КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА “УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ РЕШЕТОК”

М. В. Семенова

Предлагаемый проект исследований относится к области универсальной алгебры и теории решеток, которые тесно связаны с теорией моделей и математической логикой и имеют приложения в алгебре, дискретной математике (теория формальных языков, теория графов), геометрии и теоретическом программировании. Родоначальниками универсальной алгебры по праву считаются академик Анатолий Иванович Мальцев и американский математик Гарретт Биркгоф.

Теория решеток дает удобный общий аппарат, применяемый в широком круге исследований в отмеченных выше областях математики. Одной из причин этого служит тот факт, что специфика строения, а также сложность любой алгебраической системы может быть удобным способом выражена и исследована при помощи различных *производных решеток.* Кроме использования теоретико-решеточных методов, нами будут также широко использоваться геометрические и алгебраические методы. Одним из центральных понятий, используемых нами, является понятие пространства замыкания, которое обобщает понятие топологического пространства.

Множество всех замкнутых подмножеств любого пространства замыкания образует полную решетку относительно включения. Такие решетки мы называем *решетками замыкания.* Решетки подсистем, решетки конгруэнций, решетки [квази]многообразий, решетки выпуклых подмножеств, а также многие другие производные решетки являются примерами решеток замыкания. Изучение свойств таких решеток служит объектом широкого круга исследований во многих областях алгебры, геометрии, дискретной математики. При изучении пространств замыканий могут возникнуть такие проблемы:

I. Для заданного класса $\mathcal{C}$ пространств замыкания описать класс решеток, изоморфных решеткам замыкания пространств из $\mathcal{C}$.

II. Описать класс [конечных] решеток, вложимых в решетки замыкания пространств из $\mathcal{C}$. Является ли этот класс аксиоматизируемым на языке первого порядка [в классе всех конечных решеток]? Является ли этот класс [квази]многообразием (то есть, может ли он быть задан [квази]тождествами)?

III. Описать пространства замыкания, для которых решетки замыкания удовлетворяют некоторому конкретному свойству.

В работах соискателя, а также в совместных работах Ф. Верунга и соискателя, А. Замойской-Дженио и соискателя, К. М. Скоробогатова и соискателя, К. Херрмана и соискателя изучались несколько конкретных классов пространств замыкания общего вида, а также комбинаторных и выпуклых геометрий. Среди них решетки подпорядков, решетки выпуклых подмножеств упорядоченных множеств, решетки выпуклых подмножеств векторных пространств, решетки подсистем, решетки подпространств. В частности, были получены ответы на ряд открытых вопросов.

Предлагаемый проект ставит целью исследование следующих вопросов:

(1) Строение решеток аксиоматизируемых классов;
(2) Строение решеток выпуклых подмножеств;
(3) Строение решеток подпространств;
(4) Разложения в полукольцах и приложения к теории формальных языков.