

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ПРОЕКТА ФИЛИМОНЕНКОВОЙ Н.В.

Основы современной теории полностью нелинейных уравнений второго порядка в частных производных были заложены в 80-е годы прошлого века в работах Н.М.Ивочкиной, Л.Каффарелли, Л.Ниренберга, Д.Спрука, Н.В.Крылова, М.В.Сафонова, Н.Трудингера, Л.Эванса и др.. Мое исследование сосредоточено на одном из типичных представителей таких уравнений, оно посвящено изучению задачи Дирихле для m -гессиановского уравнения. Класс m -гессиановских уравнений включает в себя при $m = 1$ уравнение Пуассона, при $m = n$ – уравнение Монжа – Ампера. Интерес к m -гессиановским уравнениям родился из попыток распространить теорию уравнений Монжа – Ампера, развитую А.Д.Александровым и А.В.Погореловым, на родственные задачи. Изучение m -гессиановских уравнений демонстрирует на более или менее простом примере основные закономерности, присущие теории полностью нелинейных уравнений. Важная особенность таких уравнений: в отличие от линейных, они не сохраняют тип (эллиптичность, параболичность, гиперболичность) на функциях из пространства C^2 . Поэтому вопрос о разрешимости обычно ставят в специальном конусе \mathbb{K} допустимых C^2 -гладких функций. Базой для изучения конусов \mathbb{K} является теория α -гиперболических многочленов, созданная Л.Гордингом в 1959 году и востребованная лишь в 80-х. Проведенное мною исследование было направлено на решение проблем классической и слабой разрешимости задачи Дирихле для m -гессиановских уравнений. В настоящее время под руководством проф. Н.М.Ивочкиной я подготовила к защите кандидатскую диссертацию на тему “Качественное исследование слабых решений m -гессиановских уравнений”.

Мое исследование выявило два наблюдения. Во-первых, стало ясно, что специфика нелинейной теории кроется в богатстве алгебраических и геометрических свойств конуса допустимости \mathbb{K} . Во-вторых, эта алгебро-геометрическая база недостаточно разработана в математической литературе и еще в меньшей степени доступна для широкого круга специалистов. На сегодняшний день, не существует публикаций, предоставляющих достаточное описание конусов \mathbb{K} : фрагментарные сведения разбросаны по разным статьям разных авторов, изложены в разной манере и доказаны только частично.

Первая задача данного проекта заключается в систематизации и популяризации этих сведений: необходимо собрать и связать воедино разрозненные факты об алгебро-геометрической структуре конусов \mathbb{K} и найти единый подход к их доказательству, отвечающий потребностям современной теории полностью нелинейных уравнений.

Вторая, более сложная, цель состоит в дальнейшем развитии и углублении алгебро-геометрической теории конусов \mathbb{K} . До сих пор, к сожалению, эта теория и ее математический аппарат остаются в стороне от мейнстрима алгебраических исследований, несмотря на естественность построения, удобство использования и потенциальные приложения в математической физике, экономике, биологии. В рамках второй задачи я собираюсь, в частности, а) исследовать понятие эллиптичности для полностью нелинейных уравнений в его связи с конусом допустимости и традиционными определениями эллиптичности в классе линейных и квазилинейных задач; б) на основе конусов допустимости для m -гессиановских уравнений разработать более полную классификацию симметричных матриц, чем традиционное деление на положительно и отрицательно определенные, и классификацию поверхностей по признаку m -выпуклости, а также исследовать двойственные конусы.

Задачи, предусмотренные проектом, имеют как вспомогательное значение для теории полностью нелинейных уравнений, так и самостоятельную ценность для развития абстрактной алгебры и геометрии.