Группы Кокстера и правильные многогранники

Евгений Смирнов

Дубна, 19–28 июля 2008 г.

Лекция 1

1.1 Введение

Основной целью нашего курса является описание всех правильных многогранников в $\mathbb{R}^n$ при произвольном n. В $\mathbb{R}^2$ для всякого $m \geq 3$ существует ровно один (с точностью до композиции движения и гомотетии) правильный m-угольник. В $\mathbb{R}^3$ правильных многогранников пять: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

Задача классификации правильных многогранников в $\mathbb{R}^n$ была решена швейцарским геометром Людвигом Шлефли в 1852 году (эта его работа [2] была опубликована существенно позже, уже после смерти Шлефли, в 1901 году). Доказательство Шлефли также можно прочесть в главе VII книги Кокстера [1].

Мы получим ту же классификацию иными методами. Мы будем изучать не только сами многогранники, но и их группы симметрий. Оказывается, что группы симметрий правильных многогранников обладают замечательным свойством: они *порождаются отражениями*. А все конечные группы, порождённые отражениями, можно описать явно — а после этого выяснить, какие из них являются группами симметрий правильных многогранников. Кроме того, группы, порождённые отражениями, и параметризующие их объекты, *графы Кокстера* (а также их ближайшие родственники, *схемы Дынкина*), представляют самостоятельный интерес, так как они возникают во многих очень важных алгебраических задачах: классификации полупростых алгебр Ли, описании представлений колчанов и т.д.

1.2 Правильные многогранники в размерностях 2 и 3

Пусть E — аффинное пространство, ассоциированное с евклидовым векторным пространством V с положительно определённым скалярным произведением $(\ ,\ )\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\operatorname{Sym} E$ группу движений пространства E.

Определение 1.1. Пусть M — какое-либо множество в E. Через $\operatorname{Sym} M$ обозначим множество движений E, переводящих M в себя (очевидным образом, оно образует группу):

$$\operatorname{Sym} M = \{f \in \operatorname{Sym} E \mid f(M) = M\}.$$

Через $\operatorname{Sym}^+ M$ будем обозначать *группу вращений* M — т.е. группу симметрий M, сохраняющих ориентацию пространства:

$$\operatorname{Sym}^+ M = \{f \in \operatorname{Sym} M \mid \det(df) = 1\}.$$

(через df обозначена линейная часть отображения f; это ортогональное преобразование векторного пространства V).

Если M — достаточно хорошее множество, например, многогранник (конечный и ограниченный, других многогранников мы не рассматриваем), то группа $\operatorname{Sym} M$ будет сохранять центр масс M — следовательно, мы можем рассматривать её как подгруппу в группе ортогональных преобразований $O(V)$ пространства V (поместив центр масс в начало координат пространства V).

Кроме того, симметрия многогранника переводит вершины в вершины. Значит, имеется вложение группы $\operatorname{Sym} M$ в группу перестановок вершин M, т.е. в симметрическую группу[1]:

$$\operatorname{Sym} M \hookrightarrow \operatorname{Sym}(\operatorname{Vert}(M)).$$

Следовательно, $\operatorname{Sym} M$ — конечная группа.

Пример 1.2. Пусть D_m — правильный m-угольник в $\mathbb{R}^2$. Тогда группа $\operatorname{Sym} D_m$ (её называют *группой диэдра*) состоит из $2m$ элементов, m из которых (обозначим их $r_1, \ldots, r_m$) являются поворотами на углы $2\pi i/m$, где $0 < i \leq m$ (они же и образуют подгруппу $\operatorname{Sym}^+ M$; при этом $r_m = Id$), а другие m суть симметрии $s_1, \ldots, s_m$ относительно прямых, соединяющих вершины m-угольника и середины его сторон с его центром.

$\operatorname{Sym} D_m$ можно породить как группу двумя преобразованиями: например,

$$\operatorname{Sym} D_m = \langle r_1, s_1 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle.$$

Замечание. $\operatorname{Sym} M$ можно породить двумя отражениями. Это нам пригодится в дальнейшем.

Упражнение 1.3. Опишите классы сопряжённости в группе диэдра (рассмотрите отдельно случай чётного и нечётного m).

Кстати, нетрудно выяснить, чему равна композиция двух отражений на плоскости:

Упражнение 1.4. Пусть s_1 и s_2 — отражения, оставляющие на месте прямые ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Покажите, что $s_2 s_1$ есть поворот на угол 2θ, где θ — угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

Замечание. Отсюда следует, что отражения s_1 и s_2 порождают конечную группу тогда и только тогда, когда угол θ (в обозначениях предыдущего упражнения) соизмерим с π.

Описание групп симметрий правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$ мы оставляем читателю:

Задача 1.5. Опишите группы вращений и симметрий тетраэдра, куба и додекаэдра (последние две совпадают с соответствующими группами для октаэдра и икосаэдра).

Указание. В куб можно вписать два тетраэдра, а в додекаэдр — пять кубов (они называются кубами Кеплера).

[1] Разумеется, мы молчаливо предполагаем, что M не содержится ни в каком собственном подпространстве.

Те, кто справились с этой задачей, уже, наверное, сами готовы дать определение правильного многогранника.

Определение 1.6. Пусть M — многогранник в $\mathbb{R}^n$, и $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}$ — множества его 0-мерных граней (вершин), 1-мерных граней (рёбер), …, граней размерности $n-1$ (гиперграней). Последовательность граней $(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1})$, где $F_i \in \mathcal{F}_i$, называется *флагом*, если $F_i \subset F_{i+1}$ при всех i от 0 до $n-1$.

Многогранник M называется *правильным*, если действие $\operatorname{Sym} M$ на флагах транзитивно — т.е. любой флаг можно перевести в любой другой.

Группы отражений: основные определения и первые примеры

Здесь и далее V — n-мерное евклидово векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Возьмём какой-нибудь вектор $\alpha \in V$. Ортогональная ему гиперплоскость задаётся условием

$$H_\alpha = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) = 0\}.$$

Определение 1.7. *Отражением* относительно гиперплоскости H_α называется преобразование $s_\alpha \in \mathrm{O}(V)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$;
- s_α поточечно оставляет на месте «зеркало» H_α: $s_\alpha(\beta) = \beta$ для всех $\beta \in H_\alpha$.

Упражнение 1.8. (Очень важное!) Преобразование s_α задаётся следующей формулой:

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Определение 1.9. Конечная подгруппа $W \subset \mathrm{O}(V)$ называется *группой отражений*, если существуют такие отражения $s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_r}$, что

$$W = \langle s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_r} \rangle.$$

Замечание. Конечно, правильнее было бы называть W *группой, порождённой отражениями*, так как она, разумеется, состоит не только из отражений. Но «группа отражений» короче, так что мы позволим себе эту вольность речи.

Один пример группы отражений мы уже видели в прошлом разделе — это группа диэдра.

Задача 1.10. Убедитесь, что группы симметрий правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$ тоже являются группами отражений; какого минимального количества отражений достаточно, чтобы породить каждую из них?

В завершение этой лекции мы приведём три важных серии примеров групп отражений в пространствах произвольной размерности. У этих групп даже имеются собственные названия: A_n, B_n и D_n.

Пример 1.11. (A_{n-1}, $n \geq 2$). Рассмотрим *симметрическую группу* S_n, действующую на $V = \mathbb{R}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ перестановками базисных векторов. Заметим, что транспозиция (i, j) действует как отражение, переводящее вектор $e_i - e_j$ в противоположный и оставляющее на месте ортогональную ему гиперплоскость (состоящую изо всех векторов, у которых равны i-я и j-я координаты). Поскольку S_n порождена транспозициями, она является группой отражений (заметим, что она даже порождается $n-1$ транспозицией вида $(i, i+1)$).

Упражнение 1.12. Убедитесь, что при таком действии S_n на V все отражения соответствуют транспозициям в S_n.

Действие S_n на V можно «уменьшить», рассмотрев в V гиперплоскость $\tilde{V} = \langle e_1 + e_2 + \cdots + e_n \rangle^{\perp}$. Поскольку вектор $e_1 + e_2 \cdots + e_n$ инвариантен относительно S_n, группа S_n действует и на $\tilde{V}$. У этого действия уже нет ненулевых инвариантных векторов; действие, обладающее данным свойством, называется *эффективным.*

Пример 1.13. (B_n, $n \geq 2$). Пусть снова $V = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим группу $W = S_n \rtimes (\mathbb{Z}_2)^n$, действующую на V следующим образом. S_n, как и в предыдущем примере, действует перестановками координат; кроме того, мы разрешаем менять у всех координат знаки; эти смены знаков образуют группу $(\mathbb{Z}_2)^n$. Эти две группы пересекаются тривиально, и $(\mathbb{Z}_2)^n$ есть нормальная подгруппа в их произведении (т.к. если оператор смены знака сопрячь при помощи какой-либо перестановки координат, получится другой оператор смена знака). Ясно, что смены знаков соответствуют отражениям s_{e_i}. Нетрудно проверить, что это действие эффективно.

Пример 1.14. (D_n, $n \geq 4$). Эта группа будет подгруппой индекса 2 в только что описанной группе B_n: а именно, разрешим переставлять координаты при помощи S_n и менять знак у *чётного* количества координат. Получим группу, порождённую отражениями относительно $e_i - e_j$ и $e_i + e_j$, где $i \neq j$. Это действие тоже будет эффективным (проверьте это!).

Упражнение 1.15. Докажите, что $A_3 = D_3$.

Упражнение 1.16. (продолжение задачи 1.10). Какие из трёх групп, описанных в задаче 1.10, принадлежат сериям A_n, B_n или D_n? Чему равны соответствующие n?

Литература

[1] H.S.M.Coxeter. *Regular polytopes.* Dover Publications, NY, 1973

[2] L. Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuatät.* Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, 38 (1901), 1–237.