АЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТОВ И 14-Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

ИВАН В. АРЖАНЦЕВ

Летняя школа "Современная математика", Дубна, 19-25 июля 2007 года

Занятие 3. Инварианты действия тора

В этом разделе $\mathbb{K}$ – произвольное бесконечное поле. Рассмотрим группу $T^r = (\mathbb{K}^\times)^r := \{(t_1, \dots, t_r) : t_i \in \mathbb{K}^\times\}$ с операцией покомпонентного умножения. Эта группа называется r-мерным (алгебраическим) *тором.*

Для каждого набора $\chi = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ и каждого $t = (t_1, \dots, t_r) \in T^r$ определим $\chi(t) := t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_r^{a_r}$.

Лемма 1. *Равенство $\chi(t) = 1$ выполнено для любого $t \in T^r$ тогда и только тогда, когда $\chi = (0, \dots, 0)$.*

Доказательство. Ясно, что $t_1^0 t_2^0 \dots t_r^0 = 1$. Обратно, пусть, например, $a_1 \neq 0$. Тогда уравнение $t_1^{a_1} = 1$ имеет конечное число решений в $\mathbb{K}$ и, в силу бесконечности поля $\mathbb{K}$, существует $t_1 \in \mathbb{K}$ такое, что $t_1^{a_1} 1^{a_2} \dots 1^{a_r} \neq 1$. $\square$

Лемма 2. $\chi(t\tilde{t}) = \chi(t)\chi(\tilde{t})$.

Доказательство. Если $t = (t_1, \dots, t_r)$, $\tilde{t} = (\tilde{t_1}, \dots, \tilde{t_r})$, то

$$\chi(t\tilde{t}) = \chi((t_1\tilde{t_1}, \dots, t_r\tilde{t_r})) = (t_1\tilde{t_1})^{a_1} \dots (t_r\tilde{t_r})^{a_r} = t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r} \tilde{t_1}^{a_1} \dots \tilde{t_r}^{a_r} = \chi(t)\chi(\tilde{t}).$$

$\square$

Зафиксируем $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathbb{Z}^r$ и рассмотрим действие группы T^r линейными преобразованиями переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$(*) \qquad x_1 \to \chi_1(t)x_1, \quad x_2 \to \chi_2(t)x_2, \quad \dots, \quad x_n \to \chi_n(t)x_n, \qquad t \in T^r.$$

Цель этого занятия – описать алгебру инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^{T^r}$ такого действия.

Для $\chi = (a_1, \dots, a_r)$ и $\hat{\chi} = (\hat{a_1}, \dots, \hat{a_r})$ определим $\chi + \hat{\chi} := (a_1 + \hat{a_1}, \dots, a_r + \hat{a_r})$. Заметим, что

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \to \chi_1(t)^{i_1} \dots \chi_n(t)^{i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = (i_1\chi_1 + \dots + i_n\chi_n)(t) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Отсюда следует, что одночлен $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ является T^r-инвариантом тогда и только тогда, когда $i_1\chi_1 + \dots + i_n\chi_n = (0, \dots, 0)$, и $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^{T^r}$ есть линейная оболочка таких одночленов.

Определение 1. Подмножество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *рациональным полиэдральным конусом*, если найдутся вектора $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ с рациональными коэффициентами такие, что

$$C = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Теорема Вейля. Подмножество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ является рациональным полиэдральным конусом тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n \leq 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ b_{m1}x_1 + \cdots + b_{mn}x_n \leq 0, \end{cases}$$

где b_{ij} – рациональные числа.

Вернемся к инвариантным одночленам. Рассмотрим линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $\phi(y_1, \ldots, y_n) = y_1\chi_1 + \cdots + y_n\chi_n$. Условие $\phi(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)$ определяет подпространство в $\mathbb{R}^n$, а условия $y_1 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0$ – рациональный полиэдральный конус C в этом подпространстве (или в $\mathbb{R}^n$). Одночлен $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ является T^r-инвариантным тогда и только тогда, когда $(i_1, \ldots, i_n)$ – точка в конусе C с целыми координатами. Заметим, что если точки $(i_1, \ldots, i_n)$ и $(j_1, \ldots, j_n)$ лежат в конусе C, то и точка $(i_1+j_1, \ldots, i_n+j_n)$, отвечающая произведению соответствующих одночленов, также лежит в C. Тем самым множество точек $C(\mathbb{Z})$ конуса C с целыми координатами образует *полугруппу*, т.е. замкнуто относительно сложения. Такая полугруппа называется *конечно порожденной*, если найдется конечное число элементов $\mu_1, \ldots, \mu_k \in C(\mathbb{Z})$, складывая которые (возможно, с повторениями) можно получить любую точку из $C(\mathbb{Z})$.

Лемма Гордана. Для произвольного рационального полиэдрального конуса C в $\mathbb{R}^n$ полугруппа $C(\mathbb{Z})$ конечно порождена.

Доказательство. Пусть $C = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Координаты векторов $v_1, \ldots, v_N$ можно считать целыми. Определим множество

$$C(\mathbb{Z})_+ := C(\mathbb{Z}) \cap \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_N v_N : 0 \leq \lambda_i < 1\}.$$

Длина $|v|$ любого вектора v из этого множества не превосходит $(N \max_i(|v_i|))$, откуда следует, что множество $C(\mathbb{Z})_+$ конечно. С другой стороны, отнимая от любого вектора $v \in C(\mathbb{Z})$ некоторые из v_i, можно получить элемент множества $C(\mathbb{Z})_+$. Это показывает, что полугруппа $C(\mathbb{Z})$ порождается $v_1, \ldots, v_N$ и элементами множества $C(\mathbb{Z})_+$. □

Тем самым нами доказана

Теорема 1. *Алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^{T^r}$ конечно порождена.*

Пример 1. Рассмотрим линейные преобразования

$$x_1 \to t_1t_2x_1, \ x_2 \to t_1t_2^{-1}x_2, \ x_3 \to t_2x_3, \ x_4 \to t_1^{-3}t_2^{-1}x_4.$$

Отображение ϕ здесь принимает вид

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \to y_1(1,1)+y_2(1,-1)+y_3(0,1)+y_4(-3,-1) = (y_1+y_2-3y_4, y_1-y_2+y_3-y_4).$$

Мы получаем систему уравнений $y_1+y_2-3y_4 = 0, y_1-y_2+y_3-y_4 = 0$, равносильную $y_1 = 3y_4 - y_2, y_3 = 2(y_2 - y_4)$, и систему неравенств $y_2 \geq 0, y_4 \geq 0, y_2 - y_4 \geq 0, 3y_4 - y_2 \geq 0$. Здесь $v_1 = (2,1,0,1), v_2 = (0,3,4,1)$ и $C(\mathbb{Z})_+ = \{(1,2,2,1)\}$, откуда следует, что алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]^{T^2}$ порождается одночленами $x_1^2x_2x_4, \ x_1x_2^2x_3^2x_4, \ x_2^3x_3^4x_4$.

Теорема 2. *Пусть $A \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ – конечнопорожденная подалгебра такая, что*

$$F(\chi_1(t)x_1, \dots, \chi_n(t)x_n) \in A \quad \textit{для любых } t \in T^r \textit{ и } F(x_1, \dots, x_n) \in A.$$

Тогда алгебра инвариантов A^{T^r} конечно порождена.

Доказательство. Шаг 1. Покажем, что в A можно выбрать систему порождающих $b_1, \dots, b_s$ такую, что

$$b_i(\chi_1(t)x_1, \dots, \chi_n(t)x_n) = \mu_i(t)b_i(x_1, \dots, x_n)$$

для некоторых $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{Z}^r$. Пусть $a_1, \dots, a_k$ – конечная система порождающих алгебры A. Тогда $a_1 = a_{1\tau_1} + \dots + a_{l\tau_l}$, где $\tau_j \in \mathbb{Z}^r$ и $a_{j\tau_j}$ – сумма членов a_1, которые под действием любого $t \in T^r$ умножаются на $\tau_j(t)$. Рассмотрим элемент $t' := (2, 3, \dots, p_r) \in T^r$, где $2, 3, \dots, p_r$ – первые r простых чисел. Тогда

$$\tau_1(t')a_1 - (\tau_1(t')a_{1\tau_1} + \dots + \tau_l(t')a_{l\tau_l}) = (\tau_1(t') - \tau_2(t'))a_{2\tau_2} + \dots + (\tau_1(t') - \tau_l(t'))a_{l\tau_l} \in A.$$

Продолжая это процесс, мы покажем, что $a_{l\tau_l} \in A$. Значит, вместе с каждым элементом $a_i \in A$ все его компоненты $a_{i\tau_j}$ также содержатся в A. Это доказывает, что набор порождающих $a_1, \dots, a_k$ можно заменить на набор $\{a_{i\tau_j}\}$, удовлетворяющий требуемым условиям.

Шаг 2. Пусть $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_s]$ – алгебра многочленов, на которой тор T^r действует как $y_i \to \mu_i(t)y_i$. Имеется сюръективный гомоморфизм $\psi : \mathbb{K}[y_1, \dots, y_s] \to A$, заданный условиями $\psi(y_i) = b_i$. Тогда каждый инвариантный одночлен от $b_1, \dots, b_s$ в A является образом инвариантного одночлена от $y_1, \dots, y_s$. Значит, ограничение ψ на алгебры инвариантов $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_s]^{T^r} \to A^{T^r}$ также сюръективно. По теореме 1, алгебра $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_s]^{T^r}$ допускает конечную систему порождающих. Образы элементов этой системы порождают A^{T^r}. $\square$

В заключение отметим важную открытую проблему, связанную с действиями торов. *Проблема линеаризации* состоит в доказательстве (или опровержении) следующего факта: каждое (эффективное) алгебраическое действие комплексного тора T^r на пространстве $\mathbb{C}^n$ может быть приведено к виду (*) подходящей обратимой (но не обязательно линейной) заменой системы координат. Известно, что проблема решается положительно при $r \geq n - 1$. Отсюда следует ее положительное решение при $n \leq 2$. В 90-х годах XX века проблема линеаризации была положительно решена при $n = 3$, однако она до сих пор открыта уже при $n = 4, r = 1$.

Приведем переформулировку проблемы линеаризации в терминах градуированных алгебр. Пусть $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x]$ – алгебра многочленов от n переменных и

$$A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^r} A_u$$

– разложение алгебры A в прямую сумму подпространств, индексированных элементами решетки $\mathbb{Z}^r$ такое, что если $f \in A_u$ и $h \in A_v$, то $fh \in A_{u+v}$ для любых $u, v \in \mathbb{Z}^r$. Такое разложение называют *$\mathbb{Z}^r$-градуировкой* на алгебре A, а элементы подпространств A_u называют *однородными* элементами. Проблема линеаризации может быть переформулирована так: верно ли, что для любой $\mathbb{Z}^r$-градуировки на алгебре многочленов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ эта алгебра может быть порождена n однородными элементами ?