

Модификации расслоений, характеристические классы и интегрируемые системы

А.В.Зотов

Основное внимание будет уделено классическим и квантовым интегрируемым теориям, обобщённым групповым симметриям, таким как квантовые группы и квадратичные ассоциативные алгебры, а также смежным областям и задачам, таким, например, как изомонодромные деформации и монополярные решения.

Ранее в ряде работ соискателя (в соавторстве с А.М.Левиным и М.А.Ольшанецким) было определено понятие Симплектического Соответствия Гекке (ССГ) как соответствия интегрируемых систем, связанных процедурой модификации расслоений. Эта процедура, в простейшем случае описывающее изменение степени расслоения на единицу, в общем случае связывает расслоения с различными характеристическими классами, такими как классы Штиффеля-Уитни для ортогональных групп. С точки зрения интегрируемых систем модификация связывает многочастичные системы (типа Калоджеро и спиновых обобщений) с многомерными интегрируемыми волчками (типа Эйлера-Арнольда). Другими словами модификация является сингулярным калибровочным преобразованием, осуществляющим каноническое преобразование с явной заменой переменных. В последних работах в общем случае (для произвольного характеристического класса) были построены интегрируемые системы, содержащие оба типа степеней свободы, получены явные выражения для операторов Лакса и новые динамические g -матрицы, дополняющие классификацию g -матриц Этингофа-Варченко.

В квантовом случае также будут получены новые динамические R -матрицы, удовлетворяющие квантовому динамическому уравнению Янга-Бакстера. Как известно, R -матрица является решением условия совместности для уравнений Книжника-Замолотчикова. Поэтому новые R -матрицы будут описывать и новый класс этих уравнений. До сих пор R -матрицы описывались аксиоматическим образом. В рамках общей идеологии теоретико-группового подхода предполагается вывод R -матриц из первых принципов, стартуя с некоторых топологических теорий, задаваемых геометрическим действием, отвечающим двухпетлевым алгебрам. Именно такое описание указывает на универсальный характер R -матриц, как естественных объектов в теории представлений и в интегрируемых моделях физики твёрдого тела. В изначальной топологической теории R -матрицы просты и легко перечислимы. Редукция к конечномерным системам позволит получить все разнообразие пуассоновых R -матричных структур.

В случае, когда структурная группа расслоения является группой петель, классические интегрируемые $0+1$ системы (типа Хитчина) переходят в $1+1$ теории поля, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния. Например, волчок Эйлера в петлевом случае переходит в непрерывный XYZ магнетик, описывающийся уравнением Ландау-Лифшица. Мы планируем описать класс интегрируемых $1+1$ теорий поля, обобщающий системы Годена (то есть многополюсные системы). Полученные системы должны включать в себя XYZ магнетик и модель главного кирального поля как частные случаи.

Также ранее нами исследовалась интерпретация процедуры модификации в терминах монополярных решений уравнения Богомольного. Ответ получен в скалярном случае и обобщает обычные эллиптические ряды Кронекера-Эйзенштейна. Для полученных рядов доказано обобщение функционального уравнения Римана. Таким образом, получена естественная деформация эллиптических функций на трехмерном пространстве. Я намерен продолжить исследование данной конструкции с целью получить $SU(N)$ монополярные решения. Такие решения интересны, так как граничные условия задаются интегрируемыми системами, связанными симплектическим соответствием Гекке, которые отвечают операторам t' Хофта в некоторой калибровочной теории. Роль оператора Гекке выполняет как раз вставка монополя. Это происходит в следствие того, что такая вставка изменяет значение характеристического класса расслоения, определяющего фазовое пространство интегрируемой системы.

Еще одна задача связана с понятием $p-q$ дуальности в интегрируемых системах. В частности, она подразумевает существование класса интегрируемых систем с эллиптической зависимостью от импульсов. Наиболее общий представитель семейства (с эллиптической зависимостью и от импульсов и от координат) называют двойной эллиптической системой. Пары Лакса для предполагаемых моделей неизвестны. Тем самым основная задача в этой области – найти их. Кроме того, гипотетические модели должны описываться двухпетлевыми пуассоновыми алгебрами (обобщениями алгебры Складина). Найти их описание – также очень важная и интересная задача.