Локальное комбинаторное строение триангуляций и кубильяжей многообразий

А. А. Гайфуллин

План исследований

1. Проведенные исследования

Напомним, что n-*мерным симплициальным* (соответственно, *кубическим*) *комбинаторным многообразием* называется симплициальный (соответственно, кубический) комплекс, линки всех вершин которого являются $(n-1)$-*мерными комбинаторными сферами*, то есть симплициальными комплексами, кусочно линейно гомеоморфными границе n-мерного симплекса. Наряду с симплициальными и кубическими комбинаторными многообразиями нам часто будет нужно рассматривать так называемые *симплициально клеточные* и *кубически клеточные* комбинаторные многообразия, в которых двум симплексам разрешается иметь несколько общих граней (точные определения можно найти, например, в [2], [10]).

В работе автора [10] рассматривается преобразование $\mathcal{L}$, сопоставляющее каждому ориентированному комбинаторному многообразию K неупорядоченный набор классов изоморфизма линков его вершин. Линки вершин многообразия K наделяются индуцированными ориентациями. Таким образом, набор классов изоморфизма линков вершин — это набор классов изоморфизма *ориентированных* комбинаторных сфер. Изучая преобразование $\mathcal{L}$, естественно поставить задачу о его обращении.

Вопрос 1. *Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует ориентированное n-мерное комбинаторное симплициальное (кубическое) многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$?*

Очевидно, для того, чтобы ответ на этот вопрос был утвердительным, необходимо, чтобы вершины ориентированных комбинаторных сфер $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ могли быть разбиты на пары так, что линки вершин в каждой паре изоморфны с изменением ориентации. Наборы ориентированных комбинаторных сфер, удовлетворяющие этому необходимому условию, мы будем называть *сбалансированными.* В работе [10] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — сбалансированный набор ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер. Тогда существует ориентированное n-мерное кубически клеточное комбинаторное многообразие X, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1', \ldots, Y_1'}_{r}, \underbrace{Y_2', \ldots, Y_2'}_{r}, \ldots, \underbrace{Y_k', \ldots, Y_k'}_{r}$$

для некоторого натурального числа r. Здесь Y_i' — первое барицентрическое подразделение комбинаторной сферы Y_i.

В работах [5], [10] (см. также [6]) автором было введено градуированное дифференциальное кольцо ориентированных комбинаторных сфер $\mathcal{T}_*$. Абелева группа $\mathcal{T}_n$ есть свободная абелева группа, порождённая классами изоморфизма ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер, профакторизованная по соотношениям $\langle -Y\rangle = -\langle Y\rangle$, где $\langle Y\rangle$ — класс изоморфизма ориентированной комбинаторной сферы Y и $-Y$ — комбинаторная сфера Y с обращённой ориентацией. Произведение в кольце $\mathcal{T}_*$ индуцируется джойном комбинаторных сфер, а понижающий градуировку дифференциал d определяется по формуле $d\langle Y\rangle = \sum\langle \operatorname{link} v\rangle$, где суммирование ведётся по всем вершинам v комбинаторной сферы Y и линки вершин наделяются индуцированными ориентациями.

Замечание 1. Отметим, что имеется определённое сходство между кольцом $\mathcal{T}_*$ и определённым в 2008 году В. М. Бухштабером [1] *кольцом простых многогранников* $\mathcal{P}_*$. Действительно, сопоставляя каждому простому многограннику комбинаторную сферу — границу двойственного симплициального многогранника, мы получим, что гиперграням простого многогранника соответствуют линки вершин комбинаторной сферы и прямому произведению простых многогранников соответствует джойн комбинаторных сфер. Таким образом, на первый взгляд, умножение и дифференциал в кольце Бухштабера в точности соответствуют умножению и дифференциалу в кольце $\mathcal{T}_*$. Тем не менее в действительности между кольцами $\mathcal{T}_*$ и $\mathcal{P}_*$ имеется кардинальное отличие. Оно заключается в том, что образующие кольца $\mathcal{T}_*$ соответствуют *ориентированным* комбинаторным сферам, причём образующая *меняет знак* при обращении ориентации, в то время как образующие кольца $\mathcal{P}_*$ соответствуют простым многогранникам *без выбранной ориентации.* В результате в случае кольца $\mathcal{T}_*$ мы имеем равенство $d^2 = 0$, что позволяет нам изучать гомологии кольца $\mathcal{T}_*$, а в случае кольца $\mathcal{P}_*$ дифференциал d (определяемый по такой же формуле) в квадрате не обращается в нуль, что позволило В. М. Бухштаберу получить много важных результатов о связи кольца простых многогранников $\mathcal{P}_*$ с дифференциальными операторами и уравнениями в частных производных.

Ввиду наличия групповой структуры в множестве $\mathcal{T}_n$ нам будет удобнее работать не с преобразование $\mathcal{L}$, а с преобразованием $\mathcal{L}_\mathcal{T}$, сопоставляющим каждому ориентированному n-мерному комбинаторному многообразию сумму классов изоморфизма линков его вершин в группе $\mathcal{T}_n$. Интерес к преобразованию $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ связан с тем, что оно индуцирует корректно определённый гомоморфизм $\alpha : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$, где Ω_*^{SPL} — кольцо ориентированных кусочно линейных кобордизмов. Еще одно преимущество преобразования $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ состоит в том, что оно коммутирует с операцией взятия барицентрического подразделения с точностью до элементов порядка 2. Частичное решение задачи об обращении преобразования $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ было получено автором в [10] и выглядит следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — сбалансированный набор ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер. Тогда существует ориентированное n-мерное симплициальное комбинаторное многообразие K, сумма классов изоморфизма линков вершин которого в группе $\mathcal{T}_n$ равна*

$$r\big(\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle\big)$$

для некоторого натурального числа r, то есть набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{r}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{r}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{r}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l$$

для некоторых ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$.

Следствие 1. *Ядро и коядро гомоморфизма α является группами кручения. Индуцированный гомоморфизм $\alpha \otimes \mathbb{Q} : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*(\mathcal{T}_*) \otimes \mathbb{Q}$ является кольцевым изоморфизмом.*

Следствие 2. *Гомоморфизм α индуцирует аддитивный изоморфизм*

$$\alpha^* : H^*(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})) \to \mathrm{Hom}(\Omega_*^{\mathrm{SPL}}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots],\ \deg p_i = 4i,$$

где p_i — рациональные классы Понтрягина.

Этот результат играет важную роль в развитой автором теории *универсальных локальных формул* для полиномов от рациональных классов Понтрягина. (В действительности описываемые ниже основные результаты автора о формулах для классов Понтрягина были получены автором в работе [5] раньше, чем была доказана теорема 2, но их изложение с использованием теоремы 2 выглядит более естественным.) Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q})$ сопоставляет каждому ориентированному m-мерному комбинаторному многообразию K его $(m-n)$-мерную симплициальную цепь $f_\sharp(K) \in C_{m-n}(K, \mathbb{Q})$ при помощи универсальной локальной формулы

$$f_\sharp(K) = \sum_{\operatorname{codim}\sigma = n} f\bigl(\langle \operatorname{link}\sigma\rangle\bigr)\sigma.$$

Цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K тогда и только тогда, когда она является коциклом в комплексе $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})$. В этом случае класс гомологий цикла $f_\sharp(K)$ зависит лишь от класса когомологий $[f] \in H^n(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q}))$ и двойствен по Пуанкаре полиному $\alpha^*[f]$ от рациональных классов Понтрягина многообразия K.

В конце 1950-х годов В. А. Рохлиным и А. С. Шварцем [12] и независимо Р. Томом [26] была доказана инвариантность рациональных классов Понтрягина относительно кусочно линейных гомеоморфизмов, что естественно приводит к задаче явного вычисления рациональных классов Понтрягина многообразия в терминах его триангуляции (конструкция Рохлина–Шварца–Тома не даёт рецепта явного вычисления). Эта задача имеет богатую историю, разные формулы были получены в работах [3], [4], [23], [15], [19]. Основным результатом работы [5] является явное вычисление при помощи бизвёздных преобразований Пахнера (см. [24], [25], [22]) коцикла $f \in H^4(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q}))$, дающего универсальную локальную формулу для первого рационального класса Понтрягина. Это — самая простая из известных к настоящему моменту явных комбинаторных формул для первого класса Понтрягина. В работе [10] автором на основе явной конструкции кубически клеточного комбинаторного многообразия X из теоремы 1 получены явные формулы для всех полиномов от рациональных классов Понтрягина, но эти формулы очень неэффективны.

Ещё одним приложением теорем 1 и 2 является новый подход к проблеме Стинрода о реализации циклов, развитый в работах автора [7], [8] [9], [10]. Классические результаты по проблеме Стинрода были получены Р. Томом [14], С. П. Новиковым [13] и другими математиками. Новый подход основан на явном комбинаторном построении реализующего многообразия N для класса qz (для некоторого натурального q) по сингулярному циклу, представляющему заданный целочисленный класс гомологий z. При этом искомое многообразие N склеивается из специальных простых многогранников, называемых пермутоэдрами. Такая комбинаторная конструкция сразу даёт следующий результат: для каждой размерности n существует одно ориентированное гладкое многообразие M^n такое, что всякий n-мерный целочисленный класс гомологий любого топологического пространства может быть реализован с некоторой кратностью образом конечнолистного накрытия над многообразием M^n. В качестве многообразия M^n выступает многообразие изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1)\times(n+1)$-матриц. К сожалению, при таком комбинаторном подходе пока не удаётся получить никаких разумных оценок на кратность q.

В работе [11] автором построена новая 15-вершинная триангуляция X комплексной проективной плоскости, обладающая рядом интересных свойств. Эта триангуляция является минимальной по количеству вершин в классе триангуляций, допускающих шахматную раскраску четырёхмерных симплексов, то есть таких, что к каждому двумерному симплексу примыкает чётное число четырёхмерных. Группа симметрий триангуляции X изоморфна прямому произведению $S_3 \times S_4$ и реализуется в виде подгруппы группы изометрий метрики Фубини–Штуди. Кроме того, триангуляция X, так же, как и минимальная 9-вершинная триангуляция $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, построенная В. Кюнелем (см. [20], [21]), имеет красивую связь с теорией комплексных кристаллографических групп.

2. Проект будущих исследований

В 1988 году Д. Купер и У. Тёрстон [16] получили следующий результат.

Теорема 3. *Любое трёхмерное многообразие M^3 обладает кубическим разбиением, в котором к каждому ребру примыкает 3, 4 или 5 кубов, причём объединение рёбер, к которым примыкает по 3 куба, и объединение рёбер, к которым примыкает по 5 кубов, являются непересекающимися одномерными многообразиями в M^3.*

В терминах линков вершин это условие на кубическое разбиение формулируется следующим образом: линк каждой вершины изоморфен либо надстройке над границей треугольника, либо надстройке над границей четырёхугольника, либо надстройке над границей пятиугольника. В качестве приложения Д. Купер и У. Тёрстон получили набор из 5 триангуляций двумерной сферы такой, что любое трёхмерное многообразие может быть триангулировано так, чтобы линк каждой вершины был изоморфен одной из этих 5 триангуляций (число 5 здесь легко может быть уменьшено до 3), и поставили задачу о нахождении аналогичного набора триангуляций $(n-1)$-мерной сферы для n-мерных многообразий, $n > 3$. Метод, использованный Д. Купер и У. Тёрстоном по существу трёхмерен: он основан на универсальности колец Борромео — и заведомо не может быть применён в других размерностях. До сих пор в размерностях > 3 не было никаких продвижений в этой задаче.

В рамках проекта планируется дать решение указанной задачи Купер–Тёрстона для четырёхмерных многообразий. Предполагаемый ответ зависит от сигнатуры многообразия. В случае нулевой сигнатуры планируется получить полный аналог теоремы Купер–Тёрстона: *Любое кусочно линейное ориентируемое четырёхмерное многообразие M^4 нулевой сигнатуры обладает кубическим разбиением, в котором к каждому двумерному кубу примыкает 3, 4 или 5 четырёхмерных кубов, причём объединение двумерных кубов, к которым примыкает по 3 четырёхмерных куба, и объединение двумерных кубов, к которым примыкает по 5 четырёхмерных кубов, являются двумерными многообразиями, погруженными в M^4 с изолированными точками трансверсального пересечения и самопересечения.* В терминах линков вершин это условие формулируется так: линк каждой вершины изоморфен джойну границы k-угольника и границы l-угольника, где $3 \le k, l \le 5$.

Для многообразий ненулевой сигнатуры такое же утверждение заведомо неверно. Действительно, если четырёхмерное многообразие обладает кубическим разбиением, в котором линк каждой вершины изоморфен джойну двух границ многоугольников, из наличия локальной формулы для первого класса Понтрягина сразу следует, что сигнатура этого многообразия нулевая. Для четырёхмерных многообразий ненулевой сигнатуры планируется показать, что к джойнам границы k-угольника и границы l-угольника, $3 \le k, l \le 5$, достаточно добавить ещё несколько (явно описываемых) «разрешённых» линков вершин. При этом предполагается, что важную роль будет играть построенная автором в [11] 15-вершинная триангуляция комплекснной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, допускающая шахматную раскраску четырёхмерных симплексов. Так же, как в размерности 3, предполагаемые результаты о кубических разбиениях четырёхмерных многообразий, сразу дадут соответствующие результаты о триангуляциях.

При решении задачи Купер–Тёрстона планируется использовать комбинаторные методы, разработанные автором при доказательстве теорем 1 и 2, а также активно использовать теорию бизвёздных преобразований Пахнера (см. [24], [25], а также [22]) и её аналог для двумерных кубических комплексов (см. [17], [18]). В действительности, указанные результаты по проблеме Купер–Тёрстона (особенно в случае нулевоой сигнатуры) в основном получены (по модулю некоторых технических деталей), но нигде не пока не опубликованы и не рассказывались.

В задаче об обращении преобразования $\mathcal{L}$ (см. раздел 1) планируется попытаться продвинуться в направлении эффективизации конструкций комбинаторных многообразий X и K из теорем 1 и 2 и получения разумных оценок на кратность r. То же самое относится к комбинаторному подходу к проблеме реализации циклов. Особенно интересно было бы попытаться найти прямую комбинаторную конструкцию многообразия, реализующего заданный целочисленный класс гомологий с какой-либо *нечётной кратностью* (согласно результату С. П. Новикова [13], такая реализация всегда возможна).

В настоящее время не видно подходов к получению эффективных комбинаторных формул для старших *рациональных* классов Понтрягина. Специфика первого *целочисленного* класса Понтрягина состоит в том, что, в отличие от старших целочисленных классов Понтрягина, он является комбинаторным (и даже топологическим) инвариантом. Поэтому возникает задача о построении явной комбинаторной формулы для первого целочисленного класса Понтрягина. В рамках проекта планирнуется решить эту задачу.

3. Преподавательский опыт и педагогические планы

Начиная с 2007 года я работаю на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета им. М. В. Ломоносова (с октября 2009 года — доцентом) и веду на механико-математическом факультете практические занятия по курсам аналитической геометрии (осенний семестр 2007/08 и 2009/10 учебных годов), линейной алгебры и геометрии (весенний семестр 2008/09 учебного года), классической дифференциальной геометрии (весенний семестр 2008/09 учебного года) и дифференциальной геометрии и топологии (осенний семестр 2007/08 учебного года). Кроме того, начиная с 2005 года, я читаю годовые специальные курсы на механико-математическом факультете МГУ: «Классифицирующие пространства и их приложения» (2005/06, совместно с проф. В. М. Бухштабером и к.ф.-м.н. Н. Э. Добринской), «Геометрическая теория кобордизмов и её приложения» (2006/07), «Торическая топология и комплексные кобордизмы» (2007/08), «Торическая топология» (2008/09), «Комбинаторная топология многообразий» (2009/10) (все — совместно с чл.-корр. РАН В. М. Бухштабером и доц. Т. Е. Пановым). В ближайшие годы я планирую вести примерно такую же педагогическую деятельность.

Список литературы

[1] Бухштабер В. М., *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Труды МИРАН, т. 263 (2008), с. 18–43.

[2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е., *Торические действия в топологии и комбинаторике.* М.: МЦНМО, 2004.

[3] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., *Комбинаторное вычисление характеристических классов*, Функц. анализ и прил. 1975. Т. 9. №2. С. 12–28. №3. С. 5–26.

[4] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., *Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина*, Функц. анализ и прил. 1976. Т. 10. №1. С. 14–17.

[5] Гайфуллин А. А., *Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина*, Известия РАН, сер. матем., т. 68 (2004), №5, с. 13-66.

[6] Гайфуллин А. А., *Вычисление характеристических классов многообразия по его триангуляции*, УМН, т. 60 (2005), № 4, с. 37–66.

[7] Гайфуллин А. А., *Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий*, УМН, т. 62 (2007), №6, с. 167–168.

[8] Гайфуллин А. А., *Реализация циклов асферичными многообразиями*, УМН, т. 63 (2008), №3, с. 157–158.

[9] Гайфуллин А. А., *Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и реализация циклов асферичными многообразиями*, Труды МИРАН, т. 263 (2008), с. 44–63.

[10] Гайфуллин А. А., *Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин*, Известия РАН, сер. матем., т. 72 (2008), №5, с. 3–62.

[11] Гайфуллин А. А., *Минимальная триангуляция комплексной проективной плоскости, допускающая шахматную раскраску четырехмерных симплексов*, Труды МИРАН, т. 266 (2009), с. 33–53.

[12] Рохлин В. А., Шварц А. С., *О комбинаторной инвариантности классов Понтрягина*, ДАН СССР, т. 114 (1957), № 3, с. 490–493.

[13] Новиков С. П., *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб., т. 57 (1962), №4, с. 407–442.

[14] Том Р., *Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий*, Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 291–348.

[15] Cheeger J., *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. 1983. V. 18. № 4. P. 575–657.

[16] Cooper D., Thurston W. P., *Triangulating* 3*-manifolds using* 5 *vertex link types.* Topology **27**:1 (1988), p. 23–25.

[17] Funar L., *Cubulations, immersions, mappability and a problem of Habegger*, Ann. Sci. E.N.S., **32** (1999), p. 681-700.

[18] Funar L., *Surface cubications mod flips*, Manuscripta Math. **125** (2008), p. 285-307.

[19] Gelfand I. M., MacPherson R. D., *A combinatorial formula for the Pontrjagin classes*, Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 26. № 2. P. 304–309.

[20] Kühnel W., Banchoff T. F., *The 9-vertex complex projective plane*, Math. Intelligencer **5**:3 (1983), p. 11–22.

[21] Kühnel W., Lassman G., *The unique 3-neighbourly 4-manifold with few vertex*, Math. Intelligencer **5**:3 (1983), p. 11–22.

[22] Lickorish W. B. R., *Simplicial moves on complexes and manifolds*, Geometry and Topology Monographs, vol. 2: Proceedings of the Kirbyfest, p. 299–320.

[23] MacPherson R., *The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class*, Sèminaire Bourbaki No. 497. Lecture Notes in Math. V. 677. Heidelburg: Springer,1977.

[24] Pachner U., *Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1987. V. 57. P. 69–86.

[25] Pachner U., *P. L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, European J. Combin. 1991. V. 12. №2. P. 129–145.

[26] Thom R., *Les classes charactéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico: La Universidad Nacional Autonoma de Mexico y la Unesco, 1958, p. 54–67.