

Заявка на конкурс фонда "Династия"

Д. А. Шабанов. Краткое изложение

На конкурс выдвигается проект исследования по классическим проблемам комбинаторного анализа, теории графов и комбинаторной теории чисел. Перечислим некоторые основные направления исследования.

В 1961 г. П. Эрдеш и А. Хайнал поставили задачу об отыскании величины $m(n, r)$, равную минимально возможному количеству ребер в n -однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r . Напомним, что *гиперграфом* называется совокупность различных подмножеств, *ребер*, конечного множества (множества *вершин гиперграфа*). *Хроматическим числом* гиперграфа называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски (все ребра неодноразноцветны) множества вершин. Данная задача решена только для случая графов, когда $n = 2$. Найдено также еще несколько точных значений. В остальных случаях не получена даже асимптотика. Автором заявки были получены нижние оценки $m(n, r)$, которые улучшают ранее известные результаты в большой области значений параметров n и r . Проект предусматривает дальнейшее изучение проблемы и ее приложений к другим задачам.

Задача Эрдеша – Хайнала имеет большое число различных обобщений. Среди них выделим проблему Эрдеша и Л. Ловаса о нахождении величины $m^*(n, r)$, равную минимально возможному количеству ребер в n -однородном *простом* (любые два ребра имеют не более одной общей вершины) гиперграфе с хроматическим числом больше r . Данная задача также очень далека от полного решения. Автором заявки были получены, но пока не полностью опубликованы, новые асимптотические нижние оценки для $m^*(n, r)$.

Другое обобщение задачи Эрдеша – Хайнала связано с изучением максимальной степени вершины гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с большим хроматическим числом. Пусть H — гиперграф, тогда будем обозначать через $\Delta(H)$ максимальную степень вершины в гиперграфе H . По аналогии с задачей Эрдеша – Хайнала рассмотрим величину $\Delta(n, r)$, равную минимально возможному значению $\Delta(H)$, где H — n -однородный гиперграф с хроматическим числом больше r . Автором заявки получена нижняя оценка величины $\Delta(n, r)$, которая асимптотически улучшает все предыдущие результаты для случая трех цветов и более, $r > 2$.

Еще одно направление исследования — изучение гиперграфов с большими обхватом и хроматическим числом. Напомним, что *обхватом* гиперграфа называется длина минимального цикла в нем. Обозначим через $\Delta(n, r, s)$ минимально возможное значение $\Delta(H)$, где H — n -однородный гиперграф с хроматическим числом больше r и обхватом больше s . Задача о нахождении величины $\Delta(n, r, s)$ не решена полностью даже для случая графов ($n = 2$). Для случая гиперграфов ранее были известны верхние оценки $\Delta(n, r, s)$, а также были получены нетривиальные нижние оценки (т.е. не вытекающие из тривиального неравенства $\Delta(n, r, s) \geq \Delta(n, r, 1) = \Delta(n, r)$) для $\Delta(n, r, 2)$, для класса простых гиперграфов (обхват больше 2). Я получил усиление предыдущих нижних оценок $\Delta(n, r, 2)$, которое и асимптотически улучшает сами оценки, и расширяет область значений параметров, в которых эти оценки верны. Кроме того, мной впервые получена нетривиальная (т.е. не вытекающая из соотношения $\Delta(n, r, 3) \geq \Delta(n, r, 2)$) нижняя оценка для $\Delta(n, r, 3)$, т.е. для класса гиперграфов без 2- и 3-циклов.

Еще одна классическая проблема, изучение которой предполагается в исследовании, связана со знаменитой теоремой Ван дер Вардена об арифметических прогрессиях (1925 г.), которая утверждает, что для любых натуральных чисел n и r существует такое минимальное число $W(n, r)$, что если $N \geq W(n, r)$, то в любой r -цветной раскраске множества $\{1, 2, \dots, N\}$ найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n . Отыскание значений $W(n, r)$ (которую называют *функцией Ван дер Вардена*) — очень известная и популярная задача. Наилучшие на сегодняшний день асимптотические нижние оценки $W(n, r)$ получаются при помощи методов теории раскрасок гиперграфов. Автором заявки была получена новая асимптотическая нижняя оценка $W(n, r)$, которая улучшает предыдущие результаты в широкой области значений параметров n и r .

В заключение отметим, что вышеперечисленными проблемами не исчерпываются все направления исследования. В силу ограниченности формата заявки мне пришлось перечислить лишь наиболее известные и классические задачи, которыми предполагается заниматься.