Группы Кокстера и правильные многогранники

Евгений Смирнов

Дубна, 19–28 июля 2008 г.

Возьмём это самое слово «А-пять».
Зачем мы его произносим,
Когда мы могли бы спокойно сказать:
«Е-шесть», и «Е-семь», и «Е-восемь»?
(Винни-Пух, из неизданного)

Лекция 3

3.1 Дополнение к предыдущей лекции

Определение 3.1. *Группа Кокстера* есть (абстрактная) группа, заданная образующими $s_1, \ldots, s_n$ и соотношениями $s_i^2 = Id$, $(s_i s_j)^{n_{ij}} = Id$, где $n_{ij} \in \{2, 3, 4, \ldots, \infty\}$. ($n_{ij} = \infty$ означает, что между образующими s_i и s_j нет соотношения).

Группу Кокстера можно задать графически при помощи *графа Кокстера.* Это граф с n вершинами, в котором проведены рёбра, некоторые из которых снабжены числовыми отметками, по следующему правилу:

- i-я и j-я вершины не соединены ребром, если $n_{ij} = 2$ (т.е. s_i и s_j коммутируют);
- i-я и j-я вершины соединены простым ребром, если $n_{ij} = 3$;
- иначе i-я и j-я вершины соединены ребром, снабжённым отметкой $n_{ij} > 3$.

Ясно, что задание такого графа равносильно заданию набора чисел n_{ij}, то есть полному описанию группы Кокстера.

Можно (и не очень трудно) показать, что всякая группа отражений W, соответствующая системе корней Φ, является группой Кокстера, причём в качестве образующих $s_1, \ldots, s_n$ можно взять отражения s_{α_i} относительно простых корней $\alpha_i \in \Delta \subset \Phi$. (Доказательство этого факта можно посмотреть, например, в [2] или [3]).

При этом наличие отметки m на ребре графа Кокстера, соединяющем i-ю и j-ю вершины, означает, что угол между простыми корнями α_i и α_j, равен $\pi - \pi/m$. То есть граф Кокстера описывает всю геометрию системы простых корней.

Целью лекции 3 будет ответ на следующий вопрос, который допускает формулировку в чисто геометрических терминах:

Вопрос. *Для каких графов Кокстера соответствующая группа Кокстера может быть реализована как конечная группа отражений? Иначе говоря, при каких условиях на отметки n_{ij} существует система из n векторов с попарными углами $\pi - \pi/n_{ij}$?*

Ответ на этот вопрос даст нам полную классификацию конечных групп отражений.

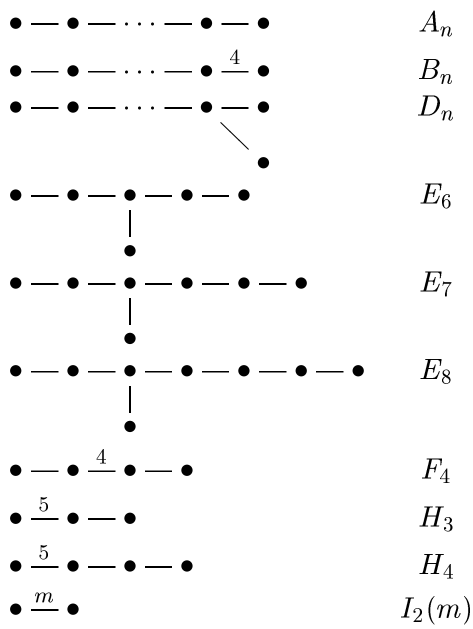
3.2 Классификация конечных групп отражений: формулировка результата

Для удобства введём следующее техническое

Определение 3.2. Граф Кокстера с n вершинами называется *допустимым*, если существует система из n векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в $\mathbb{R}^n$, попарные углы между которыми равняются $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}$.

Ответ на интересующий нас вопрос формулируется следующим образом:

Теорема 3.3. *Граф Кокстера является допустимым тогда и только тогда, когда каждая из его компонент связности принадлежит следующему списку:*



Упражнение 3.4. Докажите, что определённые в предыдущих лекциях группы типов A_n, B_n и D_n действительно соответствуют одноимённым графам Кокстера из этой таблицы, а группа самосовмещений m-угольника на плоскости соответствует графу $I_2(m)$.

3.3 Доказательство теоремы 3.3: инструментарий

Нетрудно видеть, что можно ограничиться рассмотрением связных графов Кокстера: если граф несвязен, то соответствующая группа отражений (если она существует) распадается в прямое произведение нескольких подгрупп отражений, каждая из которых соответствует связной компоненте графа Кокстера (соответственно, система корней распадается в несколько ортогональных подсистем). Группы отражений и их системы корней, соответствующие связным графам Кокстера, будем называть *неразложимыми*. Поэтому достаточно описать все связные допустимые графы Кокстера.

Общая стратегия нашего доказательства будет такова: мы выясним, каких подграфов не может быть в допустимом графе. В итоге мы придём к тому, что все графы, не содержащие этих запрещённых подграфов, суть в точности графы из теоремы 3.3.

Для заданного графа Кокстера Γ будем искать описанную в определении 3.2 систему, состоящую из единичных векторов. Нам известна матрица Грама

$$G(\Gamma) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = ((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \le i,j \le n}$$

этой системы: на её диагонали стоят единицы, а вне диагонали – неположительные числа $\cos(\pi - \pi/n_{ij}) = -\cos(\pi/n_{ij})$. Если два вектора β и γ разложены по базису из $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$: $\beta = \sum b_i \alpha_i, \qquad \gamma = \sum c_i \alpha_i$, то их скалярное произведение равно

$$(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} (G(\Gamma)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама системы векторов в пространстве, а также все её главные миноры, должны быть положительно определены. Это даёт нам весьма сильные ограничения на значения n_{ij} (т. е. на граф Кокстера), которые позволяют нам исключить некоторые графы. Для их исключения мы будем пользоваться тремя основными инструментами.

Положительная определённость матрицы Грама: если $\det G(\Gamma) \le 0$, то Γ недопустим.

Неравенство Коши–Буняковского: для любых двух не пропорциональных друг другу векторов λ, μ

$$(\lambda, \mu)^2 < (\lambda, \lambda)(\mu, \mu).$$

Теорема Пифагора: пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ — ортонормированная система векторов (не обязательно базис). Тогда для произвольного вектора λ

$$(\lambda, \lambda) \ge \sum_{i=1}^{k} (\lambda, \varepsilon_i)^2,$$

причём неравенство является строгим тогда и только тогда, когда $\lambda \in \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle$.

3.4 Доказательство теоремы 3.3: необходимость

В этом разделе мы в десять шагов исключим некоторые недопустимые графы Кокстера. В результате останутся только те, которые перечислены в теореме 3.3. Тем самым будет доказана необходимость.

Шаг 1. Пусть Γ — допустимый граф Кокстера, и граф Γ′ получается из Γ удалением некоторых вершин и всех примыкающих к ним рёбер. Тогда Γ′ допустим.

Это очевидно из геометрических соображений.

Шаг 2. Допустимый граф Кокстера не содержит циклов.

Доказательство. Рассмотрим вектор $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ и найдём его скалярный квадрат:

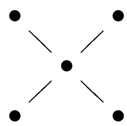
$$(\alpha, \alpha) = (\sum \alpha_i, \sum \alpha_i) = n - 2\sum_{i<j} \cos(\pi/n_{ij}) \geq n - \sum_{\text{по всем рёбрам}} 1 > 0.$$

Следовательно, число рёбер не превосходит $n - 1$. □

Шаг 3. Допустимый граф Кокстера не может содержать: **а)** вершину степени 4; **б)** вершину степени 3, из которой исходит ребро с отметкой ≥ 4; **в)** вершину, из которой исходят два ребра с отметками ≥ 4.

Доказательство. В силу шага 1 достаточно проверить, что ни один из этих трёх графов не является допустимым. Действительно, пусть исходный граф Γ содержит подграф, описанный в условиях а)–в). Удалим все вершины, кроме входящих в этот подграф, и все исходящие из них рёбра. Полученный граф либо содержит цикл (следовательно, недопустим в силу шага 2), либо имеет вид, описанный в условии.

а) Докажем, что граф



(возможно, с отметками на рёбрах) не является допустимым (в силу шага 1 это даст нам требуемое). Обозначим векторы, соответствующие центральной и крайним вершинам, через α и $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ соответственно. Последние четыре вектора образуют ортонормированную систему, а α не принадлежит их линейной оболочке. Значит,

$$1 = (\alpha, \alpha) > \sum_{i=1}^{4} (\alpha, \alpha_i) \geq \sum_{i=1}^{4} (1/2)^2 = 1.$$

Противоречие.

Упражнение 3.5. Разберитесь самостоятельно с пунктами б) и в).

□

Шаг 4 (Стягивание цепочки рёбер). Если в допустимом графе Γ имеется цепочка вершин, соединённых между собой простыми рёбрами, причём никакие вершины, кроме первой и последней, более ни с чем не соединены, то эту цепочку можно «стянуть», заменив одной вершиной и оставив все остальные рёбра и вершины без изменений. Полученный в результате граф $\tilde{\Gamma}$ также будет допустимым:

Доказательство. Предъявим для графа $\tilde{\Gamma}$ набор векторов с заданными скалярными произведениями. Этот набор получается из набора для Γ при помощи замены векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, соответствующих вершинам, которые образуют цепочку, на их сумму $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Действительно,

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{1 \le i \le k} (\alpha_i, \alpha_i) - 2 \sum_{1 \le i \le k-1} (\alpha_i, \alpha_{i+1}) = k - (k-1) = 1,$$

а для всякого вектора β, соответствующего вершине не из цепочки,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta) \text{ либо } (\alpha, \beta) = (\alpha_k, \beta),$$

что и требовалось. □

Шаг 5. *Особенностью* графа будем называть либо вершину степени выше 2, либо кратное ребро (т.е. ребро с отметкой ≥ 4). Утверждается, что допустимый граф содержит не более одной особенности.

Доказательство. Это следует из предыдущих двух шагов: если особенностей более одной, то рассмотрим цепочку, соединяющую две ближайшие особенности, и стянем её; полученный граф будет недопустимым в силу шага 3. □

Дальнейшие четыре шага посвящены исключению некоторых подграфов с кратным ребром.

Шаг 6. Граф $\bullet - \bullet \overset{m}{-} \bullet - \bullet$ не является допустимым при $m \geq 5$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть вершинам соответствуют векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, занумерованные слева направо. Тогда рассмотрим векторы $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\gamma = 2\alpha_3 + \alpha_4$. Легко убедиться, что $(\beta, \beta) = (\gamma, \gamma) = 3$, а $(\beta, \gamma) = -4\cos \pi/m$. Но $\cos(\pi/m) \geq \cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Запишем неравенство Коши–Буняковского:

$$9 = 3 \cdot 3 = (\beta, \beta)(\gamma, \gamma) > (\beta, \gamma)^2 \geq (1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5} > 9.$$

Противоречие. □

Шаг 7. Граф $\bullet - \bullet \overset{4}{-} \bullet - \bullet - \bullet$ не является допустимым.

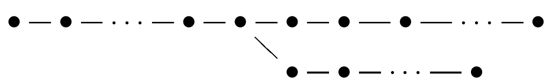
Шаг 8. Граф $\bullet \overset{5}{-} \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ не является допустимым.

Шаг 9. Граф $\bullet \overset{m}{-} \bullet - \bullet$ не является допустимым при $m \geq 6$.

Упражнение 3.6. Умело пользуясь инструментарием из предыдущего параграфа, докажите эти три утверждения.

Мы получили, что если граф содержит кратное ребро, то он является одним из следующих: A_n, B_n, F_4, H_3, H_4, $I_2(m)$.

Теперь разберём случай, когда в графе Кокстера есть вершина степени 3.



Шаг 10. Граф Кокстера с вершиной степени 3, состоящий из трёх щупалец, длины которых равны p, q и r соответственно, является допустимым только тогда, когда на длины щупалец выполнено соотношение

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1. \tag{$*$}$$

Задача 3.7. Докажите это.

Указание. Пусть $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$, $(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_q)$, $(\alpha''_1,\ldots,\alpha''_r)$ — вершины, образующие щупальца и занумерованные от краёв к центру, так, что $\alpha_p=\alpha'_q=\alpha''_r$. Рассмотрите ортогональные векторы $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(p-1)\alpha_{p-1}$, $\alpha'_1+2\alpha'_2+\cdots+(q-1)\alpha'_{q-1}$ и $\alpha''_1+2\alpha''_2+\cdots+(r-1)\alpha''_{r-1}$. Вектор $\alpha_p=\alpha'_q=\alpha''_r$ не лежит в их линейной оболочке. Теперь воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Уравнение $(*)$ имеет не так уж и много решений в целых числах: (p,q,r) может быть равно $(2,2,r)$ при произвольном $r\geq 2$, а также $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ и $(2,3,5)$. Первая серия решений даёт нам графы Кокстера типа D_n, а последние три — графы E_6, E_7 и E_8.

3.5 Доказательство теоремы 3.3: достаточность

Последнее, что от нас требуется — это выписать системы корней и простых корней для всех допустимых графов Кокстера. Этим мы сейчас и займёмся.

Системы корней, соответствующие сериям A_n, B_n, D_n и $I_2(m)$, мы уже видели. Осталось разобраться с исключительными системами. Выпишем системы корней явно для F_4 и E_8, а такое описание для H_3 и H_4 оставим в качестве задачи. Через $e_1,\ldots,e_n$ мы обозначим ортонормированный базис в пространстве V.

$$F_4:\quad \alpha_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2-e_3);\quad \alpha_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3-e_4);\quad \alpha_3=e_4;\quad \alpha_4=\tfrac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4);$$

$$\Phi=\left\{\pm e_i,\tfrac{1}{2}(\pm e_1+\pm e_2+\pm e_3+\pm e_4),\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\pm e_i\pm e_j\right\}.$$

$$E_8:\quad \alpha_1=\tfrac{1}{2}(e_1-e_2-\cdots-e_7+e_8),\quad \alpha_2=e_1+e_2,$$

$$\alpha_3=e_2-e_1,\quad \alpha_4=e_3-e_2,\quad \alpha_5=e_4-e_3,$$

$$\alpha_6=e_5-e_4,\quad \alpha_7=e_6-e_5,\quad \alpha_8=e_7-e_6,$$

$$\Phi=\{\pm e_i\pm e_j\}\cup\{\tfrac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm\cdots\pm e_7\pm e_8)\}_{\text{число минусов чётно}}.$$

Системы корней E_6 и E_7 получаются в результате пересечения системы корней E_8 с подпространствами $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_6\rangle$ и $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_7\rangle$ соответственно.

Задача 3.8. Выпишите эти системы (и соответствующие системы простых корней) явно в ортогональных базисах $e_1,\ldots,e_6$ и $e_1,\ldots,e_7$

Задача 3.9. Выпишите системы корней и системы простых корней, соответствующие графам Кокстера H_3 и H_4, или подсмотрите ответ в какой-нибудь умной книжке (например, [1]) и проверьте его самостоятельно.

Это даёт нам полную классификацию конечных групп, порождённых отражениями.

Литература

[1] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли, главы IV-VI.

[2] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1991

[3] О. В. Шварцман. *Группы отражений и группы Кокстера*, Математическое Просвещение, третья серия, вып. 7 (2003), с. 64–82.