

Краткое изложение заявки

Объект предлагаемого исследования — усредненная функция Дена.

Проведенные исследования

Определим основные понятия, кратко опишем актуальность проблемы и сформулируем основные полученные результаты.

Изопериметрические функции ограничивают сверху площадь слова в зависимости от его длины. Функция Дена — минимальная из всех изопериметрических.

С тех пор функция Дена — одно из базовых понятий в геометрической теории групп, поскольку является естественным инвариантом (характер роста функции Дена не зависит от представления группы).

В 90-х годах XX века в теории алгоритмов и теории сложности появилась тенденция оценивать сложность алгоритмов не в "худшем" случае, а в среднем. Этого веяния не избежала и функция Дена.

Усредненная функция Дена группы G показывает средний характер роста площадей слова при росте их длины. Впервые это определение появляется в статье М.Громова "Асимптотические инварианты бесконечных групп". В этой же статье без доказательства высказывается гипотеза Громова и задается вопрос, определивший основное направление исследований усредненной функции Дена математиками.

Гипотеза. Усредненная функция Дена свободных абелевых групп субквадратична.

Вопрос. Всегда ли усредненная функция Дена субассимптотична? (Т.е. усредненная функция Дена мала по сравнению с самой функцией Дена)

Приведем список результатов соискателя по данной тематике.

Кукина Е.Г. и Романьков В.А. в соавторстве доказали гипотезу Громова, сформулированную выше.

Кукина Е.Г. доказала, что для группы из двух элементов эквивалентна \sqrt{n} . Это первый пример вычисленной точно усредненной функции Дена (а не полученной на нее оценки).

Кроме того, в работе была предпринята попытка по-другому усреднить функцию Дена в соответствиями с идеями работ Боровика А.В., Мясникова А.Г., Ремесленникова В.Н., Шпильрайна В. "Меры и измеримые множества в бесконечных группах".

Если на свободном моноиде ввести вероятностную меру и усреднить функцию Дена в соответствии с этой вероятностной мерой, то (при небольших естественных ограничениях на распределение вероятности) получаем, что усредненная по вероятности функция Дена автоматных групп ограничена сверху и снизу положительными постоянными.

Проект будущих исследований

В планах доказать несколько теорем об усредненной функции Дена.

Теорема 1. Усредненная функция Дена группы G зависит от порождающих группы G .

В частности, при включении в множество порождающих единицы группы, усредненная функция Дена становится меньше.

Теорема 2. Усредненная функция Дена циклических групп субассимптотична в любом представлении.

Что дает положительный ответ на вопрос М.Громова для этих групп.

Теорема 3. Найдется последовательность свободных частично-коммутативных групп, усредненная функция Дена которых сколь угодно близка к тождественному нулю.