

Краткое изложение заявки по проекту А.А. Шлапунова "Задача Коши для эллиптических комплексов"

Хорошо известно, что задача Коши для эллиптических уравнений и систем является некорректной во всех стандартных функциональных пространствах. Тем не менее, она естественно возникает в приложениях: в гидродинамике (как задача Коши для голоморфных функций), в геофизике (как задача Коши для оператора Лапласа), в теории упругости (как задача Коши для системы Ламе), в электродинамике (как задача Коши для системы Максвелла) и т.д. Этим задачам посвящено громадное количество работ таких известных математиков, как Ж. Адамар, Т. Карлеман, М.М. Лаврентьев, В. Иванов, В. Кондратьев, П. Лакс, Г. Фикера, и других.

В конце XX столетия удалось понять, что задача Коши для эллиптических систем линейных уравнений эквивалентна другой некорректной задаче: об "аналитическом продолжении" с меньшего открытого множества на большее. Для переопределенных эллиптических систем этот подход, основанный на методе интегральных представлений, и разработанный при участии Л. Айзенберга, Н. Тарханова, А. Шлапунова и других, также оказался вполне продуктивным теоретически и практически: **были построены простые формулы** для точных и приближенных решений задачи.

Дифференциальные комплексы появляются как условия совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных (таких, например, как система Максвелла или многомерная система Коши-Римана). Одной из первых задач такого рода была, по-видимому, задача Коши для комплекса Дольбо (т.е. комплекса совместности для многомерного оператора Коши-Римана), рассмотренная в работах Андреотти и Хилла. Интерес к ней был велик, в частности, из-за известного примера Ханса Леви дифференциального уравнения без решений, построенного с использованием касательного оператора Коши-Римана. Недавно были найдены новые подходы к решению задачи Коши, чему свидетельство – посвященная ей серия работ таких известных специалистов, как Д. Хилл, Н. Тарханов, М. Начинович и других. В Красноярской школе комплексного анализа, благодаря работам А.М. Кытманова, С.Г. Мысливец, А. Шлапунова и его учеников, также наметились оригинальные подходы к решению этой задачи. Например, А. Шлапуновым в докторской диссертации описана интересная схема построения регуляризации задачи Коши для эллиптических комплексов, состоящих из операторов одного порядка, на основе итерационных методов.

Предлагается: 1) Применить упомянутый выше подход, сводящий задачу Коши к задаче "аналитического продолжения", **для изучения эллиптических комплексов**. К сожалению, препятствия на пути его реализации возникают уже для комплекса Дольбо, поскольку операторы, входящие в эллиптический комплекс, вообще говоря, не эллиптичны. Многие из этих препятствий исчезают при рассмотрении задачи Коши в пространствах Лебега. Это требует дополнительного **изучения граничного поведения распределений** конечного порядка сингулярности. 2) Получить законченные результаты о **регуляризации задачи Коши итерационным методом**, предложенным А. Шлапуновым в докторской диссертации. 3) Кроме того, громадное перспективное поле деятельности в рамках этого проекта – это **изучение нелинейной задачи Коши** (и не только для переопределенных систем, но даже и для скалярных эллиптических операторов), где, в основном, работают итерационные методы, притом при очень ограничительных предположениях.

Основной целью проекта является получение **условий разрешимости и формул Карлемана** для точных и приближенных решений некорректной задачи Коши для линейных и (в перспективе) для нелинейных эллиптических комплексов.