1. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ДЕЙСТВИЙ ТОРА: КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ЗАЯВКИ

Проект посвящен исследованиям по топологии, комплексной и симплектической геометрии пространств с действием тора. Данный проект будет реализован в рамках исследований по *торической топологии* — новой активно развивающейся области на стыке эквивариантной топологии, симплектической и алгебраической геометрии и комбинаторики.

Объектом исследования являются *момент-угол-многообразия*, а также связанные с ними классы многообразий с действием тора — *торические* и *квазиторические* многообразия.

Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_K$ представляют собой пространства с действием тора, параметризуемые конечными симплициальными комплексами K. Они являются одними из основных объектов исследования в торической топологии, а также приобретают всё больший интерес в теории гомотопий. Благодаря их комбинаторному происхождению, момент-угол-комплексы находят приложения в комбинаторной геометрии и коммутативной алгебре.

Конструкция момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ восходит к работе Дэвиса–Янушкевича по квазиторическим многообразиям; позднее $\mathcal{Z}_K$ был описан Бухштабером и Пановым как некоторый комплекс, построенный из полидисков и торов, а также как *дополнение конфигурации координатных подпространств* (с точностью до гомотопии). В случае, когда K — триангуляция сферы, $\mathcal{Z}_K$ является топологическим многообразием, называемым *момент-угол-многообразием*. Триангуляции, двойственные к простым многогранникам P, предоставляют важный класс триангуляций сфер; соответствующие момент-угол-многообразия являются гладкими и обозначаются $\mathcal{Z}_P$. Многообразия $\mathcal{Z}_P$, соответствующие *многогранникам Дельзанта*, тесно связаны с конструкцией *гамильтоновых торических многообразий* при помощи симплектической редукции: $\mathcal{Z}_P$ возникает как множество уровня отображения моментов и вкладывается в $\mathbb{C}^m$ как невырожденное пересечение вещественных квадрик. Топология пространств $\mathcal{Z}_K$ и многообразий $\mathcal{Z}_P$ достаточно сложна даже для малых K и P. Кольцо когомологий $\mathcal{Z}_K$ было описано Бухштабером и Пановым. Позднее разными авторами были описаны явные гладкие и гомотопические типы некоторых конкретных семейств $\mathcal{Z}_K$ и $\mathcal{Z}_P$.

С другой стороны, многообразия, получаемые как пересечения квадрик, возникали в голоморфной динамике как пространства листов голоморфных слоений в $\mathbb{C}^m$. Их изучение привело к открытию нового класса компактных некэлеровых комплексных многообразий в работах Лопеса де Медрано–Верховского и Мерсмана, ныне известных как *LVM-многообразия*. Как было обнаружено Босио и Мерсманом, гладкие многообразия, соответствующие широкому классу LVM-многообразий, представляют собой в точности момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$. Тем самым многообразия $\mathcal{Z}_P$ приобретают некэлеровы комплексные структуры, обобщающие известные семейства *многообразий Хопфа* и *Калаби–Экмана*.

Исследования будут сосредоточены на следующих аспектах момент-угол-многообразий.

[Топология] Продолжить изучение топологии момент-угол-многообразий и комплексов. Используя методы теории гомотопий (высшие произведения Уайтхеда), получить описание гомотопического и топологического типа $\mathcal{Z}_P$ для ряда важных серий многогранников; в частности, для многогранников, приводящих к *неформальным* многообразиям $\mathcal{Z}_P$.

[Комплексная геометрия] Изучить инварианты некэлеровых комплексных структур на момент-угол-многообразиях $\mathcal{Z}_K$, в частности в случае, когда K не происходит из многогранника. Описать мультипликативную структуру когомологий Дольбо $\mathcal{Z}_K$ и вычислить числа Ходжа. Изучить топологические следствия данного вычисления.

[Лагранжева геометрия] Пересечения вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$ были отправной точкой в конструкции А. Миронова минимальных и гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$. Так как те же пересечения квадрик приводят к момент-угол-многообразиям, наши результаты об их топологии открывают путь к построению минимальных лагранжевых подмногообразий с достаточно сложной топологией, а также к лучшему пониманию геометрии соответствующих лагранжевых вложений.

Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_K$ и связанные с ними торические пространства соединяют такие области, как комбинаторная геометрия, коммутативная и гомологическая алгебра и комплексная геометрия. Любое существенное продвижение в понимании топологии и геометрии $\mathcal{Z}_K$ сразу приведёт к обширным приложениям в этих областях.

Заявка Т. Е. Панова на конкурс фонда Дмитрия Зимина «Династия».