

Возмущённые эллиптические и параболические уравнения: асимптотики и качественная структура решений

Борисов Денис Иванович

Заявка на участие в конкурсе фонда "Династия" для молодых математиков

Программа 2, подпрограмма 2.2

Аннотация

Основным содержанием настоящего проекта является изучение асимптотических свойств и структуры эллиптических и параболических уравнений с разнообразными возмущениями. Будут рассмотрены

- несимметричные локализованные возмущения периодических операторов в многомерных цилиндрах;
- квантовые волноводы с сингулярным возмущением границы;
- задачи в тонких областях;
- спектральная локализация для случайно искривлённых волноводы.
- нелинейные параболические уравнения в режимах, близких к обострению.

В первой части проекта рассматривается возмущение самосопряжённого периодического оператора в многомерном цилиндре. Возмущение описывается произвольным малым оператором, который в определённом смысле локализован и не предполагается симметричным. Локализованность заключается в том, что возмущающий оператор переводит достаточно быстро растущие функции в достаточно быстро убывающие. Планируется провести полное исследование спектра возмущённого оператора, изучить его структуру и выяснить его асимптотическое поведение. Аналогичные результаты предполагается получить для некоторых сингулярных несимметричных локализованных возмущений.

Во второй части будут исследованы модели квантовых волноводов с сингулярными возмущениями границы. Здесь берутся возмущения из теории усреднения: частое периодическое чередование краевых условий и быстро периодически осциллирующая граница. Будет исследована сходимости резольвенты, по возможности в равномерной операторной норме. Также будут построены асимптотические разложения соответствующих зонных функций и описано поведение зонного спектра возмущённых операторов.

Третья часть проекта посвящена изучению оператора Лапласа-Бельтрами на границе тонкой пластины. Планируется исследовать сходимости такого оператора в равномерной резольвентной норме при сжатии пластины в предельную область меньшей размерности, установить сходимости спектра, а также получить первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций.

В четвёртой части проекта рассматривается модель плоского квантового волновода с случайно слабо искривлённой границей. Искривления расположены периодически, но на каждой ячейке локальное искривление описывается своей случайной величиной. Полный набор случайных величин независим и одинаково распределён. Цель – доказательство оценок начальных масштабов на нижнем краю спектра, что является одним из ключевых пунктов при доказательстве спектральной локализации (локализации Андерсона) на нижнем краю спектра.

В последней части проекта будут исследованы задачи для нелинейных параболических уравнений в режимах, близких к обострению. Здесь планируется рассмотреть малые возмущения параболических задач, которые имеют решения, уходящие на бесконечность за конечное время. При этом возмущение выбирается так, что оно обеспечивает наличие глобальных решений у возмущённой задачи. Планируется построить асимптотические разложения глобальных решений возмущённых задач и описать тем самым процесс перерождения глобальных решений в неограниченные. Ожидается, что структура асимптотик будет существенно зависеть от структуры предельного неограниченного решения.