

## Краткое изложение заявки М. А. Всемирнова

### Тема исследований: Гурвицевы и $(2,3)$ -порожденные группы и связанные проблемы.

Данная программа посвящена исследованиям гурвицевых и  $(2,3)$ -порожденных групп, а также некоторых их обобщений. Группа называется  $(2,3)$ -порожденной, если она порождается инволюцией и элементом порядка 3. Этот класс групп уже более столетия является предметом пристального изучения. Основной причиной, вызывающей интерес к ним, является тот факт, что фактор-группы классической модулярной группы  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  – это в точности  $(2,3)$ -порожденные группы вместе с тремя циклическими  $\{1\}$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

*Гурвицевы группы* образуют важный подкласс  $(2,3)$ -порожденных групп. Они могут быть охарактеризованы как конечные группы, порожденные инволюцией и элементом порядка 3, такими, что порядок их произведения равен 7. Проблема их описания восходит к работам Гурвица и Клейна. Изначально эти группы рассматривались в топологическом контексте как группы автоморфизмов тех компактных римановых поверхностей, для которых достигается оценка Гурвица верхняя оценка на размер группы автоморфизмов в зависимости от рода поверхности.

В предложенной программе исследований предполагается сосредоточиться на алгебраических свойствах гурвицевых и  $(2,3)$ -порожденных групп. Несмотря на свою долгую историю задача далека от своего решения. Однако недавние продвижения показывают, что программа реалистична, и можно рассчитывать на новые результаты. Выбор задачи обусловлен не только ее историческим значением, но и тем, что ее решение (и даже отдельные шаги на пути решения) могут иметь важные приложения к теории конечных простых групп, теории римановых поверхностей, теории представлений и комбинаторной теории групп.

Основная цель данного проекта состоит в определении гурвицевых простых и квази-простых групп. В настоящий момент ответ известен для спорадических групп, некоторых типов групп Ли и большинства серий классических групп больших рангов. Случай групп малых рангов (до нескольких сотен) принципиально более сложный. Ему и будет уделено основное внимание ходе работы над проектом. Также будет рассматриваться задача явного построения гурвицевых образующих.

Автору принадлежат несколько важных результатов в данной области. В частности, он получил окончательный ответ в задаче о  $(2,3)$ -порождении групп  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$  и  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ . Предложенный автором модифицированный метод построения гурвицевых образующих уже привел к нахождению новых 60 значений  $n$ , для которых все группы  $\mathrm{SL}_n(q)$  гурвицевы. Помимо этого автор нашел явные гурвицевы образующие для исключительных групп Ли типа  $G_2$ . В качестве контраста отметим другой результат, доказывающий, что ортогональные группы  $\Omega_7(q)$  не гурвицевы. Также автором доказана гипотеза Холта–Плескена о гурвицевых образующих групп  $\mathrm{PSL}_2(q)$ , удовлетворяющих дополнительному условию на их коммутатор.

Планируется продолжить эти и связанные с ними исследования. По итогам работы над проектом ожидаются, в частности, следующие первоочередные результаты:

- нахождение новых гурвицевых семейств среди классических групп над конечными полями; наибольший интерес представляют размерности меньше 250 для специальных линейных групп и меньше 400 для других классических серий;
- полное описание гурвицевых подгрупп и их образующих в  $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{F})$ ; в частности, это позволит завершить описание матричных гурвицевых групп в размерности  $\leq 7$ ;
- параметризация (с точностью до сопряженности) всех неприводимых гурвицевых линейных и проективных групп в размерности 8, 9, 10 и 11; идентификация соответствующих групп;
- построения явных гурвицевых образующих для других исключительных серий групп Ли.
- полное решение вопроса о  $(2,3)$ -порожденности групп  $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ ;
- обобщение гипотезы Холта–Плескена на  $(2,3,k)$ -порожденные группы и на случай, когда коммутатор заменяется произвольным словом в алфавите из образующих.

Также планируется исследовать возникающие смежные проблемы, включая связи с теорией представлений, теорией чисел и комбинаторной теорией групп.