ПБВ-ВЫРОЖДЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИ: ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ И КОМБИНАТОРИКА

Евгений Фейгин

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая или аффинная алгебра Ли и G – соответствующая группа Ли. Наиболее интересный класс представлений $\mathfrak{g}$ составляют представления со старшим весом. Они тесно связаны с различными задачами алгебраической геометрии (например, с многообразиями флагов группы G), комбинаторики (таблицы Юнга и симметрические функции) и математической физики (теория Вемма-Зумино-Виттена). Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ – картановское разложение. Представление L_λ со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ характеризуются следующими свойствами: существует вектор $l_\lambda \in L_\lambda$, такой что

$$\mathfrak{n} l_\lambda = 0, \quad h l_\lambda = \lambda(h) l_\lambda \ \forall h \in \mathfrak{h}, \quad L_\lambda = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) l_\lambda.$$

Таким образом, всё пространство представления L_λ получается из старшего вектора применением универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$. Для общей алгебры $\mathfrak{g}$ универсальная обёртывающая алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$ довольно сложно устроена и не является абелевой. В то же время, на $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$ имеется естественная степенная фильтрация, такая что присоединённая градуированная алгебра изоморфна симметрической алгебре $S(\mathfrak{n}^-)$. Эта коммутативная алгебра может быть отождествлена с кольцом многочленов на пространстве $(\mathfrak{n}^-)^*$. Возникает естественный вопрос: можно ли продеформировать алгебру $\mathfrak{g}$ (группу G) таким образом, чтобы подалгебра $\mathfrak{n}^-$ (подгруппа N^-) стала коммутативной, и, соответственно, $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$ продеформировалась бы в $S(\mathfrak{n}^-)$? При этом естественное требование заключается в том, чтобы структурная теория, теория представлений, соответствующая алгебраическая геометрия и т.д. в деформированном случае имели бы не менее (и даже более) богатую структуру, чем в классическом случае. Оказывается, такая алгебра $\mathfrak{g}^a$ и группа G^a действительно существуют (см. [Fe3]). Мы называем $\mathfrak{g}^a$ и G^a ПБВ деформацией (деформацией Пуанкаре-Биркгоффа-Витта) $\mathfrak{g}$ и G соответственно. Основной целью нашего исследования является изучение структурных свойств $\mathfrak{g}^a$ и G^a, их представлений, многообразий флагов, связанной с ними комбинаторики и приложений в математической физике. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ некоторые результаты были получены в [FFoL1], [FFoL2], [Fe3]. Для аффинных алгебр некоторые результаты получены в работах [Fe1], [Fe2].

Список литературы

[Fe1] E. Feigin, *The PBW filtration*, Represent. Theory 13 (2009), 165-181.

[Fe2] E. Feigin, *The PBW filtration, Demazure modules and toroidal current algebras*, SIGMA, 4 (2008), 070, 21 p.

[Fe3] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, arXiv:1007.0646.

[FFoL1] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type* A_n, arXiv:1002.0674.

[FFoL2] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type* C_n, in preparation.