План исследований
Д. А. Шабанов

Проведенные исследования

На конкурс выдвигается проект исследования по классическим проблемам комбинаторного анализа, которые были поставлены в 60 - 70-е годы XX века. Сначала напомним некоторые определения.

Гиперграфом H называется пара $H = (V, E)$, где V — некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин*, а E — совокупность различных подмножеств множества V, которые называются *ребрами* гиперграфа. Раскраской множества вершин V называется отображение $f: \ V \to C$, где C — произвольное множество (*множество цветов*). Если $|C| = r$, то раскраска называется r-цветной. Раскраска вершин гиперграфа называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра гиперграфа являются неоднoцветными. *Хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски множества вершин. Если $\chi(H) \le r$, то H называется *r-раскрашиваемым*. Гиперграф является *n-равномерным*, если каждое его ребро состоит ровно из n вершин (т. е. $E \subset \binom{V}{n}$).

Ясно, что если хроматическое число и минимальная мощность ребра у гиперграфа велики, то количество его ребер не может слишком маленьким. В связи с этим в 1961 г. П. Эрдеш и А. Хайнал поставили (см. [1]) знаменитую задачу о нахождении минимально возможного числа ребер (безотносительно числа вершин) у n-равномерного гиперграфа с хроматическим числом больше r. Данную искомую величину обозначим через $m(n, r)$:

$$m(n, r) = \min \{|E| : \ H = (V, E) - n\text{-равномерный гиперграф}, \ \chi(H) > r\}.$$

Эрдеш доказал (см. [2], [3]) первые нетривиальные оценки величины $m(n, 2)$. Эти результаты легко обобщаются (см., например, [4]) на случай произвольного значения r:

$$r^{n-1} \le m(n, r) \le \frac{e \ln r}{2} n^2 (r - 1)\, r^{n-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{1}$$

В случае $r = 2$ верхняя оценка в (1) по-прежнему остается асимптотически наилучшей. Нижняя же оценка величины $m(n, 2)$ была последовательно улучшена В. Шмидтом (см. [5]), Й. Беком (см. [6],[7]) и, наконец, Дж. Радхакришнаном и А. Сринивасаном (см. [8]), которые получили наилучший на сегодняшний день результат для случая двух цветов:

$$m(n, 2) \ge 0,2 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^{n-1}. \tag{2}$$

Мною была получена нижняя оценка величины $m(n, r)$, совпадающая с оценкой (2) при $r = 2$.

Теорема 1. *Для всех $n \ge 2$, $r \ge 2$ выполнено неравенство*

$$m(n, r) \ge (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} r^{n-1}. \tag{3}$$

Данный результат опубликован в кратком сообщении [9], где приведены лишь идеи доказательства. Полное доказательство неоднократно рассказывалось на семинарах, его планируется опубликовать в работе [10], которая на сегодняшний день находится на рецензии.

Среди других известных нижних оценок величины $m(n, r)$ стоит выделить результаты Н. Алона (см. [11]), А. В. Косточки (см. [12]) и А. Плухара (см. [13]). Мной на основе идей А. Плухара из работы [13] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n,r) \geq \left(\pi^{\frac{1}{r}}\, e^{-\frac{1}{12(n-1)}}\right) \frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\, (n-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}\, r^{n+2/r}. \tag{4}$$

Данный результат опубликован в кратком сообщении [14]. Полное доказательство неоднократно рассказывалось на различных семинарах, его планируется опубликовать позднее.

Из теоремы 2 следует, что $m(n,r)/r^n \to \infty$ при $n \to \infty$ для произвольной функции $r = r(n)$. Ранее этот факт был известен только при малом росте функций $r(n)$. Соотношение между известными нижними оценками является весьма сложным. Как и в других многопараметрических задачах, при различных соотношениях между параметрами оценки соотносятся по-разному, подробнее об этом можно прочитать в [14] и [15]. Отметим, однако, что при $r > \sqrt{1/8\ln((\ln n)/2)}$ оценки (3) и (4) являются асимптотически наилучшими.

С задачей Эрдеша – Хайнала о нахождении $m(n,r)$ тесно связана экстремальная задача о полноцветных раскрасках гиперграфов. Раскраска множества вершин гиперграфа в r цветов (r-раскраска) называется *полноцветной*, если в ней каждое ребро содержит вершины всех цветов. В работе А.В. Косточки [16] (см. также [4]) был поставлен вопрос об отыскании величины $p(n,r)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не имеющих полноцветных r-раскрасок, т. е.

$p(n,r) = \min\{|E|\colon H = (V,E)$ - n-равномерный гиперграф, для которого не существует полноцветных r-раскрасок$\}$.

Ясно, что $p(n,2) = m(n,2)$, в общем же случае $p(n,r) \leq m(n,r)$. А.В. Косточка в работе [16] доказал, что существуют такие положительные константы $c_1 < c_2$, что для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполнено

$$\frac{1}{r} e^{c_1 \frac{n}{r}} \leq p(n,r) \leq r e^{c_2 \frac{n}{r}}. \tag{5}$$

В работе [17] (см. теоремы 8 и 9) мною были доказаны следующие оценки величины $p(n,3)$ (в работе [17] использовалось другое обозначение — $m_1^3(n) = p(n,3)$).

Теорема 3. *Для некоторой функции $\psi(n) \sim 1$ при $n \to \infty$ и некоторой положительной константы c выполняются неравенства*

$$c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq p(n,3) \leq \frac{e\ln 3}{12} n^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \psi(n). \tag{6}$$

Оценки (6) асимптотически улучшают результат (5) для $r = 3$. Кроме того, из (6) вытекает асимптотика логарифма величины $p(n,3)$: $\ln p(n,3) \sim n\ln(3/2)$ при $n \to \infty$.

Проект будущих исследований

Проект предусматривает дальнейшие исследования относительно комбинаторной задачи Эрдеша – Хайнала, различных ее обобщений, а также близких проблем теории графов и комбинаторной теории чисел. Перечислим некоторые конкретные направления и ожидаемые результаты.

1. Задача Эрдеша – Ловаса о простых гиперграфах. В знаменитой работе Эрдеша и Л. Ловаса [18] было предложено следующее обобщение задачи Эрдеша – Хайнала: найти величину $m^*(n,r)$, равную минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-равномерных простых[1] гиперграфов с хроматическим числом больше r. Различные оценки

[1]Гиперграф называется *простым*, если любые два ребра этого гиперграфа имеют не более одной общей вершины

$m^*(n,r)$ были получены в работах [18], [19], [20], [21]. Следующее утверждение улучшает ранее известные нижние оценки в широком промежутке значений параметра r.

Теорема 4. *Для всех натуральных $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m^*(n,r) \geq \frac{(\sqrt{6}-2)^2}{32}\,\frac{r^{2n-4}}{n\ln n}. \tag{7}$$

Данная теорема включена в работу [10], которая на сегодняшний день находится на рецензии. Еще один ожидаемый результат позволяет получить более сильную нежели (7) нижнюю оценку, когда r не слишком велико по отношению к n. Предварительная формулировка звучит следующим образом.

Теорема 5. *Пусть заданы натуральные числа $n \geq 3$, $r \geq 2$, положительные k, c, α и число $\beta \in (0,1]$. Введем следующие обозначения:*

$$t = \left\lfloor \min\left(\sqrt{\frac{\ln n}{\ln r}}, \sqrt{\frac{\ln n}{c\ln(\alpha \ln n)}}\right)\right\rfloor,\ q = \frac{\alpha \ln n}{n},\ \gamma_1 = 1+\frac{2}{ck}-\alpha,\ \gamma_2 = \frac{3}{2}+\frac{1}{c}-k,\ \gamma_3 = \frac{3}{2}+\frac{4}{7ck}+\alpha-k.$$

Если выполняются неравенства

$$t \geq k, \quad q \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 \leq 0, \quad \gamma_2 \leq 0, \quad \gamma_3 \leq 0,$$

$$\frac{n\ln n}{2^n} + \frac{13}{(\lceil k\rceil+1)^3}\,n^{\gamma_1} + (\lceil k\rceil+1)^2\left(\frac{e}{\lceil k\rceil}\right)^{\lceil k\rceil}\beta\, n^{\gamma_2} + \frac{3\beta}{e}\,n^{\gamma_3} < \frac{1}{4},$$

то

$$m^*(n+1,r) \geq \frac{1}{2}\,r^{2n-2}n^{-2k/t}\beta^{2/t}. \tag{8}$$

Следствие 1 дает явный вид нижней оценки (8) при определенных ограничениях на значение параметра r.

Следствие 1. *Положим $\varphi(n) = \frac{\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln n} - 0{,}6\sqrt{\ln(3\ln n)}} \sim 1$. Тогда*

1) Существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geq n_0$ и для всех r, удовлетворяющих неравенству

$$r \leq (2\ln n)^{1/4}, \tag{9}$$

выполнено

$$m^*(n+1,r) \geq \frac{1}{2}\,r^{2n-2}n^{-5{,}4\sqrt{\frac{\ln(3\ln n)}{\ln n}}\,\varphi(n)}\,8^{-1{,}05\sqrt{\frac{\ln(3\ln n)}{\ln n}}\,\varphi(n)}. \tag{10}$$

2) Существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geq n_0$ и для всех r, удовлетворяющих соотношениям

$$(2\ln n)^2 \leq r \leq n^{1/9}, \tag{11}$$

выполняется неравенство

$$m^*(n+1,r) \geq \frac{1}{2}\,r^{2n-2}n^{-6\left\lfloor\sqrt{\frac{\ln n}{\ln r}}\right\rfloor^{-1}}. \tag{12}$$

Оценка (10) лучше предыдущего результата (7) при всех допустимых значениях r (см. (9)), а оценка (12) лучше (7), например, если $r \leq (n-1)^{1/49}$. Все три полученных результата существенно улучшают ранее известные оценки величины $m^*(n,r)$ (см. [18], [19], [20], [21]). Результаты теоремы 5 и следствия 1 планируется включить в новую работу, которая еще не подана в печать.

2. Задача А.В. Косточки о полноцветных раскрасках гиперграфов. Как уже было упомянуто выше, в работе А.В. Косточки [16] была поставлена задача о нахождении величины $p(n,r)$ (определение см. в разделе "Проведенные исследования"). Методы, предложенные в работе [17] для оценивания величины $p(n,3)$ (см. теорему 3), можно обобщить на случай произвольного r. Предварительные результаты сформлированы в теоремах 6 и 7.

Теорема 6. *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполнено неравенство*

$$p(n,r) \geq \frac{\sqrt{21}-3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)\ln n} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{n}. \tag{13}$$

Теорема 7. *Пусть задана функция $r = r(n)$, удовлетворяющая условию $r \geq 3$. Пусть, кроме того, функция $d = d(n) := r^3/n^2$ не превосходит некоторой положительной константы $c < 1/2$ при всех $n > n_0$. Тогда существует такая функция $\varphi = \varphi(n)$, зависящая от функции r и стремящаяся к единице при $n \to \infty$, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство*

$$p(n,r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{n} e(\ln r) \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3 r(r-1)}}{4(r-1)} \varphi, \tag{14}$$

Оценки (13) и (14) существенно улучшают ранее известные оценки величины $p(n,r)$ (см. (5)) при выполнении условий теорем 6 и 7. Данные результаты планируется опубликовать в работе [22], которая подана в печать, но пока не опубликована.

3. Предписанное хроматическое число полных r-дольных графов. Сначала напомним ряд определений. Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный граф с множеством вершин V и множеством ребер E, а C — некоторое множество, элементы которого называются *цветами*. *Вершинным предписанием* A будем называть некоторое отображение, которое каждой вершине v сопоставляет некоторое подмножество $A(v) \subseteq C$. Если $|A(v)| = k$ для каждого $v \in V$, то будем говорить, что *мощность* предписания равна k. Раскраской f вершин графа G, соответствующей предписанию A, называется такое однозначное отображение $f : V \to C$, что $f(v) \in A(v)$. При этом будем говорить, что каждая вершина v окрашена в цвет $f(v)$. Граф называется *предписанно k-раскрашиваемым*, если для любого множества цветов C и любого вершинного предписания A мощности k найдется правильная раскраска, соответствующая данному предписанию. *Предписанным хроматическим числом* графа G (обозначение — $ch(G)$) называется минимальное натуральное число k такое, что G является предписанно k-раскрашиваемым.

Изучение предписанного хроматического числа было инициировано работами В.Г. Визинга [23], а также П. Эрдеша, А.Л. Рубина и Х. Тейлора [24]. Обозначим через K_{r*m} — полный r-дольный граф, у которого размер каждой доли равен m. Хорошо известен тот факт (см. [24]), что $ch\,(K_{2*m}) \sim \log_2 m$ при $m \to \infty$. В случае большего числа долей r Н. Алон (см. [25]) доказал, что $c_1 r \ln m \leq ch\,(K_{r*m}) \leq c_2 r \ln m$, где c_1 и c_2 — некоторые абсолютные константы. Точные значения $ch\,(K_{r*m})$ при некоторых условиях на параметры r и m были найдены, например, в [26], [27]. В работе [28] было доказано, что $ch\,(K_{r*m}) \sim \log_{r/(r-1)} m$ при фиксированном r и $m \to \infty$. Используя тесную связь между предписанными раскрасками полных r-дольных графов и полноцветными r-раскрасками равномерных гиперграфов, можно найти асимптотику $ch\,(K_{r*m})$ при более слабых условиях на параметры, нежели это было сделано в [28].

Теорема 8. *Пусть функция $r = r(m)$ такова, что $\ln r = o\,(\ln m)$ при $m \to \infty$. Тогда*

$$ch\,(K_{r*m}) \sim \ln m \left[\ln \left(\frac{r}{r-1} \right) \right]^{-1} \text{ при } m \to \infty.$$

Данный результат был рассказан на семинаре, планируется написание статьи.

4. Функция ван дер Вардена. Знаменитая теорема ван дер Вардена (см. [29]) утверждает, что для любых натуральных чисел n и r существует такое минимальное число $W(n,r)$, что если $N \geq W(n,r)$, то в любой r-цветной раскраске множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n. Однако теорема ван дер Вардена не дает представления о порядке роста функции $W(n,r)$ (которую называют *функцией ван дер Вардена*).

Поиску асимптотических оценок $W(n,r)$, а также вычислению ее значений при фиксированных малых параметрах n и r, посвящено большое количество работ различных авторов (см. [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38]).

Особо отметим известные нижние асимптотические оценки $W(n,r)$. В работе [39] Э. Берлекамп доказал, что $W(p+1,2) \geq p\,2^p$, если p — простое число. Из Локальной леммы (знаменитого утверждения теории вероятностей об оценке вероятности одновременного выполнения набора событий), доказанной Л. Ловасом в [18], следует, что

$$W(n,r) \geq \frac{r^{n-1}}{en}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{15}$$

Наконец, З. Сабо в [19] получил наилучшую асимптотическую оценку $W(n,2)$: $W(n,2) \geq 2^n n^{-|o(1)|}$. Результаты Сабо и (15) опираются на теоремы следующего типа: если каждое ребро n-равномерного гиперграфа пересекает не более $d(n,r)$ (некоторая функция) других ребер гиперграфа, то такой гиперграф является r-раскрашиваемым. Одна из таких теорем формулируется следующим образом.

Теорема 9. *Пусть $n \geq 2$, $r \geq 2$ — произвольные натуральные числа. Обозначим через d выражение*

$$d = \frac{\sqrt{6}-2}{4}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} r^{n-1} - 1.$$

Если H — n-равномерный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более чем с d другими ребрами гиперграфа, то $\chi(H) \leq r$.

Данный результат включен в работу [10] и пока не опубликован. Теорема 9 дает новую нижнюю оценку функции ван дер Вардена.

Следствие 2. *Для любых $n \geq 3$, $k \geq 2$*

$$W(n,r) > \frac{\sqrt{6}-2}{4}\frac{r^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Асимптотическое улучшение по сравнению с (15) очевидно.

Заключение. В пунктах 1–4 были представлены лишь некоторые задачи, по которым будет проводится исследование. Написать достаточно подробно обо всех направлениях не представляется возможным в силу ограниченности формата заявки.

Преподавательский опыт и педагогические планы

1. С весны 2008 г. веду семинарские занятия по основным курсам "Теория вероятностей", "Математическая статистика", "Теория случайных процессов" на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

2. В течение 2006–2009 гг. вел семинарские занятия по основному курсу "Комбинаторика" на факультете биоинженерии и биоинформатики МГУ им. М. В. Ломоносова.

3. С осени 2008 г. веду семинарские занятия по основным курсам "Теория вероятностей", "Математическая статистика", "Случайные процессы" на факультете инноваций и высоких технологий МФТИ. В осеннем семестре 2009 г. читаю лекции по курсу "Случайные процессы" на факультете инноваций и высоких технологий МФТИ.

4. Весной 2009 г. читал лекции и вел семинарские занятия по основному курсу "Теория вероятностей" в Казахстанском филиале МГУ им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

[1] P. Erdős, A. Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary*, **12** (1961), 87–123.

[2] P. Erdős, “On a combinatorial problem, I”, *Nordisk Mat. Tidskrift*, **11** (1963), 5–10.

[3] P. Erdős, “On a combinatorial problem, II”, *Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary*, **15**:3–4 (1964), 445–447.

[4] A. V. Kostochka, “Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey”, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Society Mathematical Studies, **15**, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, 2006, 175–198.

[5] W. M. Schmidt, “Ein kombinatorisches Problem von P. Erdös and A. Hajnal”, *Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary*, **15** (1964), 373–374.

[6] J. Beck, “On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász”, *Discrete Mathematics*, **17**:2 (1977), 127–131.

[7] J. Beck, “On 3-chromatic hypergraphs”, *Discrete Mathematics*, **24**:2 (1978), 127–137.

[8] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring”, *Random Structures and Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[9] Д. А. Шабанов, “О хроматическом числе конечных систем подмножеств”, *Математические заметки*, **85**:6 (2009), 951–954.

[10] А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, “О правильных раскрасках гиперграфов в предписанные цвета” (в печати).

[11] N. Alon, “Hypergraphs with high chromatic number”, *Graphs and Combinatorics*, **1** (1985), 387–389.

[12] A. V. Kostochka, “Coloring uniform hypergraphs with few colors”, *Random Structures and Algorithms*, **24**:1 (2004), 1–10.

[13] A. Pluhár, “Greedy colorings for uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **35**:2 (2009), 216–221.

[14] Д. А. Шабанов, “Об улучшении нижней оценки в комбинаторной задаче Эрдеша - Хайнала”, *Доклады Академии Наук*, **426**:2 (2009), 177–178.

[15] D. A. Shabanov, A. P. Rozovskaya, “On the problem of Erdős and Hajnal in the case of list colorings”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **34** (2009), 387–391.

[16] A. V. Kostochka, “On a theorem by Erdős, Rubin and Taylor on choosability of complete bipartite graphs”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **9**:1 (2002).

[17] Д. А. Шабанов, “Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов”, *Известия РАН. Серия математическая*, **71**:6 (2007), 183–222.

[18] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1973, 609–627.

[19] Z. Szabo, “An application of Lovasz Local Lemma - a new lower bound for the van der Waerden number”, *Random Structures and Algorithms*, **1**:3 (1990), 343-360.

[20] D. Grable, K. Phelps, V. Rödl, “The minimum independence number for designs”, *Combinatorica*, **15** (1995), 175-185.

[21] A. V. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, “On the chromatic number of set systems”, *Random Structures and Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.

[22] Д. А. Шабанов, “О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов” (в печати).

[23] В. Г. Визинг, “Раскраска вершин графа в предписанные цвета”, *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сборник научных трудов*, **29**, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1976, 3–10.

[24] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, “Choosability in graphs”, *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Arcata, 1979, Congr. Numer.), **26**, 1980, 125–157.

[25] N. Alon, “Choice number of graphs: a probabilistic approach”, *Combinatorics, Probability and Computing*, **1** (1992), 107–114.

[26] H. Kierstead, "On the choosability of complete multipartite graphs with part size 3", *Discrete Mathematics*, **211** (2000), 255–259.

[27] B. Reed, B. Sudakov, "List colouring of graphs with at most $(2 - o(1))\chi$ vertices", *Proceedings of International Congress Mathematics* (Beijing, 2002), **3**, 2002, 587–603.

[28] N. Gazit, M. Krivelevich, "On the asymptotic value of the choice number of complete multi-partite graphs", *Journal of Graph Theory*, **52** (2006), 123–134.

[29] B. L. van der Waerden, "Beweis einer Baudetschen Vermutung", *Nieuw Arch. Wiskunde*, **15** (1927), 212–216.

[30] P. Erdős, R. Radó, "Combinatorial theorems on classifications of subsets of given set", *Proceedings of London Mathematical Society*, **2** (1952), 417–439.

[31] L. Moser, "On a theorem of van der Waerden", *Canadian Mathematical Bulletin*, **3** (1960), 23–25.

[32] W. M. Schmidt, "Two combinatorial theorems on arithmetic progressions", *DMJ*, **29** (1962), 129–140.

[33] V. Chvátal, "Some unknown van der Waerden numbers", *Combinatorial structures and their applications*, New York, 1970, 31–33.

[34] M. D. Beeler, P. E. O'Neil, "Some new van der Waerden numbers", *Discrete Mathematics*, **28** (1979), 135–146.

[35] R. Graham, J. Solymosi, "Monochromatic equilateral right triangles on the integer grid", *Topics in Discrete Mathematics, Algorithms and Combinatorics*, 2006.

[36] P. Herwig, M. Heule, P. van Lambalgen, H. van Maaren., "A new method to contruct lower bounds for van der Warden numbers", *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14** (2007), 1–18.

[37] S. Shelah, "Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers", *J. American Mathematical Society*, **1** (1988), 683–697.

[38] T. Gowers, "A new proof of Szemeredi theorem", *Geometric and Functional Analysis*, **11** (2001), 465–588.

[39] E. Berlekamp, "A construction for partitions which avoide long arithmetic progressions", *Canadian Mathematical Bulletin*, **11** (1968), 409–414.