ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ

Тема исследовательского проекта: Решение двухточечной краевой задачи нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и параметром.

Целью исследования является детальная разработка качественных методов исследования двух видов нелинейных систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и параметром:

1. Нелинейная система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом произвольной структуры и параметром (система 1 вида)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t,\lambda)x(h(t)) + f(t, x(t), x(h(t)), \lambda),$$

в которой $A(t)$, $B(t,\lambda)$ – непрерывные $(n \times n)$–матрицы, $f(t,x,y,\lambda)$ – n–мерная вектор-функция, $h(t)$ – отклонение, λ – параметр.

2. Нелинейная система дифференциальных уравнений запаздывающего типа с параметром (система 2 вида)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \widetilde{A}(t,\lambda)x(t) + B(t,\lambda)T_{\mu}x(t) + f(t, x(t), T_{\mu}x(t), \lambda) + \widetilde{f}(t,\lambda),$$

в которой $A(t)$, $\widetilde{A}(t,\lambda)$ $B(t,\lambda)$ – непрерывные $(n \times n)$–матрицы, $f(t,x,y,\lambda)$, $\widetilde{f}(t,\lambda)$ – n–мерные вектор-функции, T_{μ} – оператор сдвига, λ – параметр.

Работа направлена на фундаментальную проблему отыскания условий существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи нелинейных систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и параметром, описывающих многие процессы с последействием и запаздывающими связями, в которых состояние физических систем в данный момент времени существенно зависит от их состояний в прошлом. Актуальность данной проблемы диктуется характерными для последних десятилетий интенсивными исследованиями математических моделей с отклонением, стимулируемыми многочисленными приложениями дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Поскольку область приложения обширна, то естественны сложность и многообразие получаемых математических моделей. В силу этих причин общего решения поставленной проблемы пока не найдено.

Отметим, что в литературе большое внимание уделялось и уделяется различным задачам теории устойчивости систем с последействием. Задача же исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и параметром, в частности, системы 1 вида с отклонением произвольной структуры, является мало изученной. В рамках данной работы предполагается получить качественные методы исследования таких систем и применить их к исследованию конкретных моделей, для которых пока не решена проблема выбора математического аппарата.

В работе исследуются системы дифференциальных уравнений специального вида (система 1 вида и система 2 вида) с целью определения условий существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи в достаточно малой окрестности тривиального решения. Система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом 1 вида в отличие от систем, рассмотренных в работах Б.Г. Гребенщикова, О.И. Кюна, В.В. Малыгиной, имеет векторный параметр и произвольное отклонение. Система является нелинейной, чем отличается от линейных систем с последействием, изученных в работах Н.В. Азбелева, П.М. Симонова, В.В. Малыгиной. Отклонение носит такой характер, что начальные функции совпадают не с нулем, а с начальным значением на всем начальном множестве. Конструктивные методы, используемые многими авторами для исследования систем дифференциальных уравнений, к решению поставленной проблемы не применимы. Исследования с использованием конструктивных методов, при которых исходная задача аппроксимируется, являются локальными по времени. Рассматриваемая же в работе система 1 вида имеет произвольное отклонение, то есть в любой момент времени функция отклонения может выйти за пределы сегмента. Поэтому применение метода шагов, а значит, и известных теорем существования и единственности решения основной начальной задачи, является невозможным.

Следует отметить, что в работе не используется метод представления решения в виде тригонометрического многочлена в отличие от работ С.В. Богатовой, Г.С. Лукьяновой. Метод, предложенный в работе для исследования системы 1 вида, позволяет решать более широкий спектр задач, исследовать разнообразные по своей структуре математические модели.

Рассмотренная в работе система дифференциальных уравнений запаздывающего типа (система 2 вида) в отличие от систем, изученных в работах Н.В. Азбелева, Б.Г. Гребенщикова, имеет векторный параметр и запаздывание специального вида. Запаздывание носит такой характер, что не требуется вводить начальную функцию, как для систем с постоянным запаздыванием, начальный промежуток вырождается в точку. В работе не предполагается использование метода разложения решения по степеням параметра и начальных данных. В основе исследований системы 2 вида, в отличие от работ М.Т. Терехина, А. Халаная, Д. Векслера, лежит специальным образом построенный вид решения, что позволит для решения двухточечной краевой задачи существенно привлечь свойства нелинейных частей системы.

Методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, используемые в работе, делают возможным исследование обширного круга новых задач. Тем самым, большинство из ожидаемых результатов являются абсолютно новыми.

Проведенные исследования

1. Доказаны теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений систем функционально-дифференциальных уравнений 1 и 2 вида от параметра и начальных данных.

2. Получены фундаментальные теоремы о свойствах решений систем, в частности, теорем об условиях представления решений систем дифференциальных уравнений через вектор начального значения и параметр.

Следует отметить, что в отличие от опубликованных результатов исследования структуры решений системы 1 вида результаты исследования структуры решений системы 2 вида получены, доложены на семинарах, но пока не опубликованы.

Проект будущих исследований

Задачу поиска условий существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи системы 1 вида предполагается свести к задаче поиска условий разрешимости операторного уравнения разбиением конечномерного векторного пространства на прямую сумму трех подпространств, одно из которых инвариантно относительно вспомогательного оператора.

Предполагается подробное исследование полученного операторного уравнения с помощью разложения форм в степенные ряды и применения метода неподвижной точки.

Проблему существования ненулевых решений двухточечной краевой задачи системы 2 вида планируется свести к задаче поиска условий существования ненулевой неподвижной точки нелинейного оператора, построение которого основано как на свойствах матрицы линейного приближения, так и на свойствах нелинейных членов правой части системы.

К ожидаемым результатам научного исследования относятся:

1. Вывод алгоритма получения необходимых условий и достаточных условий существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи системы дифференциальных уравнений с отклонением 1 вида путем сведения задачи исследования к проблеме разрешимости операторного уравнения.

2. Определение влияния нелинейных членов системы дифференциальных уравнений 1 вида на условия существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи.

3. Получение условий существования ненулевых решений двухточечной краевой задачи системы 2 вида с использованием свойств нелинейных членов.

4. Решение двухточечной краевой задачи нелинейной системы дифференциальных уравнений 1 вида методом линейного преобразования.

5. Решение двухточечной краевой задачи системы 2 вида по первому приближению.

6. Получение достаточных условий существования и отсутствия ненулевых решений двухточечной краевой задачи для системы 2 вида в критическом случае, когда вектор-функция, зависящая только от времени и параметра, обращается в нуль.

7. Исследование численных примеров и конкретных математических моделей в экономике, биологии, иммунологии и химии с целью получения условий существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи.

Преподавательский опыт и педагогические планы

Преподавательский опыт – 3 года. С июня 2006 года по настоящее время работаю в ГОУВПО «Московский государственный университет прикладной биотехнологии» (МГУПБ) в должности доцента кафедры «Высшая математика и теоретическая механика», а также с октября 2006 года по настоящее время являюсь заместителем декана факультета «Мехатроника и робототехника» МГУПБ. За указанный период проводила все виды учебных занятий, включая лекции и практические занятия по дисциплинам «Высшая математика», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Вычислительная математика», «Дискретная математика», «Математическое программирование». В рамках методической работы в 2007 году изданы методические указания для студентов всех специальностей по теме «Двойные и тройные интегралы». Готовятся к изданию учебное пособие «Вычислительная математика», а также методические указания по темам «Введение в математический анализ» и «Определенный интеграл».

Библиографический список

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П. Уравнения с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т.18. – №12. – С. 2027-2050.
2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика. – 1997. – №6. – С. 3-16.
3. Богатова С.В. Ненулевые периодические решения систем дифференциальных уравнений с малым постоянным запаздыванием // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2001. – №4. – С. 14-21.
4. Гребенщиков Б.Г. О почти периодических решениях одной нестационарной системы с линейным запаздыванием // Сиб. матем. журн. 1999. Т.40. №3. С. 513-537.
5. Кюн О.И. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений нейтрального типа // Труды МИХМа. Автоматизация химических производств на базе математического моделирования. Тезисы докладов. Под ред. Азбелева Н.В. – М., 1975. – Вып. 64. – С. 8-11.

6. Лукьянова Г.С. Периодические решения линейных систем функционально-дифференциальных уравнений с малым параметром // Ряз. Гос. рад.-техн. Акад. – Рязань, 2003. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.11.2003. – №1901-В2003.
7. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28. – №10. – С. 1716-1723.
8. Малыгина В.В. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Известия вузов. Математика. – 1993. – №5. – С. 72-85.
9. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352с.
10. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 288с.
11. Терехин М.Т. Бифуркация периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1999. –№10 (449). – С. 37-42.
12. Терехин М.Т. О существовании неподвижной точки одного нелинейного оператора // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т.20. – №9. – С. 1561-1565.
13. Халанай А. Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. Math. Pur. Appl. Ac. Rpr. – 1959. – Т.4. – №3. – С. 467-483.
14. Халанай А. О некоторых свойствах периодических и почти периодических систем с запаздыванием // Rev. Math. Pur. Appl. Ac. Rpr. – 1964. – Т.9. – №7. – С. 667-675.
15. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
16. Agarwal R.P., O'Regan D., Rachunkova I., Stanek S. Two-point higher-order BVPs with singularities in phase variables // Comput and Math Appl. – 2003. – V. 46. – № 12. – P. 1799–1826.

17. Charapova J.V. Positive solutions of singular boundary value problems // Докл. Бълг. Ан. – 2002. – V. 55. – № 10. – P. 5–8.
18. Cunninghem W. A non-linear differential-difference equation of growth // Proc. Nat. Acad. Sci. – USA, 1954. – V. 40 (8).
19. Feller W. On the integral equation of reneval theory // Annal of Mathemat. Statistics. – 1941. – V. 12. – № 3.
20. He Xiaoming, Ge Weigao. Solutions for semipositone (n,p) boundary value problems // Port. Math. – 2003. – V. 60. – № 3. – P. 253–262.
21. Moore R.E. Shen Zuhe interval methods for operator equations // Reability in computing. – New York: Academic Press, 1988. – P. 379–389.
22. Plum M. Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems // Computing. Springer-Verlag. – 1991.
23. Yang Xiaojing. Two-point boundary value problem of 2mth order differential equations // Appl. Math. and Comput. – 2003. – V. 138. – № 1. – P. 11–19.
24. Yao Qing-liu. On the positive solutions of Lidstone boundary value problems // Appl. Math. and Comput. – 2003. – V. 137. – № 2-3. – P. 477–485.
25. Zhang Fengqin, Ma Zhien, Yan Jurang. Boundary value problems for first order parametrize differential equations with piecewise constant arguments // Math. Inequal and Appl. – 2003. – V. 6. – № 3. – P. 469–476.