Теоремы Минковского о параллелоэдрах

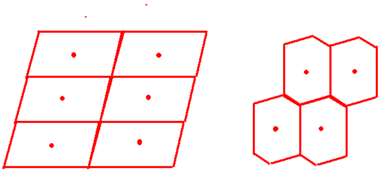
Николай Долбилин

Математический институт им.В.А.Стеклова РАН

Июль 28, 2009, Дубна

Параллелоэдры

- Параллелоэдр (размерности d) - это выпуклый евклидов многогранник, который допускает разбиение пространства $\mathbb{E}^d$ параллельными копиями



- Применение
  $d = 3$: кристаллография, фундаментальная ячейка кристалла
  Произвольная размерность d: Геометрия чисел (упаковки и покрытия пространства шарами), комбинаторная геометрия (хроматическое число пространства), теория кодирования,...

Примеры параллелоэдров

- Плоскость (2-мерные параллелоэдры = параллелогоны):
  (1) параллелограмм и (2) ц.-с. шестиугольник
- Пространство $d = 3$:
  параллелепипед, ц.-с. шестиугольная призма ...
- Произвольная размерность:
  - параллелепипед
  - если P^k и Q^m - параллелоэдры, то прямая сумма
    $$P^k \oplus Q^m$$
    также $(k+m)$-параллелоэдр
  - перестановочный многогранник (пермютоэдр)

Классификация параллелоэдров $d = 2$

Theorem

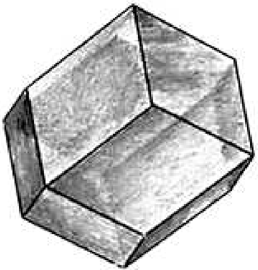
На плоскости имеется 2 (комбинаторных) типа (двумерных) параллелоэдров (параллелогонов)
параллелограмм и ц.-с. шестиугольник

- Proof
  - параллелогон центрально симметричный многоугольник
  - неравенство для углов $3\pi(n-2) = 3\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 2\pi n \Rightarrow n \leq 6$

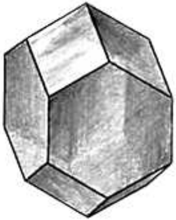
Классификация параллелоэдров $d = 3$

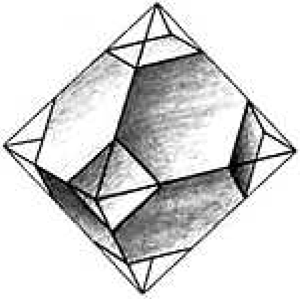
Theorem (Федоров, 1885)

В 3-пространстве имеется 5 типов:
параллелепипед,
ц.с. шестиугольная призма,
ромбододекаэдр,
вытянутый додекаэдр
усеченный октаэдр (= 3-мерный пермютоэдр)



Классификация параллелоэдров $d = 3$





Классификация параллелоэдров $d = 3, 4, 5, \ldots$

- Федоров предполагал центральную симметричность 3-параллелоэдра очевидной;
  Чтобы доказать "очевидное", Минковский открыл и доказал теорему о выпуклых многогранниках
- $d = 4$ 52 типа параллелоэдров (3 примитивных + 49 непримитивныъ)
- $d = 5$ тысячи типов (222 примитивных + тысячи непримитивных)
- $d = 6$ 108 тысяч (тысячи примитивных + десятки тысяч)

Примитивные параллелоэдры

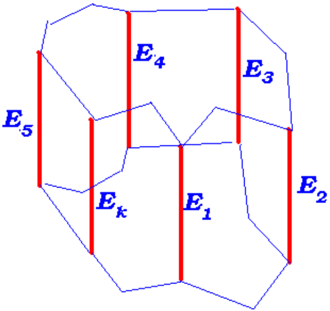
- d-параллелоэдр называется *примитивным*, если в каждой вершине разбиения сходится $d+1$ (минимально возможное число) параллелоэдр
- Иначе параллелоэдр *непримитивный*
- Каждый примитивный параллелоэдр - простой многогранник
- Обратное не верно
  - $d=2$ 1 примитивный и 1 непримитивный
  - $d=3$ 1 примитивный (14 граней) и 4 непримтивных
  - $d=4$ 3 + 49
  - $d=5$ 222 (Рышков и Барановский) примитивных + тысячи непримитивных (Энгел)
  - $d=6$ Тысячи примитивных Hundreds thousand non-primitive

Качественная теория (Минковский, Вороной, Венков)

Theorem (Минковский Г., 1897)

Пусть P – параллелоэдр, тогда
(1) P - центрально симметричный
(2) все гиперграни (грани размерности $d-1$) параллелоэдра центрально симметричны
(3) все пояски (зоны) состоят из 4 или 6 гиперграней.

Конструкция пояска (зоны)



- Каждая гипергрань проектируется в отрезок
- Поясок проектируется в многоугольник
- Условие (3) эквивалентно тому, что проекция P вдоль гиперграни на дополнение есть либо параллелограмм, либо ц. с. шестиугольник

Ёж многогранника

- Доказательство основано на другой, фундаментальной теореме Минковского
- Пусть P - многогранник с k гипергранями. Совокупность векторов
$$\{\mathbf{F}_1 \dots, \mathbf{F}_k\}$$
с общим началом, таких что $\mathbf{F}_i$ перпендикулярен i-й гиперграни F_i, направлен во внешнюю сторону многогранника и по модулю равен площади грани F_i, назовем *ежом* $\mathcal{F}(P)$
- **Лемма.** Еж $\mathcal{F}(P)$ выпуклого конечного многогранника P удовлетворяет двум условиям:
(1) $\operatorname{lin}(\mathcal{F}(P)) = \mathbb{R}^d$,
т.е. $\mathcal{F}(P)$ не лежит ни в какой гиперплоскости
(2) $\sum \mathbf{F}_i = 0$.

Теорема Минковского о многогранниках

- Теорема Минковского о многогранниках утверждает, что верно и обратное

Theorem (Минковский, 1897)

Пусть множество векторов $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1 \ldots, \mathbf{F}_k\}$ удовлетворяет условиям:
(1) $lin(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^d$
(2) $\sum \mathbf{F}_i = 0$.
Тогда существует выпуклый многогранник P, для которого $\mathcal{F}$ есть его еж.
Более того, многогогранник P определяется ежом однозначно с точностью до параллельного переноса

Следствия из теоремы Минковского о многогранниках

- Пусть еж многогранника обладает симметрией s:
$$s(\mathcal{F}(P)) = \mathcal{F}(P),$$
 тогда многогранник P обладает сопряженной симметрией
$$t^{-1} \circ s \circ t(P) = P,$$
 где t – трансляция, переносящая барицентр O' многогранника P в начало O ежа $\mathcal{F}(P)$
(в силу единственности многогранника с данным ежом)
- Если гиперграни многогранника P попарно параллельны и имеют равные площади, то P -центрально симметричен
($\mathcal{F}(P)$ центрально симметричен)
- Параллелоэдр P имеет все гиперграни попарно параллельные и равные $\Rightarrow \mathcal{F}(P)$ - ц. с. $\Rightarrow$ P - центрально симметричен (пункт (1) теоремы

Теорема Минк. о параллелоэдрах (идея док-ва)

- Гиперграни - центрально симметричны
  - Пусть гипергрань $F = P \cap P'$
  - P и P' параллельны друг другу и каждый ц.с.$\Rightarrow$ $\exists$ симметрия σ т.ч. $\sigma(P) = P'$ и $\sigma(P') = P \Rightarrow$

$$\sigma(F) = \sigma(P \cap P') = \sigma(P) \cap \sigma(P') = P' \cap P = F$$

- Пояски состоят из 6 или 4 гиперграней
  - Благодаря центральной симметричности гиперграней пояски существуют
  - Для каждой $(d-2)$-грани проекция на 2-дополнение P и всех ячеек $P_1 \ldots$, смежных с P по гиперграням пояска, состоит из попарно неперекрывающихся многоугольников M, $M_1, \ldots$
  - Многоугольники M, M_1, ... - центрально симметричны и попарно равны и параллельны друг другу
  - Следовательно, проекция – либо параллелограмм, либо 6-угольник.

Число гиперграней

Theorem

(Минковский, 1897) Число f_{d-1} гиперграней в d-параллелоэдре не превосходит

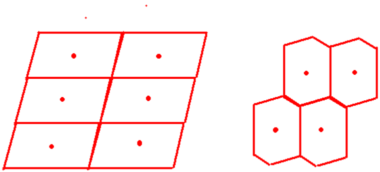
$$f_{d-1} = 2(2^d - 1) \qquad (1)$$

Оценка (1) неулучшаема.

- Для любой размерности d существуют параллелоэдры (например, пермютоэдр) с $f_{d-1} = 2(2^d - 1)$
- Для любого d-параллелоэдра верно $2d \leq f_{d-1} \leq 2(2^d - 1)$
- Оценка (1) немедленно следует из теоремы об индексе (Н.Д.)

Стандартная грань

- Дано разбиение T на параллелоэдры.
- Грань $F^k \subset P \in T$ назовем *стандартной*, если существует $P' \in T$, такой что $P \cap P' = F^k$.
- Иначе грань назовем *нестандартной*



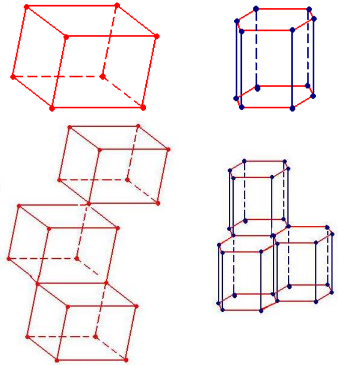
- Каждая гипергрань является стандартной гранью
- Грань стандартна т. и т.т., когда она симметрична относительно центра симметрии разбиения T

Примеры стандартных и нестандартных граней

- В разбиении на параллелепипеды все грани стандартны
- В разбиении на шестиугольные призмы

  Стандартные грани- все 2-грани и 12 горизонтальных ребер

  Нестандартные – вертикальные ребра и все вершины



Индекс грани

- Если грань F принадлежит n параллелоэдрам разбиения, то говорят, что *степень* грани равна $deg(F) = n$
- $\nu(F) = \frac{1}{deg(F)}$ назовем *индексом* грани F
- Для любой гиперграни F^{d-1} очевидно:
$$\nu(F^{d-1}) = \frac{1}{2}$$
- Для любой грани F^{d-2}:
$$\nu(F^{d-2}) = \frac{1}{3} \text{ или } \frac{1}{4}$$
- В примитивном параллелоэдре для вершины
$$\nu(F^0) = \frac{1}{d+1}$$

Теорема об индексе для параллелоэдров

Theorem

Для каждого d-параллелоэдра P имеет место

$$\sum_{\text{станд грани}\subset P} \nu(F) = 2^d - 1 \tag{1}$$

- Из (1) вытекает немедленно оценка Минковского

$$f_{d-1} \leq 2(2^d - 1) \tag{2}$$

Теорема об индексе и оценка Минковского

- {Станд. грани}= {Гиперграни}$\cup$ {станд. i-грани, $i < d-1$}
- (1)$\Rightarrow 2^d - 1 = \sum_{\{\text{гиперграни}\}} \nu(F) + \sum_{\{\text{станд.} F^i, i<d-1\}} \nu(F^i) = \sum_{\{\text{гиперграни}\}} \frac{1}{2} + \sum_{\{\text{станд.} F^i, i<d-1\}} \nu(F^i) = \frac{1}{2} f_{d-1} + \ldots \Rightarrow$
- $f_{d-1} = 2(2^d - 1) - 2\sum_{\{\text{станд.} F^i, i<d-1\}} \nu(F^i) \Rightarrow f_{d-1} \leq 2(2^d - 1)$
- Оценка достигается т. и т.т. когда в у параллелоэдра нет стандартных граней размерностей $< d-1$

Критерий Минковского-Венкова

- 3 условия Минковского не только необходимы, но и достаточны

Theorem (Б.А.Венков 1954)

Если выпуклый многогранник P удовлетворяет условиям Минковского, т.е.
(1) P - центрально симметричный
(2) все гиперграни (грани размерности $d-1$) центрально симметричны
(3) все пояски (зоны) состоят из 4 или 6 гиперграней,
то P - параллелоэдр.

- P. McMullen (1981); Теорема о продолжении - Н.Д., 2000, Н.Д. и В.С.Макаров, 2003.

Применения теоремы Венкова

- *Ненормальный* параллелоэдр - многогранник, который допускает разбиение пространства не обязательно "грань-в-грань" способом
- Н.Д. (2003) Ненормальный параллелоэдр обязательно допускает также "грань-в-грань" разбиение, то есть является обычным параллелоэдром
- Сначала доказывается: Ненормальный параллелоэдр удовлетворяет условиям (1),(2),(3)
- Затем применяется теорема Венкова
- Для любого d d-пермютоэдр является параллелоэдром

Гипотеза и теорема Вороного

- Область Вороного точки в целочисленной решетке называется *параллелоэдром Вороного*
- Не каждый параллелоэдр является параллелоэдром Вороного
  item **Гипотеза Вороного** *Любой параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного*

Theorem (Вороной, 1908)

Любой примитивный параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому Вороному

Гипотеза Вороного и некоторые результаты

Theorem (Житомирский, 1937)

Любой параллелеоэдр, примитивный лишь во всех $(d-2)$-гранях (все пояски состоят из 6 гиперграней), аффинно эквивалентен некоторому Вороному

Theorem (Эрдал, 1993?)

Параллелоэдр, являющийся суммой Минковского некоторого числа отрезков, аффинно эквивалентен некоторому Вороному

- Гипотеза Вороного остается открытой