

Краткое изложение заявки

А.Д. Баранов

Проект направлен на исследование теоретико-функциональных и геометрических свойств модельных подпространств класса Харди и пространств де Бранжа.

Модельное подпространство класса Харди H^2 (коинвариантное подпространство оператора сдвига) порождается внутренней функцией Θ и имеет вид $K_{\Theta}^2 = H^2 \ominus \Theta H^2$, согласно теоремам А. Берлинга и П.Д. Лакса. Особый интерес представляет случай мероморфной внутренней функции Θ – таким модельным подпространствам отвечают пространства целых функций де Бранжа. Модельные пространства K_{Θ}^2 и пространства де Бранжа играют исключительно важную роль в теории операторов и в теории функций: в вопросах интерполяции в пространствах аналитических функций, при построении функциональной модели Нады–Фойаша для операторов сжатия в гильбертовом пространстве, при исследовании спектральных задач для операторов Шредингера.

Ранее были проведены следующие исследования:

– **Весовые неравенства типа Бернштейна для модельных подпространств** (то есть оценки весовой нормы производной элемента K_{Θ}^p в терминах естественной L^p -нормы). Показано, что оператор дифференцирования ограничен как оператор из модельного пространства K_{Θ}^p в некоторое L^p -пространство с весом (в определенном смысле, оптимальным), зависящим от плотности спектра внутренней функции Θ . Как приложение весовых неравенств Бернштейна доказаны новые (и наиболее общие из известных в настоящее время) теоремы вложения карлесоновского типа.

– **Геометрические свойства семейств воспроизводящих ядер** (полнота, описание базисов Рисса и их устойчивость). Получены новые результаты об устойчивости полноты и базисности при "малых" возмущениях, доказаны теоремы об устойчивости базисов де Бранжа–Кларка, отвечающих вещественным частотам, получены критерии полноты семейства ядер в терминах верхних и нижних плотностей.

– **Теоремы типа Берлинга–Мальявена о допустимых мажорантах и структура подпространств в пространствах де Бранжа**. Для различных классов модельных подпространств получено описание функций, мажорирующих ненулевой элемент пространства K_{Θ}^2 . В серии совместных работ с Х. Ворачеком показано, что всякое подпространство де Бранжа порождено некоторым условием мажорирования, исследованы канонические "оггибающие" мажоранты.

Планируется продолжить исследования модельных пространств в следующих направлениях:

– **Усеченные операторы Теплица**. Усеченным оператором Теплица (УОТ) называют сужение классического оператора Теплица на модельное подпространство с последующим проектированием. Систематическое изучение УОТ было недавно начато в работах Д. Сарасона, однако многие естественные вопросы остаются для них открытыми. Недавно соискателем с соавторами был полностью решен вопрос о существовании ограниченного символа у УОТ, а также доказана гипотеза Сарасона о связи ограниченных УОТ и мер Карлесона для K_{Θ}^2 . Предполагается получить описание компактных УОТ (в терминах компактных вложений карлесоновского типа) и операторов конечного ранга. Также предполагается изучить возможность проверки ограниченности УОТ на воспроизводящих ядрах пространства K_{Θ}^2 (так называемый "Reproducing Kernel Thesis").

– **Конечномерные сингулярные возмущения неограниченных самосопряженных операторов и геометрические свойства систем воспроизводящих ядер**. Предполагается рассмотреть приложения теории модельных подпространств к спектральным задачам для сингулярных возмущений неограниченных самосопряженных операторов. Совместно с Д.В. Якубовичем соискателем построена модель таких возмущений как операторов умножения на независимую переменную в некотором весовом модельном пространстве. Собственные функции сопряженного возмущенного оператора образуют некоторую специальную систему воспроизводящих ядер модельного подпространства, а собственные функции возмущенного оператора будут биортогональной системой. Планируется применить теорию модельных подпространств (в частности результаты о полноте биортогональной системы) и получить критерии полноты и базисности семейства собственных функций возмущенного оператора. Также предполагается полностью исследовать явление "уничтожения спектра" при возмущениях ранга один.