотическое поведение изолированных собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ и изучить эффект возникновения новых собственных значений из краёв лакун в существенном спектре. Описанное возмущение является регулярным. В проекте также планируется рассмотреть некоторые сингулярные возмущения периодических операторов, которые определёнными преобразованиями можно свести к описанному регулярному возмущению. В частности, к такому возмущению относятся δ-потенциалы на многообразиях коразмерности один с малой комплексной константой связи.

2. Сингулярные возмущения границ квантовых волноводов. В этой части проекта рассматриваются квантовые волноводы с частым чередованием краевых условий и быстро осциллирующей границей. В качестве области выбирается бесконечная полоса $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \pi\}$, чья нижняя граница разбивается на два множества:

$$\gamma_\varepsilon := \{x : |x_1 - \varepsilon\pi m| < \varepsilon\eta,\ m \in \mathbb{Z}, x_2 = 0\}, \quad \Gamma_\varepsilon := Ox_1 \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon,$$

где $\eta(\varepsilon)$ – некоторая функция, такая что $0 < \eta(\varepsilon) < \pi/2$. Изучаемый оператор – Лапласиан в $L_2(\Pi)$ с краевым условием Неймана на Γ_ε и краевым условием Дирихле на оставшейся части границы. Таким образом, на нижней части границы задается частое периодическое чередование краевых условий. Случай $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ был рассмотрен в [36]. Было показано, что усреднённый оператор – Лапласиан в Ω с краевым условием Дирихле. В проекте предполагается рассмотреть случаи, когда усреднение приводит ко второму или третьему краевому условию. С учётом результатов работ [1]-[12] ожидается, что второе краевое условие возникает в случае $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to -\infty$, а третье краевое условие – в случае $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to A \neq 0$. Для этих случаев планируется изучить сходимость резольвенты возмущённого оператора, по возможности в равномерной операторной норме, и доказать соответствующие оценки скорости сходимости. Также планируется построить асимптотические разложения соответствующих зонных функций, на основе которых планируется описать асимптотическое поведение лакун в существенном спектре рассматриваемого оператора. Отметим, что подобные результаты уже были успешно получены в [36] для случая усреднённого первого краевого условия. Кроме того, планируется рассмотреть схожую модель, в которой чередование краевых условий на нижней части границы заменяется на быстро осциллирующую границу. В этом случае также планируется получить результаты, аналогичные вышеописанным.

3. Тонкие области. В настоящей части проекта планируется исследовать краевые задачи Дирихле в тонких областях. Первая задача ставится в тонкой пластине следующим образом. Пусть $x = (x', x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – ограниченная область с гладкой границей, $h_\pm$ – произвольные достаточно гладкие функции, заданные в ω, такие что $H := h_- + h_+$ – неотрицательная функция в ω. Тонкая пластина задаётся равенством $\Omega_\varepsilon := \{(x', x_n) : x' \in \omega, -\varepsilon h_-(x') < x_n < \varepsilon h_+(x')\}$. В ней рассматривается броуновское движение частицы. Оно моделируется краевой задачей для уравнения Пуассона в Ω_ε с краевым условием Дирихле. Планируется построить полное асимптотическое разложение решения такой задачи в равномерной норме. Предполагая, что функция H имеет единственную внутреннюю точку максимума в ω, на основе данного асимптотического разложения будут построены асимптотики вероятностных характеристик броуновского движения, в частности, маскимальное время частицы из области.

Вторая задача ставится в конечном тонком искривлённом стержне. А именно, пусть γ – некоторая достаточно гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\tau(s)$, $n_1(s)$, $n_2(s)$ – некоторый репер на данной кривой, такой что $\tau(s)$ – касательный вектор, вектора τ, n_1 n_2 ортонормированы и достаточно гладкие. Через $y = (y_1, y_2)$ обозначим декартовы координаты в плоскости, натянутой на вектора n_1 и n_2, через ω – произвольную ограниченную область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей. Тонкий стержень задаётся следующим образом: $T_\varepsilon := \{x : \varepsilon^{-1} y \in \omega\}$. В области T_ε рассматривается эллиптический оператор с краевым условием Дирихле. При определённых ограничениях на коэффициенты планируется выделить двупараметрическое семейство собственных значений и соответствующих собственных функций такого оператора и построить для них полные асимптотические разложения по ε. Ограничения на коэффициенты определяются из условия возможности формального построения асимптотических разложений на основе метода двух масштабов.

4. Нелинейные параболические уравнения в режимах, близким к обострению. Хорошо известно, что многим нелинейным параболическим уравнениям присущи режимы с обострением, суть которых заключается в наличии решений, уходящих в бесконечность за конечное время (так называемые "blow-up solutions"). Имеется большое число работ, посвящённых существованию как подобных решений, так и глобальных решений, существующих неограниченное время и остающихся при этом ограниченными. В данной части проекта планируется исследовать процесс перерождения неограниченных решений в ограниченные. Данный эффект будет вначале исследован для модельного случая. А именно, рассматривается задача Коши для нелинейного одномерного уравнения Шрёдингера:

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda |u|^4 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = \phi, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где $\lambda > 0$, $\phi \in \mathbb{R}^1$. Известно, [39, Ch. 6, Sec. 6.6, Th. 6.6.1, Rems. 6.6.2, 6.6.3], что при

$$\lambda^{1/4} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R})} < 3^{1/4}\pi \tag{0.2}$$

решение последней задачи глобально. Вместе с тем, при

$$\lambda^{1/4} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R})} = 3^{1/4}\pi \tag{0.3}$$

и подходящем выборе ϕ задача (0.1) может иметь как глобальные решения, так и решения, уходящие на бесконечность за конечное время. При $\lambda = 1$ пример глобального решения дан в [39, Ch. 6, Sec. 6.7, Rem. 6.7.3] для $\phi = \phi_1 = 3^{1/4} \operatorname{ch}^{-1/2} 2x$ и растущего решения для $\phi = \phi_2 = 3^{1/4} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x^2}{4}} \operatorname{ch}^{-1/2} 2x$. Для подобных начальных данных рассматривается задача Коши (0.1) с $\lambda = 1 - \varepsilon$. Условие (0.2) при этом обеспечивает наличие глобального решения. Целью является построение асимптотического разложения по ε данного решения, и как следствие, описание природы перерождения глобальных решений в неограниченные. Ожидается, что структура асимптотического разложения будет существенно зависеть от структуры решения предельной задачи при $\varepsilon = 0$, а именно, имеет данная задача глобальное или неограниченное решения. По возможности данные результаты будут перенесены на случаи более высоких размерностей, на случай нелинейностей более общего вида, а также на случай других нелинейных уравнений. При этом, как ожидается, результаты будут существенно зависеть от структуры обострения решения предельной задачи, которая, как известно из многочисленных работ по этой тематике, может быть весьма разнообразной.

Преподавательский опыт

С 2000 г. преподаю в Башкирском государственном педагогическом университете. В настоящее время занимаю должность доцента кафедры математического анализа физико-математического факультета, в ближайшее время ожидается избрание по конкурсу на должность профессора. Читал лекции и вел практические занятия по следующим курсам: уравнения математической физики, избранные разделы математической физики, математический анализ, дополнительные главы математического анализа, избранные разделы математического анализа, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория вероятностей, теория групп, тензорное исчисление, спектральная теория неограниченных операторов, высшая математика для студентов нематематических специальностей

Список литературы

[1] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О Лапласиане с быстро и квазипериодически изменяющимся типом граничных условий // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. Вып. 4(322). С. 160.

[2] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре Лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118. No. 3. С. 347-353.

[3] Д.И. Борисов. О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задача для Лапласиана // Математические заметки. 2001. Т. 70. No. 4. P. 520-534.

[4] D.I. Borisov. The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie IIb. 2001. t. 329. No. 10. P. 717-721.

[5] Д.И. Борисов. Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий // Вестник молодых ученых. Серия прикладная математика и механика. 2002. No. 1. С. 36-52.

[6] Д.И. Борисов. О Лапласиане с часто и непериодически чередующимися граничными условиями // Доклады АН. 2002. Т. 383. No. 4. С. 443-445.

[7] Д.И. Борисов. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Математический сборник. 2002. Т. 193. No. 7. С. 37-68.

[8] Д.И. Борисов. О сингулярно возмущённой краевой задаче для Лапласиана в цилиндре // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. No. 8. С. 1071-1078.

[9] D.I. Borisov. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asymptotic Analysis. 2003. V. 35. No. 1. P. 1-26.

[10] Д.И. Борисов. Асимптотики и оценки собственных элементов Лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. No. 6. С. 23-70.

[11] Д.И. Борисов. Асимптотики и оценки скорости сходимости в трёхмерной краевой задаче с частой сменой граничных условий // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45. № 2. С. 274-294.

[12] Д.И. Борисов. О задаче с частым непериодическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 2. С. 284-294.

[13] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl'shin and D. Krejcirik. Bound states in weakly deformed strips and layers // Annales Henri Poincare. 2001. V. 2. No. 3. P. 553-572.

[14] D. Borisov, P. Exner and R. Gadyl'shin. Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip // Journal of Mathematical Physics. 2002. V. 43. No. 12. P.6265-6278.

[15] D. Borisov and P. Exner. Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows // Journal of Physics A: Mathematics and General. 2004. V. 37. No. 10. P. 3411-3428.

[16] D. Borisov, T. Ekholm and H. Kovarik. Spectrum of the magnetic Schrodinger operator in a waveguide with combined boundary conditions // Annales Henri Poincare. 2005. V. 6. No. 2. P. 327-342.

[17] А.Р. Бикметов, Д.И. Борисов. О дискретном спектре оператора Шрёдингера с узкой потенциальной ямой // Теоретическая и математическая физика. 2005. Т. 145. № 3. С. 373-385.

[18] Д.И. Борисов. Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединённых окном // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 4. С. 3-32.

[19] Д.И. Борисов. Асимптотики спектра оператора Шрёдингера, возмущённого быстро осциллирующим периодическим потенциалом // Доклады АН. 2006. Т. 406. № 2. 151-155.

[20] Д.И. Борисов. О спектре оператора Шрёдингера, возмущённого быстро осциллирующим потенциалом // Проблемы математического анализа. 2006. Вып. 33. С. 13-78.

[21] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре оператора Шрёдингера с быстро осциллирующим финитным потенциалом // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 47. № 1. С. 58-63.

[22] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами // Математический сборник. 2007. Т. 198, № 8. С. 3-34.

[23] D. Borisov. Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. V. 10. No. 2. P. 155-196.

[24] D. Borisov and P. Exner. Distant perturbation asymptotics in window-coupled waveguides. I. The non-threshold case // Journal of Mathematical Physics. 2006. V. 47. No. 11. P. 113502-1 - 113502-24.

[25] D.I. Borisov. Distant perturbations of the Laplacian in a multi-dimensional space // Annales Henri Poincare. 2007. V. 8. No. 7. P. 1371-1399.

[26] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением // Известия АН. Серия математическая. 2008. Т. 72. Вып. 4. С. 37-66.

[27] Д.И. Борисов. О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 151. № 2. С. 207-218.

[28] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. Спектр периодического оператора с малым локализованным возмущением //Доклады АН. 2007. Т. 413. № 4. С. 439-443.

[29] Д.И. Борисов. Асимптотики для решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 19-42.

[30] D. Borisov. On the spectrum of two quantum layers coupled by a window // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. V. 40. No. 19. P. 5045-5066.

[31] D. Borisov, D. Krejčiřík. $\mathcal{PT}$-symmetric waveguide // Integral Equations and Operator Theory. 2008. V. 62. No. 4. P. 489-515.

[32] Д. Борисов. Асимптотики собственных значений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 33-42.

[33] D. Borisov and P. Freitas. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Annales de l'institut Henri Poincare (C) Analyse non-lineaire. 2009. V. 26. No. 2. P. 547-560.

[34] D. Borisov, and P. Freitas. Eigenvalue asymptotics, inverse problems and a trace formula for the linear damped wave equation // Journal of Differential Equations, to appear. `arXiv:0905.3242`

[35] D. Borisov, and P. Freitas. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // Journal of Functional Analysis, to appear. `arXiv:0908.2327`

[36] D. Borisov, and G. Cardone. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions // Journal of Physics A: Mathematics and General. 2009. V. 42. No. 36, 365205 (21pp).

[37] Д.И. Борисов. О спектре двумерного периодического оператора с малым локализованным возмущением // направлено в печать.

[38] D. Borisov, I. Veselić. Spectral gaps for self-adjoint second order operators // submitted.

[39] T. Cazenave. Semilinear Schrödinger Equations. Courant Institute of Mathematical Sciences, N.Y. and American Mathematical Society, Providence, 2003.