В.Ю. Протасов

Совместные спектральные характеристики линейных операторов

Краткое изложение заявки

Для данного конечного семейства линейных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ в $\mathbb{R}^d$ рассматривается задача: найти порядок роста произведений длины k операторов из $\mathcal{A}$. Если семейство состоит из одного оператора A, то есть только одно произведение длины k, и показатель роста его нормы $\rho = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$ – спектральный радиус A. Для семейства из нескольких операторов речь идет об усредненной, в том или ином смысле, норме всех m^k произведений длины k. Для L_p-среднего показатель роста называется *p-радиусом* $\rho_p(\mathcal{A})$; при $p = \infty$, когда для каждого k выбирается произведение максимальной нормы, показатель ρ_∞ в литературе называется *совместным спектральным радиусом.* Его антипод $\rho_{-\infty}$ (минимальная норма произведения) – это *нижний спектральный радиус.* Если на множестве $\mathcal{A}$ задана вероятностная мера, то в качестве усреднения берется математическое ожидание логарифма нормы произведений длины k. В этом случае показатель роста известен как *показатель Ляпунова.* В частности, для равномерного распределения получаем ρ_0. Все такие показатели мы будем называть *совместными спектральными характеристиками.* Первые из них появились в 1960 г. в работах Рота и Стрэнга (ρ_∞) и Фюрстенберга и Кестена (показатель Ляпунова). Совместные спектральные характеристики широко изучались в литературе и нашли огромное количество приложений, от функционального анализа и эргодической теории до комбинаторики и теории чисел.

Представляемый проект посвящен широкому кругу задач, которые условно можно разделить на две части: 1) применения совместных спектральных характеристик к задачам теории функций, теории операторов, теории всплесков (wavelets), комбинаторики, и т.д., 2) методы вычисления совместных спектральных характеристик.

Среди приложений большое внимание уделено функциональным уравнениям со сжатием аргумента. В 2008 автором были определены и исследованы *уравнения самоподобия* в пространствах вектор-функций $L_p[0,1]$ и $C[0,1]$. Частными случаями решений таких уравнений являются классические фрактальные кривые (Де Рама, Коха, и т.д.), всплески Добеши, масштабирующие функции, плотности распределения случайных степенных рядов, и т.д. Критерий существования и единственности решений формулируется в терминах p-радиуса специальных операторов. Гладкость решений также выражается в терминах совместных спектральных характеристик. Эти результаты позволили автору решить несколько открытых проблем теории всплесков и теории вероятностей. Я планирую обобщить их на функции многих переменных и применить их к исследованию многомерных всплесков и случайных степенных рядов.

Планируется разработать эффективные методы вычисления совместных спектральных характеристик, основанные на применении инвариантных норм в $\mathbb{R}^d$, существование которых для p-радусов в случае $p = \infty$ было доказано Барабановым, в случае $p < \infty$ – автором, и для показателей Ляпунова – автором в 2010 г. При этом предполагается применить результаты Бургейна, Линденштраусса и Мильмана о приближающих зонотопах, и современные алгоритмы решения выпуклых экстремальных задач. С помощью разработанных методов я надеюсь получить полные решения нескольких открытых проблем, которые сводятся к вычислению совместных спектральных характеристик матриц больших размерностей. Это – задачи о существовании общего инвариантного конуса (теория операторов), о показателе роста числа неперекрывающихся слов двоичного алфавита, о ёмкости двоичных кодов (дискретная математика) и об асимптотике бинарной функции разбиения Эйлера (теория чисел).