Аннотация к циклу работ И. Г. Шевцовой «Уточнение структуры оценок точности нормальной аппроксимации при различных моментных условиях»

Как известно, точность нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин зависит от наличия у случайных слагаемых моментов достаточно высокого порядка (как правило, не меньшего двух), или, другими словами, тяжестью (или легкостью) их «хвостов». При этом большой интерес представляет ситуация, когда случайные слагаемые имеют моменты, порядок которых заключен между двумя и тремя: с одной стороны, для распределений, имеющих моменты порядка, большего трех, скорость сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ) остается в общем случае такой же, как для распределений с третьими моментами; с другой стороны, во многих прикладных задачах важно оценивать точность нормальной аппроксимации, когда центральная предельная теорема все еще выполняется, но слагаемые имеют распределения со столь тяжелыми хвостами, что третьего момента уже не существует. Такие задачи возникают, например, в страховании или при анализе трафика в телекоммуникационных системах, где применяются модели типа распределения Парето с хвостами, убывающими степенным образом.

Зависимость между скоростью сходимости в ЦПТ и тяжестью «хвостов» распределения слагаемых отчетливо выражена так называемым неравенством Берри–Эссеена–Каца–Петрова, устанавливающем равномерную оценку точности нормальной аппроксимации в терминах абсолютных моментов слагаемых соответствующего порядка (Э. Берри (1941) и К.-Г. Эссеен (1942) получили оценку для распределений с конечными третьими моментами, тогда как М. Кац (1963) и В. В. Петров (165) — для распределений с моментами произвольного порядка $2+\delta$ с $0 < \delta \leqslant 1$). При этом, как известно, для случая $\delta = 1$ неравенство Берри–Эссеена устанавливает правильную по порядку оценку, тогда как для случая $0 < \delta < 1$ Л. В. Осипов и В. В. Петров (1967) показали, что скорость сходимости для каждого *фиксированного* распределения слагаемых (не зависящего от числа слагаемых в сумме) на самом деле выше, нежели та, которую устанавливает неравенство Каца–Петрова, что ставит под сомнение целесообразность использования этого неравенства для оценивания точности нормальной аппроксимации.

Автору удалось в определенном смысле «реабилитировать» эти оценки, а именно, было показано, что неравенство Каца–Петрова устанавливает «правильный» порядок скорости сходимости в ЦПТ, понимаемый в *равномерном* смысле. Более того, автором впервые были найдены нетривиальные нижние оценки констант, входящих в неравенство Каца–Петрова. Для этого было проведено специальное исследование структуры оценок точности нормальной аппроксимации и предложена уточненная классификация асимптотических констант в неравенстве Берри–Эссеена–Каца–Петрова (в частности, введены понятия нижней и верхней асимптотически правильной постоянных). Для всех асимптотических постоянных были найдены двусторонние оценки и/или точные значения.

Кроме того, были построены новые оценки типа неравенства Берри–Эссеена–Каца–Петрова с уточненной структурой. При этом новые оценки оказываются всегда точнее классического неравенства Берри–Эссеена с наилучшими известными верхними оценками констант, в него входящих, несмотря на то, что для вычисления новых оценок требуется ровно та же априорная информация о распределении случайных слагаемых, что и для классического неравенства Берри–Эссеена (а именно, значение абсолютного момента порядка $2 + \delta$).

Новые оценки с уточненной структурой были применены для уточнения аналога неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, и впервые было продемонстрировано, что константа для пуассоновских сумм строго меньше, чем для классических. В качестве следствий последнего результата были уточнены оценки скорости сходимости обобщенных смешанных пуассоновских распределений.

В ближайшее время планируется обобщить результаты, связанные с асимптотически правильными константами, на пуассоновские и смешанные пуассоновские случайные суммы, в частности, найти нижнюю оценку для константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, для которой уже получены верхние. Затем планируется получить двусторонние оценки константы в неравенстве Берри–Эссеена и его структурных уточнениях для смешанных пуассоновских случайных сумм как одинаково, так и для разнораспределенных слагаемых, при различных моментных условиях ($0 < \delta \leqslant 1$).