В. И. АРНОЛЬД

Что такое математика?

МЦНМО, 2002

УДК 51(07)
ББК 22.1
А84

Арнольд В. И.

А84 Что такое математика?— М.: МЦНМО, 2002.— 104 с.
ISBN 5-94057-090-9

ББК 22.1

В. И. Арнольд. Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и университет Париж—Дофин. Автор благодарен РФФИ за частичную финансовую поддержку во время написания брошюры (грант 02-01-00655).

Владимир Игоревич Арнольд
ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 27.12.2002 г. Формат $60 \times 90/16$. Печать офсетная. Объем 6,5 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-090-9

Вопрос о тоц, является ли математика «перечислением следствий из произвольных аксиом» или же ветвью естествознания и теоретической физики, много обсуждался уже со времен Гильберта (придерживавшегося, вслед за Декартом и предвосхищая Бурбаки, первого мнения) и Пуанкаре (основателя современной математики, топологии и теории хаоса и динамических систем).

Я буду говорить в основном о содержательных примерах, показывающих кардинальные различия точек зрения аксиомофилов и естествоиспытателей уже на столь фундаментальные понятия, как производные и пределы, теоремы существования и единственности, оптимизация и теория управления, как неразрешимость одних проблем и измерение сложности других.

Исходным пунктом для меня послужила дискуссия между Я. Б. Зельдовичем и Л. С. Понтрягиным о преподавании математики и сообщение лунного баллистика М. Л. Лидова о невозможности плавного причаливания корабля к пристани — с одной стороны, а с другой — ошибки в книгах Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» и И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и Э. Э. Шноля «Функции и графики».

Считая, что ошибки составляют не менее важную часть математики, чем доказательства, я надеюсь рассказать также о причинах невозможности обойтись при геометрических построениях одной линейкой без циркуля, о малоизвестных взаимоотношениях Лобачевского и Евклида с постулатом о параллельных, о связи теоремы Абеля (о неразрешимости общего уравнения пятой степени в радикалах) с топологией римановых поверхностей и с его же теорией интегрирования в элементарных функциях, а также о математических открытиях Плутарха и А. Д. Сахарова.

В 1949 г. математику в СССР хотели уничтожить, вероятно, вследствие распространения мнения (Г. Харди, идеи которого впоследствии развил Ю. Манин, и других «математиков»), будто основным достоинством математики является ее «полная бесполезность». Огорчительно, конечно, что с этим снобистским мнением еще приходится бороться и сегодня, но я надеюсь ему, по мере сил, противостоять (см. ниже § 2 о мракобесии в математике).

§ 1. Математика и физика

Слово «математика» означает «точное знание». Варварские народы, не склонные к таковому, не имели и соответствующего слова в языке, поэтому сейчас почти во всех языках используется непонятный греческий термин. Исключение составляет лишь голландский язык, где Стевин уже в XVII в. боролся с засорением терминологии иноязычными «сайтами» и «файлами», «баксами» и «киллерами», и настаивал на переводе всех терминов словами родного языка, так что их термин — «вискунде», «знание», приближает уже для детей математику к реальному миру.

Когда Я. Б. Зельдович, замечательный физик-теоретик и один из основателей российской ядерной мощи, выпустил в свет свою «*Высшую математику для начинающих физиков и техников*», она вызвала страшный гнев тогдашнего цензора математической литературы, академика-математика Л. С. Понтрягина.

Он справедливо указал, что Зельдович определял в своей книге производную функции как «*величину* отношения приращения функции к приращению аргумента, в предположении, что последнее мало».

Математик был возмущен полным исключением здесь понятий теории пределов, а тем самым и значительной части логического обоснования математического анализа, достигшего совершенства лишь к концу девятнадцатого века, с созданием последовательной теории математического континуума действительных чисел.

Зельдович ответил так: интересует нас всегда именно отношение *конечных* приращений, а вовсе не какой-то абстрактно-математический предел.

Делать приращение аргумента — скажем, координаты точки или момента времени — меньшим, чем, скажем, 10^{-10} или 10^{-30} (при разумных единицах измерения), — это «явное превышение точности модели, так как *структура физического пространства* (*или времени*) *на столь малых интервалах уже вовсе не соответствует математической модели теории вещественных чисел* (*вследствие квантовых феноменов*)».

«Дело,— продолжал Зельдович,— просто в том, что находить интересующие нас отношения конечных приращений трудно, поэтому и придуманы приближенные *асимптотические формулы* для них. Эти-то приближенные формулы математики и называют своими пределами и математическими производными. В любом реальном применении теории следует учитывать, меньше чего не следует делать приращения, чтобы результаты теории соответствовали эксперименту».

Длительная дискуссия закончилась тем, что Понтрягин написал свой учебник начал анализа. Он указал уже во введении к нему, что *некоторые физики считают возможным изучать и применять анализ, не восходя до его полного логического обоснования, и что «автор настоящего учебника... с ними согласен».*

Прочитав эти строки, Зельдович сказал мне: «В таких случаях *цитируют*, с указанием *имени*, а так это — прямо *плагиат*!»

Эта дискуссия о математической строгости оснований науки вспомнилась мне, когда мой близкий друг, занимавшийся рассчитыванием траекторий спутников и космических кораблей, М. Л. Лидов, стал спорить со мной по поводу моего курса теории дифференциальных уравнений (он читал в МГУ в это же время лекции о спутниковой баллистике, и мы нередко обсуждали с ним то и другое, особенно потому, что я тогда тоже много занимался небесной механикой),

«Как и все математики,— сказал мне Миша,— ты учишь студентов теореме единственности, согласно которой *интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений не пересекаются.* Но это утверждение (хотя вы его и доказываете безукоризненно правильно) совершенно неверно. Например, уравнение $dx/dt = -x$ имеет решения $x = 0$ и $x = e^{-t}$. Интегральные кривые — графики этих двух решений — любой компьютер прекрасно нарисует, и ты увидишь, что они совершенно явно пересекаются.

Ибо, например, при $t = 10$ между этими двумя интегральными кривыми не просунешь и атома. Так что *теорема единственности — это математическая фикция, имеющая мало отношения к реальному миру».*

После этого собеседник объяснил мне, что именно из-за описанного эффекта при каждом причаливании корабля к пристани в последний момент матрос бросает на пристань чалку, которую там быстро наматывают на кнехт (часто это делает, спрыгнув на пристань, тот же матрос), после чего *заключительная часть причаливания происходит вручную*, путем вытягивания чалки.

Объясняется все это так. Автоматическое причаливание, в соответствии с общими принципами теории управления, основано на *обратной связи*: наблюдая оставшееся до причала расстояние x, управление выбирают так, чтобы скорость причаливания плавно уменьшать до нуля (как функцию от x). Естественно, эта функция — гладкая, т. е. при малых расстояниях x скорость будет убывать с x приблизительно линейно.

По обсуждавшейся выше теореме единственности, *время причаливания будет бесконечным при любом таком механизме гладкой обратной связи*. Чтобы причалить за *конечное* время, нужно либо отказаться от принципа регулирования (с гладкой обратной связью), заменив управление скоростью корабля работой матроса с чалкой, либо согласиться на *удар* корабля о причал в заключительной стадии причаливания (для чего и обвешивают край пристани отслужившими автомобильными покрышками).

То, что все это никогда не обсуждается математиками ни в курсах теории динамических систем и дифференциальных уравнений, ни в теории управления и оптимизации, — это, конечно, прискорбное последствие длительного отрыва математиков от реального мира, от физики и техники, в своеобразную башню из слоновой кости аксиоматической науки.

М. Л. Лидов понял все рассказанное не в рамках аксиоматизированной науки (которую он прекрасно знал), а потому, что занимался расчетом посадки космических кораблей на Луну, где встречается та же проблема, что и с кораблями у пристани. Из-за работающей здесь против нас теоремы единственности космические станции, спускаемые на Луну или планеты, снабжены демпфирующими треногами с суставами, и некоторое время они должны при посадке попрыгать на этих треногах, пока непогашенная энергия не будет диссипирована в процессе изгибания колен ног треноги.

Не ограничиваясь одной критикой, приведу еще пример огромной пользы четкого математического подхода к реальности из другой работы Лидова.

Луна движется вокруг Земли по орбите, почти находящейся в плоскости эклиптики (т. е. в плоскости орбиты Земли вокруг Солнца). Знаменитая «*теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы*» говорит, что если наклонение орбиты Луны к плоскости эклиптики невелико, то, несмотря на возмущающее влияние Солнца, лунная орбита будет лишь слегка колебаться (отчего и происходят затмения), но не будет меняться систематически (падать на Землю или уходить от нее).

Лидов поставил себе вопрос, что было бы, если бы первоначальная орбита Луны была *сильно наклонена* к плоскости эклиптики — скажем, образуя с ней угол в 80 градусов (оставаясь на нынешнем расстоянии от Земли).

Конечно, настоящую Луну перегнать на такую орбиту невозможно. Но искусственный спутник можно запустить и на такую орбиту, перпендикулярную плоскости эклиптики. И вопрос об эволюции этой орбиты (под влиянием притяжения Солнца) — вполне реальный для будущего спутника.

Результат Лидова оказался совершенно поразительным: *такая «псевдолуна» свалилась бы на Землю уже через четыре* (*примерно*) *года*! Так что запускать такой спутник не стоит.

Причиной падения оказывается не уменьшение радиуса орбиты (среднего расстояния спутника до центра Земли), а сжатие малой оси эллипса, вдоль которого движется спутник, т. е. увеличение его эксцентриситета. Даже если исходная орбита псевдолуны была с большой точностью круговой, то возмущения быстро превратят ее в эллипс (с уменьшающейся со временем малой осью). Хотя большая ось этого эллипса и сохраняет (как указывал Лаплас) свою длину, равную диаметру невозмущенной орбиты (т. е. диаметру орбиты настоящей Луны), увеличение эксцентриситета со временем сделает этот узкий эллипс в конце концов похожим на всего лишь (проходимый туда и обратно) *отрезок*.

Вследствие этой сильной эксцентричности орбиты псевдолуны эта орбита начнет пересекать Землю, так что такая псевдолуна упадет на Землю, хотя *среднее* за период обращения ее расстояние от центра Земли и останется равным такому же среднему для настоящей Луны (даже и в самый момент падения).

Несколько слов о разнице взглядов физиков и математиков на характер нашей общей науки. К концу второго тысячелетия нашей эры журнал «Успехи физических наук» выпустил юбилейный номер и заказал мне для этого номера обзор «Математика и физика» (две другие математические статьи в том же номере журнала написаны К. Вейерштрассом и К. Якоби). Меня поразило то, что редакция выбросила из моей статьи два четких доказательства резкого различия между подходами математиков и физиков к понятию истины: одно из этих доказательств содержалось в эпиграфе, бывшем цитатой из книги Э. Шрёдингера по статистической термодинамике, а другое — в задаче для дошкольников.

Вот эти, видимо непонятые редакцией, места. Эпиграфов у меня было два: первый (сохранившийся) — высказывание Стендаля: «*Из всех наук я больше всего люблю математику, так как в этой науке совершенно невозможно лицемерие, которое я больше всего ненавижу*». Видимо, Стендалю нравилось то, что в математике, если уж однажды сосчитано, что шестью семь — сорок два, то так оно и останется навсегда: истина окончательна и неоспорима.

Шрёдингер же пишет: «*Положим величину альфа равной нулю, хотя, во-первых, альфа равной нулю быть не может, а во-вторых, ее обращение в нуль противоречило бы основам квантовой механики*». Видимо, физики предпочитают не афишировать столь явно свое постоянное лицемерие, с его двусмысленностью терминологии и с внутренними логическими противоречиями своих теорий.

Когда я пытался позже обсудить обнаружившиеся различия с главным редактором журнала, академиком В. Л. Гинзбургом, он доказал мне, что *математики вообще ничего в физике понять не могут*, при помощи формулы из своей статьи. «Вот,— сказал он,— что, по-Вашему, обозначают эти символы?»

Я думал, что понимаю, и сказал: «Индекс i встречается дважды: видимо, это означает суммирование, по соглашению Эйнштейна, так что речь идет о положительно определенной форме — сумме квадратов — не знаю только, скольких, ведь пределы изменения индекса не указаны».

«Итак,— обрадовался физик,— как и все математики, Вы ничего не понимаете. Ведь буква i — *латинская*, а не греческая. *Значит*, значений четыре: 0, 1, 2 и 3. Что же касается *суммирования*, то его тут вовсе и нет: это обозначение релятивистское, поэтому один из квадратов берется *с другим знаком, чем остальные три*!»

Мне так и не удалось убедить собеседника, что негоже обозначать вычитание знаком сложения (и что ограничение «скорость не выше 60» бессмысленно, пока не объяснено, идет ли речь о километрах в час или же о парсеках в секунду).

Но вот еще второй пример, показывающий кардинальное различие математического и физического способов постановки и понимания задачи.

В моей статье было два образца (из старых учебников). Математическая задача: «*На книжной полке рядом стоят два тома Пушкина. Страницы каждого тома составляют его толщину 2 см, а каждая обложка добавляет еще по 2 мм. Червь прогрыз от первой страницы первого тома до последней страницы второго, по нормали к страницам. Какое расстояние он прогрыз*?»

У меня был указан и неожиданный ответ: 4 миллиметра. Редакция исправила поэтому условие на «от *последней* страницы первого тома до *первой* второго». Топологическое мышление — труднее, чем можно требовать от редакции физического журнала. А любое неожиданное утверждение редакторы всегда стараются заменить привычной себе тривиальностью, хотя бы противоположной исходному утверждению.

Недавно (8 февраля 2002 г.) выпуск «Наука» газеты «Известия» заменил в моей статье о проекте реформы школьного образования мои слова «план состоит в том, чтобы *отменить* обучение всем практическим знаниям и предметам» на более привычную редактору формулу: «план состоит в том, чтобы *отдать предпочтение* фактическим знаниям и предметам».

Возвращаясь к непонимаемым редакцией задачам, упомяну — замечательную — задачу физического стиля из старого учебника арифметики.

«*Гребец плыл на лодке вверх по Неве. Под Троицким мостом у него сшибло шляпу, Поднявшись до Литейного моста, он встретил друга, который ему на это указал. Тогда гребец поплыл вниз, вслед за шляпой* (*с такой же, как прежде, скоростью относительно воды*), *и догнал ее через 20 минут, под Дворцовым мостом. Определите скорость течения Невы».*

Математику ясно, что эта задача неразрешима. Но составители были лицемерами (или физиками?). Они решали ее так: «согласно принципу относительности Галилея, гребец отплывал от шляпы вверх и догонял ее вниз одинаковое время — те же 20 минут. Значит, шляпа проплыла от Троицкого моста до Дворцового за 40 минут. А *так как* расстояние между этими мостами составляет одну милю, то...».

Все физические задачники и учебники построены по этому образцу: неявно предполагаются известными какие-то расстояния между мостами или иные обстоятельства, о которых «нет нужды» говорить (это всегда напоминает мне старую статью в ДАН СССР «О фонтанирующей деятельности китов», в которой участвовала, при вычислении цилиндрического объема кита, формула, содержащая величину «пи» — «*константу, которая для гренландских китов равна трем*»).

Математическая строгость часто оказывается труднопреодолимым препятствием даже и для хороших математиков. Следующий пример заимствован из замечательной классической книги Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (недавно переизданной на русском языке).

Речь идет о применении топологии. Пусть на катящейся по горизонтальному рельсовому пути платформе установлена перпендикулярно рельсам закрепленная горизонтальная ось, над которой возвышается способный вращаться вокруг этой оси «перевернутый маятник» (стержень).

Утверждается, что *каков бы ни был заданный закон движения платформы* (*в течение промежутка времени от нуля до единицы*), *начальное положение «маятника» можно выбрать так, что он в конечный момент времени не будет горизонтален* (Хасслер Уитни).

Авторы доказывают это так. Если исходное положение маятника — горизонтально лежачее, вперед по ходу, то таким оно и останется. Если же исходное положение — горизонтально лежачее, но назад по ходу, то и это сохранится.

Рассмотрим теперь произвольное начальное положение. Конечное положение определяется начальным. Эта непрерывная функция принимает оба значения «вперед» и «назад». По теореме топологии она принимает и промежуточные значения, что и требовалось доказать.

Некоторое время назад мне передали просьбу от проф. Роббинса (Курант к тому времени уже умер) постараться исправить это «ошибочное доказательство». Дело в том, что никакой непрерывной функции «конечное состояние при данном начальном состоянии» тут сразу не видно: ее нужно еще точно определить (с каким-то учетом влияния возможных ударов о платформу), и нужно *доказать* ее непрерывность. Я слышал, что американские математики, пытавшиеся всё это сделать, написали (неизвестное мне) сочинение с ошибочными промежуточными утверждениями и доказательствами, так что вопрос о «маятнике» и сегодня, видимо, остается открытым[1].

Обсуждая однажды вопрос о происхождении математики на заседании Французского математического общества, я сказал, что *математика — это часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой*: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей.

Один крупнейший французский математик написал мне в ответ письмо, где сказал, что, по его мнению, *математика*, напротив, *не имеет с физикой ничего общего*. Он добавил, что нам, математикам, не следует публиковать этих мнений, так как «*в такой публикации даже самый лучший математик способен сказать совершеннейшую чушь*».

Я не сомневаюсь, что «самым лучшим» он называл себя, так что расцениваю это письмо как *бумеранг*: смертоносное оружие, поражающее если не цель, то охотника.

Через некоторое время на одном официальном обсуждении проблем образования в Москве выступил академик Д. В. Аносов со следующей «критикой Арнольда». Арнольд опубликовал (и это правда) в одной своей статье («Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором искусств и ремесел» в выпущенной Международным математическим союзом к 2000 г. книге «Математика, ее границы и перспективы» (под редакцией В. Арнольда, М. Атьи, П. Лакса и Б. Мазура) сравнение высказываний двух крупнейших алгебраистов. Гильберт (в 1930 г., в статье «Математика и естествознание») пишет, что «*геометрия — часть физики*». А цитированный выше французский математик утверждает, что «*у математики и физики нет ничего общего*».

Из этих двух утверждений Арнольд (заявил докладчик) усмотрел противоречие. Но это — потому что «Арнольд, в силу своих интеллектуальных недостатков, либо не читал, либо не понял Аристотеля». Для тех же, кто, подобно мне (продолжал Аносов) читал и понял Аристотеля, противоречия тут нет, зато есть вывод: «*у математики нет ничего общего с геометрией*». «И потому,— заключил свою речь академик Аносов — я предлагаю *из всех математических курсов* (будь то в Университете, в Средней Школе или в Детском Саду) *геометрию полностью исключить*».

---

[1]Дискуссия об этой задаче Х. Уитни опубликована: B. E. Blank. Book review: What is mathematics? // Notices of the Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 48, № 11. P. 1325—1329; L. Gillman. Book reveiw: What is mathematics? // Amer. Math. Monthly. 1998. Vol. 105, №5. P. 485—488; J. E. Littlewood. Littlewood's miscellany. Cambridge Univ. Press, 1986. P. 32—35.

Через несколько недель я получил от министра образования России план разработанных Министерством новых программ для школ по всем предметам. В соответствии с мнением Аносова (избранного по моей же более ранней инициативе представителем Отделения математики Российской академии наук при Министерстве образования), *курс геометрии был полностью исключен из всех учебных планов*.

Некоторое время я боролся против этого мракобесного решения; соответствующие письма против исключения геометрии отправили Министерству Ученый совет Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук — с одной стороны и представители ряда оборонных предприятий (сообщившие мне об этом годом позже в Дубне) — с другой. Через несколько месяцев министр прислал мне (с благодарностью) переработанную версию учебных планов, где геометрия вернулась на свое старинное место[2].

Правда, перерабатываются программы требований к школьникам на уроках и особенно на экзаменах (которые, впрочем, предполагается заменить тестами).

Нелепость тестовых испытаний хорошо показывает опыт США, где десятилетиями роль проверки геометрических знаний давалась задаче: «*Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на нее высотой длиной в 6 дюймов*».

Окончившие российские школы испытуемые не могли дать искомое «решение» ($S = ah/2 = 30$ кв. дюймов), так как понимали, что *таких треугольников нет*: вершина прямого угла лежит на окружности, диаметр которой — гипотенуза. Поэтому высота не может быть длиннее пяти дюймов.

Но это не останавливает любителей тестов: они «доказали» слабое умственное развитие московских школьников их неспособностью ответить на тестовый вопрос: «*Что общего у ежа с молоком?*» (я тоже не решил, и испытующие сообщили мне ответ: «они оба свертываются»).

Да минет наших школьников чаша сия! Пусть они по-прежнему решают настоящие интересные задачи, как они и любят!

Вопрос о том, какие математические задачи заслуживают того, чтобы их пытаться решить, и зачем они ставятся и решаются, весьма непрост[3]: проблемы Ферма и Гильберта, Римана и Пуанкаре имеют длинную и поучительную историю. Я приведу ниже несколько примеров, показывающих,

---

[2] Современный управитель суперкомпьютерной фирмы пишет: «Геометрию пора перенести в курс истории, так как все ее задачи либо решены, либо решаются иными методами.» (J. Bailey. After Thought. Basic Books, 1996). Попытки обучить подобных людей мышлению, логике и уважению к науке и культуре безнадежны.

[3] Поучительные примеры задач, которыми *не следует* заниматься, привел М. Планк в специально посвященной ненужным задачам лекции 1946 г. в Гёттингене. Простейший его

в частности, сколь многое неверно в распространяемых по этому вопросу мнениях. Известный «эпонимический принцип» состоит в том, что если какой-либо объект (например, Америка) носит чье-то имя, то это — *не имя первооткрывателя*.

Заведовавший Отделением математики Российской академии наук (АН СССР) Николай Николаевич Боголюбов всегда убеждал меня, чтобы я печатал свои статьи не в математических, а в физических журналах[4]. По его словам, число читателей хорошей статьи будет таким же — скажем, тысяча. «Разница,— продолжал он,— состоит в том, что при публикации статьи в математическом журнале эта тысяча читателей образуется за сотню лет, по десять читателей в год, и это — вечная слава. При публикации же в физическом журнале вся тысяча читателей прочтет статью в первые же недели, и автора немедленно выберут в академики, а через сто дней никто уже не будет помнить имя автора, хотя и результаты, и методы статьи будут всеми постоянно использоваться, как общеизвестные (и, разумеется, без ссылки на автора и с последующим присуждением нобелевской премии за это достижение другим)».

Впрочем, Н. Н. Боголюбов показал мне на замечательном примере преимущества своей прагматической точки зрения. В то время я хотел издать в русском переводе избранные сочинения А. Пуанкаре, а издательство отказывалось (ссылаясь на критику Пуанкаре, опубликованную в 1909 г. в «Материализме и эмпириокритицизме»). Когда я стал просить развивавшего идеи Пуанкаре Н. Н. помочь, он сказал: «Нужно использовать то, что Пуанкаре, как и мы с Вами оба, был не только математиком, но также и физиком, даже естествоиспытателем. А естествоиспытатель должен видеть в каждом явлении природы, даже неприятном, вроде извержения вулкана, возможность использовать это явление в научных целях, например — узнать что-либо о внутреннем строении Земли.

В нашем случае речь идет о другом неприятном явлении природы, которое нам и нужно использовать: это антисемитизм и антиэйнштейнианство отдельных лиц». Сказав это, он написал в издательство письмо, объясняющее (совершенно справедливо), сколь велики заслуги Пуанкаре в создании теории относительности. Он опубликовал принцип относительности в своей статье «Об измерении времени» лет за десять до Эйнштейна,

---

пример — дискуссия о том, какая стена в аудитории *правая*? Расхождение стоящего у доски лектора и его слушателей по этому вопросу непримиримо, так как они обращены друг к другу лицами.

Мне случалось, впрочем, наблюдать, как физики успешно справляются с подобными логическими противоречиями. Например, иногда помогает их прагматическая система измерений, в которой c, h и 4π все равны единице.

[4]Среди моих читателей все равно больше физиков, механиков, астрономов и т. п.

который лишь в сороковых годах указал, что он, по советам своего учителя Минковского, разобрал эти работы Пуанкаре до начала своих.

И трехтомное «Избранное» Пуанкаре издали по-русски, включая статью об измерении времени, но без критики Эйнштейна.

§ 2. Математическое мракобесие против Абеля и против Пуанкаре

Я надеюсь больше рассказать об Абеле и Пуанкаре, чем о мракобесах.

Вопрос о том, какие математические вопросы заслуживают внимания, а какие нет, очень непрост. Один великий современный математик сформулировал свой ответ так: «Узнать, хороша ли задача, можно только одним способом: надо ее решить».

На Европейском III математическом конгрессе (в Барселоне, в 2001 г.) было объявлено о другом решении проблемы объяснения сущности математической деятельности нематематикам. Один крупный современный деятель сказал, что когда он был студентом математического факультета, то ответил студентам других специальностей в баре, где они вместе пили: «Вот, под этой курткой на мне рубашка. *Математика позволяет мне вывернуть рубашку наизнанку, не снимая куртки*!» Он утверждает, что, проделав это топологическое упражнение, он навсегда дал своим коллегам «ясное представление о математике». Я же могу добавить, что именно такие представления о деятельности математиков приводят правительства и общество к прекращению финансирования этой науки и грозят ей полным уничтожением.

Величайший французский математик А. Пуанкаре писал, что в математике немало «да—нет» вопросов, вроде проблемы Ферма: есть ли целочисленные положительные решения у уравнения $x^n + y^n = z^n$, где n больше двух?

По словам Пуанкаре, именно эти «бинарные» проблемы гибельны для математики: *по-настоящему интересные проблемы* не допускают ни столь точной формулировки, ни однозначного «да—нет» ответа. Интересно, например, узнать, как и что можно *изменить* в условиях задачи (скажем, в граничных условиях для дифференциального уравнения), не нарушая его (однозначной) разрешимости. Много таких допустимых изменений или мало? Именно при исследовании такого рода вопросов, а не «да—нет» задач, возникают, по мнению Пуанкаре, новые математические теории, а следовательно — и фундаментальные открытия, и замечательные приложения (как в самой математике, так и вне ее, например в медицине томографии или в небесной механике космических полетов).

Сам Пуанкаре построил, исходя из этого, такие новые науки, как топологию и теорию динамических систем, теорию бифуркаций и теорию автоморфных функций, принцип относительности и вариационное исчисление в целом[5]. Как основные задачи математики будущего XX в. он назвал тогда построение математического аппарата теории относительности и квантовой физики. Опыт последовавшего столетия показал, что его открытия и предсказания сыграли в развитии математики неизмеримо бо́льшую роль, чем составленный Гильбертом (по тому же случаю конца XIX в.) список из пары десятков «да—нет» задач. В «проблемах Гильберта» практически отсутствовала, например, именно наиболее развивавшаяся в XX в. область математики — топология, затронутая лишь отчасти в гильбертовых проблемах 13 (о суперпозициях) и 16 (о вещественных алгебраических кривых и о предельных циклах).

К концу XX в. Международный математический союз выпустил книгу «Математика, ее границы и перспективы» (под редакцией В. Арнольда, М. Атьи, П. Лакса и Б. Мазура). В этой книге содиректор Боннского математического института Ю. И. Манин дал свои новые определения математики, математического образования и новую оценку стоящих перед математикой задач. О них я теперь и расскажу.

Математика, согласно Манину, — *это отрасль лингвистики или филологии, занимающаяся преобразованием конечных цепочек символов некоторого конечного алфавита в другие такие цепочки при помощи конечного числа «грамматических» правил.* Отличие от естественных языков, вроде китайского, английского или русского, состоит лишь в том, что в грамматике этого специального языка есть отсутствующие в живых языках правила (например, набор символов «$1+2$» можно заменить на символ «3»).

Гильберт, долго придерживавшийся аналогичного формального определения, оставил его, после того как Гёдель опроверг его оптимистическое предположение возможности полной формализации всей математической науки. Гёдель доказал наличие в каждой достаточно богатой формальной теории таких утверждений, которые *нельзя ни доказать, ни опровергнуть* в рамках этой теории. Сейчас доказано, что к этому классу принадлежит, например, гипотеза Кантора об отсутствии промежуточной мощности между мощностями множеств всех целых и всех вещественных чисел.

Доказательства невозможности являются замечательной и глубоко неочевидной частью математики, и я приведу здесь такое доказательство для другого случая: докажу *невозможность построения центра*

[5]В словаре Ларусса (1926 г.) А. Пуанкаре определялся как «автор понятия функция Фукса»: школа Пуанкаре существует скорее в России, чем во Франции.

заданной на плоскости окружности при помощи одной лишь линейки (циркулем и линейкой построить центр можно).

Это доказательство начинается с рассмотрения «косого» конуса, опирающегося на заданную окружность: прямая, соединяющая вершину конуса с центром окружности, должна не быть перпендикулярной плоскости окружности. В этом его «косина».

Косой конус не является вращательно симметричным, и его сечение плоскостью, перпендикулярной его (естественно определяемой) оси, эллиптично — я не собираюсь ни использовать эту эллиптичность, ни ее доказывать, ни даже точно определять «ось».

Важным свойством косого конуса является то, что окружности получаются при его пересечении некоторыми двумя непараллельными плоскостями (одинаково наклоненными к оси, но в противоположные стороны). Существование таких непараллельных друг другу круговых сечений доказать легко (хотя бы из соображений непрерывности отношений длин осей получающегося в сечении эллипса в зависимости от наклона секущей плоскости).

Предположим теперь, что какие-либо построения прямых на исходной плоскости всегда доставляют центр исходной окружности. Спроектируем всю эту конструкцию на плоскость непараллельного исходному кругового сечения лучами, исходящими из вершины конуса. Тогда на этой плоскости непараллельного сечения будут выполнены те же самые построения линейкой, что и на исходной плоскости. И если бы эти построения всегда приводили к центру, то оказалось бы, что центр исходной окружности и центр непараллельного ей кругового сечения проектируются друг в друга лучом из вершины конуса, т. е. лежат с этой вершиной на одной прямой.

Но эти два центра на одной прямой с вершиной конуса не лежат (что легко проверить даже просто экспериментально).

Значит, построения, всегда приводящего к центру окружности, не существует.

Другой классический пример древней неразрешимой задачи — теорема Абеля о несуществовании формулы, состоящей из радикалов и из рациональных функций, доставляющей решение общего алгебраического уравнения пятой (или более высокой) степени, например уравнения

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы Абеля — топологическое. Его проще объяснить для случая уравнения покороче,

$$x^5 + ax + 1 = 0, \tag{2}$$

которое уже тоже неразрешимо в радикалах в указанном выше смысле.

Комплексное решение x этого уравнения является (пятизначной) комплексной алгебраической функцией от значения комплексного коэффициента a. Когда коэффициент a непрерывно меняется, пять комплексных корней уравнения тоже непрерывно меняются. Если менять коэффициент так, чтобы у уравнения (2) ни в какой момент не было кратного корня, то можно непрерывно следить за каждым отдельным корнем. И если в некоторый момент значение коэффициента a вернется к своему исходному значению, то и двигавшиеся непрерывно корни все вместе в конце будут теми же, что и в начале, однако каждый отдельный корень может при этом вернуться не на свое исходное место, а на место другого корня, как это происходит, например, с корнями квадратного уравнения $x^2+a=0$, когда комплексный коэффициент a обходит вокруг начала координат.

В результате движения параметра a возникает перестановка пяти корней исходного уравнения (для квадратного уравнения это была бы просто перестановка, переводящая корень x_1 в корень x_2, а x_2 — в x_1).

Всевозможным (не приводящим по дороге к кратным корням) путям движения коэффициента a от начального положения обратно к нему же отвечает некоторый набор перестановок корней начального уравнения. Этот набор образует группу: если две перестановки реализуются движениями коэффициента a, то можно реализовать и их произведение, состоящее в последовательном применении сначала одной, а потом другой перестановки. Для этого коэффициенту a нужно пройти сначала первый замкнутый путь, а потом второй. При прохождении пути в обратную сторону будет реализована перестановка корней, обратная той, которую реализовывал исходный путь (произведение прямой и обратной перестановок возвращает каждый корень на свое исходное место).

Итак, все реализуемые путями в плоскости коэффициента a перестановки корней x образуют группу. Эта группа перестановок корней исходного уравнения называется его *группой монодромии* («однозначности вдоль путей»).

Чтобы понять все это, полезно найти группу монодромии приведенного выше уравнения (2). Оказывается, *эта группа состоит из всех* 120 *перестановок пяти корней исходного уравнения*.

Группа всех $n!$ перестановок n предметов называется *n-й симметрической группой* и обозначается через S_n. Например, группу S_3 можно считать группой из шести симметрий правильного треугольника, вершины которого она переставляет, а группу S_4 — группой из 24 симметрий правильного тетраэдра (в ней 12 вращений и 12 отражений), переставляет же она четыре вершины тетраэдра.

Вращения образуют подгруппу R в этой группе симметрий: произведение двух вращений является вращением. Группа R не коммутативна.

В группе вращений тетраэдра есть еще замечательная подгруппа G из 4 элементов. Она состоит из трех вращений на $180°$ вокруг осей, соединяющих середины противоположных ребер, и из тождественного преобразования. Группа G коммутативна.

Группа вращений тетраэдра действует на тройке прямых, соединяющих середины противоположных ребер. Указанная выше подгруппа состоит в точности из всех тех вращений, которые переводят каждую из описанных трех прямых в себя. Таким образом, мы получаем цепочку из трех групп

$$G \to R \to S_4.$$

В группе симметрий тетраэдра S_4 есть еще и другие подгруппы — например, группа 6 симметрий, оставляющих на месте одну из вершин, или из двух симметрий, переводящих в себя одно из ребер.

Эти подгруппы, однако, зависят от «случайного» выбора (вершины или ребра), они меняются местами при перенумерации вершин (как говорят в математике, «при изменении системы координат»). Напротив, группы G и R не зависят ни от какого произвола в выборе системы отсчета (т. е. от нумерации вершин): они *инвариантны* относительно такого изменения нумерации вершин (которое, например, превратило бы перестановку $1 \to 2 \to 3 \to 1$ в перестановку $2 \to 4 \to 1 \to 2$, если бы мы придали вершинам $(1, 2, 3, 4)$ номера $(2, 4, 1, 3)$).

Инвариантные подгруппы называют также *нормальными делителями*. Всякий раз, когда подгруппа B группы A является нормальным делителем, можно «разделить A на B» и образовать новую группу C, называемую *факторгруппой* (и обозначаемую $C = A/B$). Элементами группы C являются «*классы смежности*» aB элементов группы A по подгруппе B.

Класс смежности aB элемента a — это множество (не подгруппа!) всех произведений вида ab, где b — любой элемент подгруппы B. Этот класс — подмножество группы A.

Умножение в C определяется как умножение представителей: $(a_1B) \times \times (a_2B) = a_1a_2B$. Класс a_1a_2B не зависит от от выбора представителей a_1 и a_2 классов a_1B и a_2B, а только от самих классов, если подгруппа B — нормальный делитель. Факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ группы целых чисел по подгруппе чисел, делящихся на n, называется группой вычетов по модулю n и состоит из n элементов.

Полезно иметь в виду построенную выше цепочку («из трех групп и двух отображений»)

$$1 \to B \to A \to C \to 1.$$

Стоящая дополнительно слева единица означает, по определению, что отображение $B \to A$ — вложение подгруппы (т. е. что образы разных элементов всегда разные). Стоящая дополнительно справа единица означает, по определению, что образ отображения $A \to C$ покрывает группу C целиком. Каждая стрелка по определению переводит произведение любых двух отображаемых объектов в произведение их образов (такие отображения называются *гомоморфизмами*).

Каждая соседняя пара стрелок в нашей строке из четырех стрелок обладает тем свойством, называемым точностью, что *выходящий из средней группы гомоморфизм переводит в* 1 *в точности весь образ приводящего в среднюю группу слева гомоморфизма.*

Цепочка (в ней может быть и больше групп и гомоморфизмов) называется *точной последовательностью*, если в каждой средней группе выполнено указанное и подчеркнутое выше свойство точности.

Факторгруппы по нашим специальным нормальным делителям легко вычислить. Эти группы

$$S_4/R, \quad R/G, \quad G/\{1\}$$

состоят из двух, трех и четырех элементов соответственно, и *каждая из них коммутативна.*

Чтобы все это понять, полезно рассмотреть еще группу B всех симметрий куба. В ней 48 элементов. У куба четыре большие диагонали. Симметрии куба переставляют их. Мы получаем гомоморфизм

$$B \to S_4,$$

сопоставляющий симметрии куба перестановку диагоналей. Образом является вся группа 24 перестановок диагоналей.

В тождественную перестановку 1 отображаются две симметрии куба: тождественная и антиподальная (симметрия относительно центра). В частности, подгруппа из 24 вращений куба отображается на группу S_4 перестановок диагоналей изоморфно.

Теперь нужно посмотреть, какие из подгрупп группы всех симметрий куба являются в ней нормальными делителями.

Основное для теории разрешимости уравнений в радикалах понятие теории групп — это понятие *разрешимой группы.* Разрешимость — это «составленность из коммутативных составляющих». Группа G называется *разрешимой*, если для нее существует такая цепочка нормальных делителей

$$1 \to G_1 \to G_2 \to \ldots \to (G_n = G)$$

(G_k — нормальный делитель в G_{k+1}), что все факторгруппы G_{k+1}/G_k коммутативны.

Выше мы показали, что группа S_4 симметрий тетраэдра разрешима.

Еще легче проверить разрешимость группы S_3 симметрий правильного треугольника.

Ненамного сложнее доказать разрешимость группы B симметрий куба.

Но самым замечательным является тот факт, что *группа S_5 всех* 120 *перестановок пяти элементов уже неразрешима*. Эта неразрешимость следует из того, что *единственный имеющийся в группе S_5 нетривиальный нормальный делитель — это группа из* 60 *четных перестановок. А она уже не имеет нетривиальных нормальных делителей* (*тривиальные — это* 1 *и сама группа*).

Доказательства этих свойств группы перестановок из пяти элементов можно извлечь из свойств додекаэдра — правильного многогранника, имеющего 12 (отсюда «додека», греческое «двенадцать») пятиугольных граней, сходящихся по 3 в 20 вершинах и пересекающихся по 30 ребрам.

В додекаэдр можно вписать пять кубов, вершинами каждого из которых является часть вершин додекаэдра. С этой целью начнем с одной из пяти диагоналей грани. На двух соседних гранях, сходящихся в конце этой диагонали, тоже выберем по проходящей через эту вершину диагонали грани (так, чтобы три сходящиеся в этой вершине додекаэдра выбранные диагонали граней переводились друг в друга сохраняющим эту вершину вращением додекаэдра). Продолжая этот процесс выбора диагоналей в вершинах уже построенных диагоналей граней, мы будем получать все новые диагонали граней и вершины, пока не построим все 8 вершин искомого куба и все 12 его ребер (являющихся диагоналями двенадцати граней додекаэдра).

На каждой грани додекаэдра мы получим таким путем одну диагональ. Если бы мы начали с другой из пяти диагоналей исходной грани, то построили бы другой из пяти вписанных в додекаэдр кубов.

Описанная здесь конструкция была использована Кеплером при анализе планетных орбит и поиске закона распределения расстояний планет от Солнца в геометрии правильных многогранников, вписанных друг в друга. Он называл это «гармонией мира».

Проделав такую же конструкцию с диагоналями граней для исходного куба вместо додекаэдра, мы получили бы два тетраэдра, вписанных в куб (вместо пяти кубов, вписанных в додекаэдр). Это построение тетраэдров позволяет легко доказать разрешимость групп симметрий и вращений куба, а с ними — разрешимость в радикалах уравнений четвертой степени.

Для додекаэдра и группы S_5 анализ подгрупп и нормальных делителей немного сложнее, но тоже в принципе прост: перемножая симметрии, легко проверить, что подгруппа обязательно совпадает со всей группой S_5, если она содержит хотя бы одну симметрию, переставляющую пять кубов нечетным образом, и удовлетворяет принципу относительности («независимости подгруппы от выбора координат»), определяющему нормальные делители.

Дело в том, что принцип относительности доставляет вместе с данной (нечетной) симметрией так много других (получающихся из нее какой-либо еще симметрией, действующей как перевыбор системы координат), что из их произведений составляется уже вся группа S_5.

Из неразрешимости группы S_5 перестановок пяти элементов следует и неразрешимость групп перестановок бóльшего числа элементов S_6, S_7, ...

Возвращаясь к теореме Абеля, я скажу только, что группа монодромии корня степени m ($x=a^{1/m}$) — коммутативная группа (группа вычетов по модулю m). А *группа монодромии комбинации нескольких коренных функций составляется из монодромий составляющих ее радикалов* (*коренных функций*) так, что группа монодромии комбинации оказывается разрешимой.

Поэтому общее уравнение степени 5 или выше неразрешимо: ведь его группа монодромии неразрешима (что следует, как это объяснено выше, из анализа симметрий додекаэдра и их действий на 5 вписанных в додекаэдр кубов).

Таким образом, доказательство теоремы Абеля соединяет все части математики: геометрию (додекаэдр), алгебру (разрешимые группы), топологию (монодромия) и даже (хотя об этом я выше не говорил) теорию чисел (алгебраических). Анализ тоже появляется здесь — в виде теории римановых поверхностей, и я скажу сейчас об этом несколько слов.

Абелевым интегралом называется интеграл от рациональной функции от двух переменных, связанных между собой алгебраическим уравнением:

$$I=\int\limits_{H(x,y)=0} R(x,y)\,dx,$$

где R — рациональная функция, а H — многочлен (определяющий ту алгебраическую кривую $\{H=0\}$, вдоль которой ведется интегрирование).

Это — прямое обобщение классических «табличных интегралов» Ньютона, включающих в себя квадратные корни, или интегралов от рациональных комбинаций тригонометрических функций, или эллиптических интегралов, выражающих длину эллипса или его дуги, включающих квадратные корни из многочленов степени 4, и т. д.

В этом случае радикалов для выражения интегралов явно недостаточно (появляются, как все знают, еще и логарифмы, арксинусы, арктангенсы и т. д.). Аналогом разрешимости в радикалах является в этом случае возможность *интегрирования в классе элементарных функций*, т. е. возможность представления интеграла в виде конечной комбинации радикалов, экспонент, логарифмов, тригонометрических и обратных к тригонометрическим функций.

Оказывается, этот «вычислительный» вопрос в действительности является топологическим вопросом теории римановых поверхностей. Дело в том, что уравнение алгебраической «кривой» $\{H(x,y)=0\}$ можно рассматривать как задающее подмножество («кривую») не на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$, а на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}^2$ (считая обе переменные x и y комплексными числами). Эта «комплексная кривая» является в действительности (в вещественном смысле) поверхностью, т. е. двумерным вещественным подмногообразием того вещественно-четырехмерного пространства $\mathbb{R}^4$, которым является «комплексная плоскость» $\mathbb{C}^2$. Ибо *одно-единственное* комплексное уравнение $H(x,y)=0$ является уже *парой* вещественных: ведь нулю равны и вещественная, и мнимая часть значения многочлена H.

С топологической точки зрения «комплексная *кривая*» является вещественно-двумерной *поверхностью*. Гладкие двумерные поверхности в топологии все описаны. Если такая поверхность связна, компактна и ориентируема, то она либо диффеоморфна сфере S^2, либо получается из сферы приклеиванием некоторого конечного числа g гладких ручек. Случай $g=1$ соответствует поверхности тора, являющегося сферой с одной ручкой, случай $g=2$ — поверхности кренделя, получающегося соединением двух торов по маленькой общей окружности (ограничивавшей на каждой из склеиваемых поверхностей выкидываемый при склеивании диск). Число g называется *родом* поверхности.

Ориентируемость, которой не обладает лента Мёбиуса или содержащая эту ленту (как обнаружил Мёбиус, потому и открывший ленту) проективная плоскость, всегда гарантирована для комплексных многообразий (их ориентация задается направлением вращения «от 1 к i», с возрастанием аргумента вращаемого вектора). Так что все комплексные алгебраические кривые естественно ориентированы. Гладкость, связность и компактность — это настоящие ограничения. Компактность восстанавливается при добавлении к неограниченной алгебраической кривой, вроде гиперболы, ее «бесконечно удаленных» точек. Например, комплексная прямая, вещественно диффеоморфная вещественной плоскости, дополняется до компактной кривой одной бесконечно удаленной точкой, что превращает ее в *сферу Римана*, называемую также *комплексной проективной прямой*. Окружность $\{x^2+y^2=1\}$ при рассмотрении комплексных точек становится вещественным цилиндром (это особенно ясно, если переписать уравнение, выбрав другую систему комплексных координат, в виде $\{zw=1\}$). Этот цилиндр становится сферой при его пополнении двумя его бесконечно удаленными точками ($z=0$ и $w=0$). Так что в комплексной области окружность определяет в качестве пополненной римановой поверхности опять двумерную сферу, как и прямая, и имеет род нуль.

Особые точки (как конечные, так и бесконечно удаленные) появляются на алгебраических кривых в качестве исключения. Например, кривые $\{xy = c\}$ на плоскости с координатами x и y неособы при всех отличных от нуля значениях параметра c, а при $c = 0$ эта кривая имеет одну точку самопересечения (и, в пополненном виде, она состоит из двух пересекающихся в этой точке сфер Римана).

Теорема Абеля. *Если род римановой поверхности кривой* $\{H(x, y) = 0\}$ *равен нулю, то все абелевы интегралы вдоль этой кривой выражаются через элементарные функции. Если же род больше нуля, то некоторые из абелевых интегралов вдоль этой кривой не являются элементарными функциями* (*от конца пути интегрирования*).

Удивительна в этой теореме связь совершенно отдаленных на первый взгляд друг от друга областей математики: теории элементарных функций, интегрирования и топологии. Но математика едина, хотя организаторы Конгрессов и делят ее на десятки «секций».

Один частный случай этой теоремы — так называемая «теория подстановок Эйлера» — входит часто в начальные курсы анализа. Кривые рода нуль (римановы поверхности которых диффеоморфны сфере) обладают еще одним замечательным свойством: они являются *рациональными кривыми*, т. е. могут быть заданы параметрически в виде $\{x = f(t),\ y = g(t)\}$ при помощи пары рациональных функций (f, g).

Если такое представление кривой $\{H(x, y) = 0\}$ известно, то мы получаем на этой кривой выражение абелева интеграла в виде

$$\int R(x, y)\, dx = \int R(f(t), g(t))\, f'(t)\, dt,$$

что сводит вопрос к интегрированию рациональной функции от t, а это всегда приводит к элементарной первообразной функции.

Убедимся, например, что рациональной кривой является окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Проведем для этого через точку $(x = -1,\ y = 0)$ этой кривой прямую. Обозначая тангенс ее наклона к оси x через t, мы получаем ее уравнение: $\{y = t(1 + x)\}$. Подставляя это выражение в уравнение окружности, мы получим для определения абсциссы x точки пересечения прямой с окружностью квадратное уравнение, один из корней которого $(x = -1)$ известен, так как мы проводили прямую через эту точку окружности. Значит, и второй корень выражается через t рационально (по формуле Виета для суммы или для произведения корней).

А именно, мы получаем выражения

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2},$$

доставляющие рациональную параметризацию окружности и доказывающие ее рациональность. Приведенные формулы выражают косинус и синус угла (аргумента комплексного числа $x+iy$) через тангенс (t) половинного угла и могут быть выведены из этого обстоятельства геометрически.

Мы получили явное сведение абелевых интегралов вдоль окружности к интегралам от рациональных функций вдоль прямой.

История этих формул (тесно связанных с «теоремой Пифагора», доставляющей уравнение окружности) восходит к задаче теории чисел о «пифагоровых тройках» (решение которой, вместе с доказательством «теоремы Пифагора», было опубликовано халдеями клинописью за пару тысяч лет до Пифагора).

Простейшей «пифагоровой» тройкой является тройка $(3, 4, 5)$ целочисленных длин сторон прямоугольного треугольника, используемого египетскими строителями для построения прямых углов (например, при строительстве пирамид). Задача же состоит в том, чтобы найти *все* такие тройки.

Решение доставляет предыдущая рациональная параметризация окружности: если параметр t имеет рациональное значение v/u, то мы получаем рациональную точку $(x/z, y/z)$ на окружности, а из нее — пифагорову тройку целых чисел ($x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$) и, заодно, доказательство того, что других троек, кроме целых кратных этих, нет. Стандартная египетская тройка получается при $u = 2$, $v = 1$. Чтобы получалась несократимая тройка, нужно брать взаимно простые целые числа u и v разной четности. При $u = 3$, $v = 2$ получаем ($x = 5$, $y = 12$, $z = 13$), так что $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Рациональные вещественные кривые обладают еще замечательным свойством *уникурсальности*: такую кривую можно нарисовать «единым росчерком пера», не отрывая его от бумаги. Это рисование определяется движением точки $(f(t), g(t))$ при движении параметра t вдоль вещественной прямой. Разумеется, здесь следует включать в кривую ее бесконечно удаленные точки. Гипербола, например, рациональна и уникурсальна, но «единый росчерк пера» получается только на проективной плоскости, при включении в гиперболу бесконечно удаленных точек, в которых соединяются обе ветви.

Вычисление рода заданной уравнением алгебраической кривой не всегда просто. *Неособая кривая степени n на проективной плоскости имеет всегда род $g = (n-1)(n-2)/2$ (формула Римана).* В этом проще всего убедиться при помощи следующего «итальянского» соображения алгебраической геометрии.

В комплексном случае, в отличие от вещественного, топология проще: *все невырожденные комплексные алгебраические объекты единого семейства имеют одинаковые топологические свойства.* Например, всякое (невырожденное) алгебраическое уравнение степени n имеет *ровно n комплексных корней*, тогда как число вещественных корней сложно меняется при изменении коэффициентов невырожденного вещественного уравнения.

Дело здесь в том, что вырожденные комплексные объекты выделяются *комплексным* уравнением (в случае многочлена от одной переменной это — уравнение «дискриминант равен нулю»). Но одно комплексное уравнение — это два вещественных. Поэтому *вещественная коразмерность многообразия вырожденных комплексных объектов* (например, комплексных многочленов, имеющих кратный корень) *равна не единице, а двум* (как коразмерность точки на вещественной плоскости или коразмерность вещественной прямой в трехмерном вещественном пространстве).

Следовательно, *многообразие вырожденных комплексных объектов не делит многообразие всех комплексных объектов*, так что *многообразие невырожденных объектов связно, и от одного из них можно перейти к любому другому непрерывной деформацией в классе невырожденных комплексных объектов.*

При такой невырожденной деформации топологические свойства деформируемого объекта (число корней уравнения, род алгебраической кривой и т. п.) не меняются. Значит, остается выбрать один невырожденный объект попроще — скажем, многочлен $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ — и изучить нужные топологические инварианты только для него: ответ будет таким же и для всех остальных невырожденных объектов семейства (число корней останется равным n).

В случае семейства всех алгебраических кривых степени n можно начать с n прямых на плоскости, пересекающихся попарно, но не по три. Для получения уравнения $\{H=0\}$ можно тогда взять в качестве H произведение n линейных неоднородных множителей, обращающихся в нуль на этих прямых. Получающаяся кривая особа, но уравнение $\{H=c\}$ с малым c задает уже неособую кривую.

Топологию этой кривой легко исследовать, так как исходные n прямых доставляют в комплексной области n сфер Римана, попарно пересекающихся в различных точках. Переход от $c=0$ к $c=\varepsilon$ заменяет окрестность каждой точки пересечения двух сфер маленькой цилиндрической трубочкой, соединяющей две «окружности», ограничивающие окрестности точки пересечения на одной и на другой сфере.

Подсчет рода теперь совсем прост. На одной — назовем ее избранной — сфере кончается $n-1$ трубочка, соединяющая ее с одной из остальных сфер. Если убрать все остальные трубочки, кроме этих, то объединение оставшихся частей сфер и выбранной сферы с выбранной $n-1$ трубочкой диффеоморфно единой сфере с парой дырок для прикрепления каждой из оставшихся трубочек, число которых есть $g=(n-2)+(n-3)+ +\ldots+1=(n-1)(n-2)/2$. Добавление каждой из этих оставшихся трубочек — это приклеивание ручки. Таким образом, род неособой кривой степени n дается этим числом оставшихся трубочек g.

Например, для $n=1$ или 2 род кривой равен 0, поэтому интегралы вдоль прямых и вдоль кривых второй степени (т. е. интегралы, содержащие квадратные корни из многочленов второй степени) берутся в элементарных функциях. Если же $n=3$, то род подобной неособой кубической кривой равен 1 и она вещественно диффеоморфна поверхности тора (получающегося сглаживанием особенностей треугольника из трех попарно пересекающихся сфер).

Кривые степени 3 рода 1 называются *эллиптическими* (так как вычисление длины дуги эллипса сводится к интегрированию рациональной функции вдоль такой кривой). Алгебраически уравнение кубической кривой записывается в надлежащей системе аффинных координат на проективной плоскости в виде $\{y^2=x^3+ax+b\}$. Соответствующая риманова поверхность алгебраической функции $y=\sqrt{x^3+ax+b}$ получается из двух копий плоскости комплексного переменного x, разрезанных по двум непересекающимся отрезкам, один из которых соединяет два корня многочлена x^3+ax+b, а другой соединяет третий корень с бесконечностью.

Оба листа склеены так, что при переходе через каждый разрез мы всегда оказываемся на другом листе, чем тот, с которого начинали. Эта поверхность получается из пары сфер Римана с двумя дырами на каждой при перекрестном склеивании краев дыр каждой сферы с краями дыр другой сферы, что и приводит к тору.

Такой же тор получается и для квадратного корня из многочлена степени 4 (бесконечность заменяется здесь четвертым корнем). Эти интегралы — они содержат квадратный корень из многочлена степени 4 — тоже эллиптические. Если же степень подкоренного многочлена выше, то будут получаться римановы поверхности бóльшего рода g (для получения рода g степень должна быть $2g+1$ или $2g+2$). Но в то время как для рода $g=1$ мы получаем этим способом из многочленов степени n все римановы поверхности, вещественно диффеоморфные тору (в каждом из случаев $n=3$ или 4), то римановы поверхности бóльшего рода так получаются не все, а только очень специальные (они называются гиперэллиптическими, т. е. обобщающими эллиптические кривые).

Для уравнений алгебраических кривых высокой степени $\{H(x,y)=0\}$ одного знания степени недостаточно для заключения о рациональности кривой рода $g=0$. Все неособые кривые степени n имеют одинаковый и большой род, даваемый формулой Римана, так что рациональные следует искать среди особых кривых.

Оказывается, здесь тоже имеется простой общий критерий: появление особенностей контролируемым образом уменьшает род, так что для рациональности нужно только, чтобы у кривой было достаточно много особенностей (хотя бы комплексных).

А именно, каждая простая особая точка (самопересечение кривой) заменяет одну трубочку в построении римановой поверхности кривой, близкой к набору n прямых, а потому уменьшает род на 1, так что достаточно иметь $(n-1)(n-2)/2$ точек самопересечения, чтобы род был нулем и все абелевы интегралы вдоль этой кривой выражались бы в элементарных функциях.

Например, так обстоит дело для кубических кривых, имеющих хоть одну особую точку: $(3-1)(3-2)/2=1$, так что все особые кубические кривые рациональны. Комплексная точка самопересечения может выглядеть на вещественной кривой как изолированная точка (пример: $\{y^2=x^3-x^2\}$).

Доказательство теоремы Абеля об интегралах топологическое: если род больше нуля, то характер многозначности выражающей интеграл комплексной функции (измеряемый надлежащей группой монодромии, т. е. неоднозначности) более сложен, чем таковой для всех комбинаций элементарных функций (главное здесь — абелевость, т. е. коммутативность, групп монодромии исходных многозначных элементарных функций $z^{1/m}$ и $\log z$, через которые выражаются и остальные).

Работы Абеля, связавшие так много областей математики, были наивно представлены им для публикации Парижской академии наук, которая поручила Коши оценить их. В результате тексты Абеля были потеряны на много лет, так как Академия оказалась[6] не в состоянии их оценить вследствие их чрезмерной для нее новизны (впрочем, подобным же образом Коши и Академия обошлись несколькими годами позже и с Галуа). Хотя Лиувилль в конце концов и опубликовал их обоих, топологические идеи Абеля остаются и сегодня в тени и не включаются почему-то в универси-

[6]Абель жаловался, что французские математики хотят только всех учить, не желая сами ничему учиться: один из них разбирается только в своей небесной механике (это Лаплас), другой — только в теории упругости (это Пуассон), третий — только в теории тепла (это Фурье), а Коши думает только о своем приоритете в решении всех на свете вопросов (например, проблемы Ферма).

Французы же опубликовали в газете, когда Абель в конце концов уехал от них в Христианию, что долго живший в Париже бедняк был настолько беден, что вынужден был тетские учебники анализа (Гурса их еще упоминал, но Бурбаки, пытаясь овладеть теоремой Стокса и векторным анализом, поставил себе задачей преодолеть влияние Гурса и блестяще с этим справился, хотя до не понятой им теоремы Стокса так и не добрался).

В 1963—64 гг. я читал лекции об этой топологической теории *школьникам* московской школы-интерната №18, и один из них (В. Б. Алексеев) впоследствии их опубликовал в виде книжки «Теорема Абеля в задачах и решениях». М.: Наука, 1976. Я воспользовался этой темой, чтобы за семестр рассказать школьникам с нулевыми начальными знаниями такие вещи, как комплексные числа, «формулу Муавра», фундаментальную группу, топологию римановых поверхностей, разветвленные накрытия, монодромию, группы преобразований и симметрий, группы перестановок, доказательство неразрешимости алгебраических уравнений высших степеней.

А. Г. Хованский, бывший тогда моим учеником, перенес идеи моего топологического доказательства теоремы Абеля на дифференциальную алгебру и теорию линейных дифференциальных уравнений, где группа монодромии состоит не из перестановок, а из линейных операторов, да и понятие фундаментальной группы нужно усовершенствовать из-за бесконечного, вообще говоря, числа точек ветвления. К его достижениям в этой области относится доказательство невозможности представления решений дифференциальных уравнений, вроде гипергеометрического уравнения Гаусса, причем он доказал не только непредставимость при помощи элементарных функций и их интегралов, но непредставимость даже и если, кроме того, допускать к участию в формуле для решения произвольные однозначные голоморфные функции от нескольких переменных.

В самые последние годы я прочел в журнале «Topological Methods in Nonlinear Analysis» статью молодого польского математика (долго учившегося в Москве) «Новое топологическое доказательство теоремы Абеля», как две капли воды похожее на мои лекции 1963—64 гг., изданные В. Б. Алексеевым в 1976 г. Причем в списке литературы книга Алексеева упомянута (рядом с цитатой из книги Новикова, Дубровина и Фоменко, указавших, что топологическое доказательство «существует», но не сославшихся на какое-либо его изложение).

возвращаться в свою область Сибири, называемую Норвегией, пешком по льду Атлантического океана. На самом деле Абель переправлялся на одном из первых пароходов, и денег на билет у него вполне хватало.

Из недавно выпущенной издательством «Шпрингер» интереснейшей биографии Абеля можно узнать, в частности, что его первоначальное математическое образование дал ему отец-священник, обучавший его, будто $0+n=0$. Это вселяет надежду, что и вред от подготавливаемой «модернизации» школьного обучения в России будет меньше, чем тот, которого хотели бы добиться реформаторы (например, сокращая число часов на обучение математике в два-три раза, а логарифмы, литературу или физику желая отменить вовсе).

Вопрос о том, кого считать автором того или иного математического достижения, не столько научный, сколько социальный.

Ю. И. Манин в своей цитированной выше статье о «математике как профессии и призвании» пишет, что никакое разумное правительство или сообщество не станет кормить людей, занимающихся тем переливанием из пустого в порожнее, к которому он приравнивает все занятия математикой: ведь если в результате игры с символами и получается что-либо полезное, то это просто означает, что оно содержалось уже в исходных предпосылках.

Поэтому, заключает философ, математикам пришлось изобрести свой метод, как получать гранты, стипендии и тому подобное субсидирование своей науки: этот метод состоит в том, чтобы *претендовать* на открытия, которых не совершал (и к которым жонглирование цепочками символов и не может привести по самой своей природе).

Но это претендование — не простое искусство, и чтобы обучать ему не испорченную еще им молодежь, служат, согласно Манину, колледжи, университеты и факультеты, где именно и обучают искусству саморекламы и претенциозности. Это, будто бы, и составляет *суть математического образования*.

Хотя я категорически не согласен с этим философскими мнениями как с идеалом, я вынужден согласиться, что объективное рассмотрение состояния дел нередко их подтверждает, как констатацию беды. По долгу службы я участвую в комиссиях для отбора из числа сотен кандидатов на преподавательские и профессорские места в ряде университетов, например, в Париже. И я заметил, что при честном демократическом голосовании всегда остаюсь в меньшинстве, голосующем за сильных кандидатов, а наибольшее число голосов получает далеко не самый сильный кандидат (а часто даже и самый слабый из претендентов на место).

Мои коллеги так объяснили мне это явление: «Мы прекрасно понимаем, кто сильнее, но *голосуем за слабейшего, часто просто из чувства самосохранения* — ведь через пару лет он будет нашим *соперником* при очередном продвижении, и поэтому *лучше выбрать кого послабее*. К тому же, *если бы мы, как ты, считались только с научными достижениями и перспективами кандидатов, то нам пришлось бы на все посты назначать одних русских*: они подготовлены гораздо лучше всех остальных, и это нам всем совершенно очевидно».

Среди обсуждавшихся тогда кандидатов русских как раз не было, но в общих чертах я скорее согласен с высокой оценкой их подготовки. Дело в том, что уровень научного образования во всех странах неуклонно снижается, а Россия и в этом общемировом процессе, как и в других, отстает. Например, наши школьники до сих пор свободно складывают дроби, тогда как американские *студенты* давно уже думают, будто $1/2+1/3=2/5$. Калифорния приняла даже постановление, подготовленное комиссией, руководимой Нобелевским лауреатом Гленом Сиборгом, и оспаривавшееся федеральными властями как «антиконституционное», требовать от поступающих в университеты математиков умение делить 111 на 3 без компьютера (чего большинство из них не умеет). Сенаторы пытались противостоять этому обучению «вещам, которые им (сенаторам) непонятны и недоступны».

Международный математический союз, членом Исполнительного комитета которого я сейчас (до августа 2002 г.) являюсь (а был даже и вице-президентом), демократическим голосованием своей Ассамблеи принимает важные для оценки математиков во всем мире решения, например, о переводе той или иной страны из одной «категории» в другую.

Это деление на категории (от первой до пятой) было введено в начале XX в., во времена Пуанкаре и Гильберта, по простому принципу: в некоторых странах *один* серьезный математик — их включили в *первую* категорию, и так далее до пятой включительно, а больше пяти математиков мирового класса в одной стране «не бывает».

При различных международных голосованиях страны разных категорий имеют разное число голосов, так что принадлежать к той или иной категории практически важно (меняется и членский взнос страны). При обсуждении перевода страны в категорию повыше предъявляется список работ, опубликованных этой страной в предыдущие годы.

Рассматривая эти списки, я заметил, что была бы нужна нулевая категория: огромное большинство опубликованных работ не заслуживало публикации. В разных случаях у меня получались, в зависимости от критериев, немного разные статистики, но в среднем *число напрасных публикаций оказывается бо́льшим* 90% (*возможно, мировое среднее* — 99%)[7].

Статьи, нужные прежде всего их авторам для карьеры и трудоустройства, легко опознаются по названиям (вроде «Об одном свойстве одного решения одного дифференциального уравнения»).

---

[7]Подчеркну, что речь здесь идет не о моих личных интересах, а о попытке объективной оценки работ по степени их новизны: лично меня интересует по своей тематике и немало таких работ, публикацию которых я, по рассмотрении, признаю ненужной. Типичный результат (верной) ненужной работы такой: шесть раз по семь дюжин составляет сорок две дюжины. Не нужно это публиковать потому, что аналогичный результат для яблок вместо дюжин хорошо известен.

Чтобы понимать, что такое математика, вовсе не обязательно быть математиком. Маяковский сказал, что «человек, открывший, что дважды два — четыре, был великим математиком, даже если он открыл это, считая окурки. А тот, кто теперь считает по той же формуле гораздо бо́льшие предметы, например локомотивы, никакой не математик».

Именно к поощрению или прославлению такого рода массовой деятельности чаще всего приводят принимаемые «демократическим большинством» решения (включая даже присуждение самых престижных наград, вроде нобелевских — чтобы не говорить о математике — премий): ведь это демократическое большинство как раз и состоит из занимающихся «одним свойством...» так называемых «узких специалистов».

Они распространяют легенду, будто в наш век никто и не может понимать больше, чем один узкий вопрос (об особенностях строения мизинца левой ноги у обезьян такого-то вида, живших в таком-то тысячелетии). И никакие попытки вернуться к более широким точкам зрения не оказываются успешными: ведь люди яростно отстаивают интересы своего клана и свои собственные. Я даже решил, в конце концов, публиковать свои личные мнения о заслуживающих внимания работах, так как *научный вес мнения одного человека легко может в описанных условиях быть больше, чем подлинная* (научная, а не рекламная) *ценность «демократических» решений целых научных комитетов этих «специалистов»*[8].

Статью Манина, о которой я здесь рассказываю, заказал ему я сам, для книги, подготавливавшейся и выпущенной к концу тысячелетия Международным математическим союзом.

Во время Берлинского Всемирного Математического Конгресса 1998 г. мы встретились с Маниным, и я сказал ему, что срок сдачи книги в типографию уже подходит, а его статьи еще нет. Тогда Манин рассказал мне, что пишет статью, и сообщил ее первые два тезиса — о том, что такое математика и что такое математическое образование (которые я пересказал выше).

Я стал резко возражать, и Манин обещал письменно ответить на мои возражения своим третьи тезисом, что он вскоре и сделал. Вот этот тезис. Введение к нему я понял так: «Некоторые идиоты утверждают, будто математика *полезна* для прогресса человечества, физики, техники, инженерного дела...» (в тексте статьи слова «идиоты» нет, но утверждал это в Берлине именно я, который тоже не назван в статье).

Третий тезис посвящен как раз вопросу о *пользе математики*. Здесь цитируется мнение Г. Харди (в его книге «Апология математика»), комментирующего слова Гаусса, что «теория чисел — королева математики». По словам Харди, *главная общая черта королевы и теории чисел* —

[8]Мнение одного Ньютона или Пуанкаре может значить больше, чем голосование десятков Лейбницев или Харди (даже после того, как Лейбниц признал ошибочность своего мнения, будто производная от произведения равна произведению производных сомножителей, и даже если бы Харди признал сделанные после 50 лет, в противоречие с его мракобесными заявлениями, цитиремыми ниже, работы Эйлера или Гаусса).

это полная бесполезность обеих. Харди, обсуждая вопрос о том, какими задачами математику стоит заниматься, сделал для себя следующий вывод: можно заниматься только *либо теорией чисел, либо теорией относительности, потому что только эти две науки не имеют сейчас* (*и не получат никогда в будущем*) *никаких полезных применений* (*особенно в военном деле*)[9].

Я расскажу сейчас, какое видоизменение получили эти доводы Харди в руках его современных последователей, вроде Манина. Но они стараются не цитировать слова ни о теории относительности (являющейся основой атомной бомбы), ни о теории чисел. Использование теории чисел секретными службами, занимающимися кодированием и декодированием информации, является сейчас важнейшим источником финансирования математики. Я слышал даже, что один из крупнейших во всем мире специалистов по теории чисел давно уже удостоился за это генеральского чина в соответствующем (неназываемом) ведомстве.

Независимо от совета Харди, я занялся в последнее время приложениями теории относительности к теории чисел.

Тезис Манина состоит в том, что *польза от математики состоит вовсе не в способствовании какому-либо прогрессу, а, скорее, в ее «огромном вкладе в решение основной проблемы постиндустриального человечества».*

Проблема же эта, по Манину, состоит вовсе не в ускорении какого-либо прогресса человечества, а в том, чтобы этот прогресс всеми силами тормозить.

«Ведь,— говорит он,— если бы умники, занимавшиеся проблемой Ферма, усовершенствовали вместо этого самолеты и автомобили, то вреда для человечества было бы куда больше!»

Математические задачи, по Манину, служат именно этой цели торможения: они *отвлекают* внимание умных людей от более опасных занятий.

Дальнейшее рассуждение такое: проблема Ферма «к сожалению, теперь утратила свою полезность», так как она уже решена Уайлсом и потому больше не способна отвлекать. Следовательно, нужно сформулировать другие (столь же нелепые) вопросы, которые будут отвлекать математиков следующих поколений.

[9]Среди многих других высказываний ужасной «Апологии» Харди, процитируем и такие непростительно мракобесные: «без Абеля, Римана и Пуанкаре мир ничего бы не потерял»; «баллистика и аэродинамика отталкивающе безобразны и невыразимо скучны»; «я не знаю продвижения в математике, инициированного человеком старше 50 лет, а в 60 лет от математика бесполезно ожидать оригинальных идей»; «никому еще не удалось обнаружить военных приложений теории чисел и теории относительности»; «слезоточивый и горчичный газы — самое гуманное оружие».

Гильберт уже попытался сделать это в сформулированных им на Всемирном Математическом Конгрессе 1900 г. в Париже «Проблемах», но теперь нужен новый список отвлекающих вопросов (Манин, прежде всего, напоминает «проблему близнецов», т. е. соседних простых чисел, разность которых равна 2, как 5 и 7, 17 и 19, 29 и 31, ... : конечно ли число таких пар, или же бесконечно?).

§ 3. Проблемы Гильберта

Проблемы Гильберта оказали удивительно мало влияния на развитие математики XX в. Одна из самых красивых из них — о равносоставленности многогранников одинакового объема[10] — была на самом деле решена (с публикацией решения) за несколько лет до того, как Гильберт ее поставил. А открытые сейчас связи этой проблемы с квантовой теорией поля Гильберт не заметил. Их обнаружили лишь вследствие странного совпадения сороказначных ответов в компьютерных вычислениях.

На развитие математики в XX в. куда большее влияние оказали работы ученика Гильберта, Германа Вейля (развивавшего, скорее, идею Пуанкаре, что основной задачей математики XX в. будет создание математического аппарата теории относительности и квантовой физики)[11].

Я расскажу здесь немного о тех двух из пары десятков проблем Гильберта, в которых идет речь о топологии — наиболее быстро развивавшейся в XX в. области математики, созданной прежде всего А. Пуанкаре, теоремы, ошибки и задачи которого до сих пор определяют состояние этой науки.

---

[10] В отличие от многоугольников, многогранники равного объема не всегда равносоставлены, т. е. не всегда могут быть разбиты на взаимно конгруэнтные части.

[11] Не все знают, как огромна была роль Г. Вейля в становлении квантовой механики. Шрёдингер рассказывает, что ему никак не удавалось получить наблюдаемые в эксперименте спектры атомов исходя из уже известной двойственности волна—частица, так как, хотя он уже и написал «уравнение Шрёдингера», спектр неизменно получался непрерывным (как в интеграле, а не в ряде Фурье), из-за того что область, где рассматривалось уравнение, простиралась, естественно, неограниченно далеко.

Но Г. Вейль, которому Шрёдингер рассказал о своих трудностях, подсказал ему, что он, Вейль, уже один раз преодолел подобную же трудность в теории упругости, где он рассматривал колебания и волны в неограниченных областях: для получения дискретного спектра нужно наложить граничные условия на бесконечности, например, потребовать, чтобы пси-функция была интегрируема с квадратом модуля. Шрёдингер немедленно последовал этому совету, получил требуемый спектр атома водорода, и волновая квантовая механика быстро сменила предшествующую ей матричную.

Ошибка, о которой я здесь говорю,— это отождествление гомотопий с гомологиями, опровергнутое самим Пуанкаре при построении им из додекаэдра «трехмерного многообразия Пуанкаре», на котором каждая замкнутая кривая гомологична нулю (т. е. является границей подходящей двумерной поверхности), но не каждая гомотопна нулю (т. е. непрерывно стягивается в точку). Это трехмерное многообразие проще всего задать системой из трех уравнений в шестимерном вещественном (трехмерном комплексном) пространстве:

$$\{x^3+y^5+z^2=0,\ |x|^2+|y|^2+|z|^2=1\}. \tag{3}$$

Исправление этой ошибки Пуанкаре привело к раздельному развитию двух наук: теории гомологий и теории гомотопий. К теории гомологий относится, например, описанное выше исследование абелевых интегралов в зависимости от рода римановой поверхности. К теории гомотопий относится, например, изучение монодромий алгебраических функций (описанное выше при исследовании неразрешимости уравнений в радикалах).

Многообразие Пуанкаре послужило также прообразом *«экзотических сфер» Милнора — гладких многообразий, гомеоморфных обычной сфере, но не диффеоморфных ей.* Для семимерной сферы таких многообразий, не диффеоморфных друг другу, 28, и одно из них, так называемая «сфера E_8», задается подобным уравнению (3) *уравнением Брискорна* в десятимерном пространстве $\mathbb{C}^5$:

$$\{x^3+y^5+z^2+u^2+v^2=0,\ |x|^2+|y|^2+|z|^2+|u|^2+|v|^2=1\}.$$

Чтобы получить остальные экзотические семимерные сферы Милнора, нужно здесь заменять показатель 5 на число $6k-1$ и взять значения $k=1,\ldots,28$ (при одном из этих значений k получится многообразие, странно диффеоморфное обычной семимерной сфере!).

Возникшая здесь новая наука — *дифференциальная топология* — является наукой о гладких многообразиях и одной из самых фундаментальных областей математики. Американское математическое общество в томе, посвященном математическому наследию А. Пуанкаре, сообщило, что Пуанкаре якобы «не был знаком с понятием гладкого многообразия» (которое он-то и ввел в математику). Но о социальных причинах подобного «демократического» пересмотра истории науки и оценки ее достижений я уже сказал выше.

«Проблема Пуанкаре» состоит в том, гомеоморфно ли сфере любое замкнутое связное трехмерное многообразие, на котором всякая замкнутая кривая стягиваема в точку. Она и сегодня остается одной из основных проблем топологии.

Между прочим, одним из основных достижений топологии XX в. явилось открытие того факта, что в многомерном (иногда даже бесконечномерном) случае многое упрощается. Например, все узлы развязываются уже в четырехмерном пространстве (и спириты утверждали, что умеют это использовать), а проблема Пуанкаре решена для многомерных сфер (начиная с размерности 5 гипотеза о гомеоморфности сфере всякого многообразия, где стягиваемы в точку все сферы меньшей размерности, верна).

Топология — важнейшая часть математики XX в., и удивительно, как мало о ней думал Гильберт. Что же касается самого понятия гладкого многообразия, то его обсуждал уже Лукреций, утверждавший в «Природе вещей» («De natura rerum», I в. до н. э.), что атомы делятся по свойствам своей поверхности на следующие три категории (сейчас математики их называют гладкой, кусочно линейной и топологической): некоторые скользят друг по другу своими гладкими поверхностями, другие, подобно многогранникам, сталкиваются своими углами, третьи же, подобно рыболовным крючкам, имеют острия-крючочки и способны крепко соединяться друг с другом этим негладкими выростами.

Топологические проблемы Гильберта имеют в его списке номера 13 и 16. В обоих случаях речь идет о самых первоначальных, исходных вопросах математики, поэтому в российских обзорах проблем Гильберта их обычно пропускают, и я постараюсь восполнить этот недостаток.

В тринадцатой проблеме это вопрос о решении общего алгебраического уравнения степени n,

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

При $n \leqslant 4$ такое уравнение решается в радикалах, а при $n \geqslant 5$, вообще говоря,— нет. Но все же при помощи радикалов можно (подобно тому как это делают для решения квадратного уравнения) свести всякое уравнение степени 5 к специальному уравнению

$$x^5 + ax + 1 = 0. \tag{4}$$

Специальную алгебраическую функцию одного переменного $x(a)$, определяемую этим уравнением, достаточно добавить к радикалам, чтобы через комбинации этих функций и рациональных функций выразить функцию $x(a_1, \ldots, a_5)$, означающую корень общего уравнения степени 5 с заданными коэффициентами.

Общее уравнение степени 6 сводится в таком же смысле к специальной алгебраической функции $x(a, b)$ от двух переменных, определяемой уравнением

$$x^6 + ax^2 + bx + 1 = 0.$$

Точно так же для решения общего уравнения степени 7 достаточна специальная алгебраическая функция $x(a, b, c)$ от трех переменных, определяемая уравнением

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0,$$

о которой и идет речь в проблеме Гильберта. Вопрос состоит в том, «*а нужны ли вообще функции трех переменных*?» — *можно ли выразить эту функцию $x(a, b, c)$ в виде конечной комбинации функций, каждая из которых зависит лишь от двух переменных*?

Примером такой комбинации («*суперпозиции*» *по Гильберту*) является функция $u(a, b, c) = v(a, w(b, c))$: две функции ($v$ и w), от двух переменных каждая, составили в качестве суперпозиции новую функцию (u) от трех аргументов. В общем случае комбинируются в сложную функцию не две функции, а любое их конечное число, причем каждый аргумент может входить в суперпозицию и несколько раз.

При постановке этого вопроса чрезвычайно важно фиксировать класс функций, о которых идет речь: ответы для разных классов удивительно непохожи.

Гильберт уже знал, что «разрывных функций, существенно зависящих от трех переменных, нет»: если допускать любые разрывы у составляющих суперпозицию функций, то число аргументов становится несущественным (главным образом из-за равномощности кубов разных размерностей друг другу, в том числе — просто одномерному отрезку).

Поэтому Гильберт поставил свой вопрос так: *а можно ли выразить определяемую приведенным выше уравнением степени 7 функцию $z(a, b, c)$ суперпозицией н е п р е р ы в н ы х функций двух переменных*?

Замечательный прогресс был достигнут лишь через более чем полвека, когда А. Г. Витушкин разобрал аналогичный вопрос для *гладких функций вместо непрерывных*.

Его результат означал, что *степень сложности p-гладкой* (p *раз непрерывно дифференцируемой*) *функции от n переменных определяется величиной дроби n/p*: чем больше число аргументов n, тем функция сложнее, а чем больше гладкость p, тем проще.

А именно, представление p-гладких функций n переменных суперпозициями q-гладких функций k переменных возможно заведомо не для всякой разлагаемой функции класса (p, n), если сложность представляющих функций меньше, чем сложность представляемых, т. е. если

$$\frac{k}{q} < \frac{n}{p},$$

то представить столь гладкими функциями можно не всё.

Например, три раза дифференцируемые функции трех переменных заведомо не все представляются комбинациями три же раза дифференцируемых функций двух переменных: если представление суперпозицией и возможно, то только с неизбежным снижением гладкости представляющих функций (по меньшей мере до $q \leqslant 2$).

Основным техническим средством, которое использовал Витушкин, были оценки *топологической сложности вещественных алгебраических многообразий*, ранее полученные И. Г. Петровским и О. А. Олейник в их работах о другой (шестнадцатой) проблеме Гильберта, о которой я расскажу ниже.

Доказательства Витушкина были позже усовершенствованы А. Н. Колмогоровым, который дал естественно-научное, т. е. выходящее за рамки математики, истолкование витушкинской сложности n/p в терминах теории передачи информации, создав свою *теорию «эпсилон-энтропии» классов функций* (эпсилон — это ε, греческая буква, обычно обозначающая в математике малое число).

Колмогоровская эпсилон-энтропия измеряет минимальное число (двоичных) знаков, необходимое для указания функции из изучаемого класса с заданной точностью эпсилон (это число необходимых двоичных знаков растет при уменьшении величины ε, и «сложность» определяет именно скорость этого роста).

Рассмотрим, ради общности определения общего понятия, какое угодно компактное метрическое пространство M и зададимся целью указать его точку с погрешностью, не превосходящей ε. Если в M выбрана ε-сеть, т. е. такое конечное множество (из $N(\varepsilon)$ точек), что шары радиуса ε с центрами в этих точках целиком покрывают все M, то достаточно примерно $\log_2(N(\varepsilon))$ знаков: нужно ведь только указать одного представителя из N элементов сети, он и будет ε-приближенно задавать любой элемент своего шара.

Для отрезка $M=[0,1]$ величина N растет как $1/\varepsilon$, а для квадрата (куба) со стороной (ребром) единичной длины — как $(1/\varepsilon)^2$ (соответственно, как $(1/\varepsilon)^3$), так что скорость роста величины N определяется размерностью кодируемого пространства M.

В случае пространства M гладких функций (на компактном кубе в n-мерном пространстве и с ограниченными константой производными до порядка p, чтобы это пространство функций было компактным) размерность пространства бесконечна, но число $N(\varepsilon)$ элементов сети конечно, хотя оно и растет при уменьшении ε быстрее любой (отрицательной) степени величины ε,— например, растет экспоненциально.

Колмогоров доказал, что *логарифм числа $N(\varepsilon)$ точек минимальной ε-сети растет в этом случае как* $(1/\varepsilon)^{n/p}$. Если бы функции k переменных, участвовавшие в суперпозиции, имели гладкость q, то с их помощью можно было бы получить для представляемых функций сеть, логарифм числа точек которой был бы порядка $(1/\varepsilon)^{k/q}$. Если это число меньше минимально возможного для функций n переменных гладкости p, то, значит, предполагавшееся представление суперпозициями функций столь большой гладкости невозможно (причем не только *существуют* непредставимые функции, но их даже *большинство*).

Позже Колмогоров показал, что если отказаться от гладкости и допускать к участию в суперпозиции все непрерывные функции, то любая непрерывная функция от n переменных представляется суперпозицией непрерывных функций от всего трех переменных, а затем Арнольд представил их и суперпозициями непрерывных функций двух переменных. В закончившей эту серию работ теореме Колмогорова единственная употребляемая функция двух переменных — это сумма аргументов $x+y$, а все остальные непрерывные функции, из которых составляется представляющая все непрерывные функции от n переменных суперпозиция, зависят каждая от одной лишь переменной.

По моему мнению, Гильберту не следовало забывать при формулировке 13-й проблемы и об *алгебраических* представляющих функциях от меньшего числа переменных, чем представляемая.

Например, действительно ли для решения общего алгебраического уравнения степени 6 *необходимо* использовать алгебраическую функцию *двух* переменных, или, *может быть, как и для уравнения степени пять, можно обойтись алгебраическими функциями от одной переменной*?

Сведение общего уравнения степени n к функциям от $n-4$ переменных удается, но, начиная с некоторого n, можно избавиться и от еще одной переменной, так что достаточно $n-5$ аргументов. Это явление продолжается и дальше, так что дело сводится к алгебраическим функциям от не более чем $n-s$ переменных, если исходная степень уравнения была большей некоторого (довольно быстро и таинственно растущего вместе с s) числа $n(s)$.

Доказать несводимость к суперпозициям алгебраических функций от меньшего, чем у исходной функции, числа переменных (или хотя бы несводимость к алгебраическим функциям от одной переменной) никто пока не сумел. Я полагаю, однако, что такой алгебраической представимости препятствует *топологическая сложность ветвления* представляемых функций, так что представление оказывается невозможным не только в классе алгебраических функций, но и в классе топологически эквивалентных им (во всей области комплексных значений аргументов) комплексных непрерывных многозначных функций комплексных аргументов с топологически таким же ветвлением, как у алгебраических функций малого числа переменных.

Единственным успехом в этом направлении оказалось использование вычисленных мною ради этой цели когомологий групп кос, позволившее построить своеобразную *теорию «характеристических классов» алгебраических функций*.

Этим способом удается доказывать непредставимость алгебраических функций *полными суперпозициями* из алгебраических функций от меньшего числа аргументов, чем у разлагаемой в суперпозицию функции. *Полная суперпозиция* определяется как сложная функция так, что обязательно учитываются все ветви сложной функции: m-значная функция от n-значной имеет ровно mn значений, а не меньше. Например, формула $\sqrt{x}+\sqrt{4x}$ определяет, как *полная* суперпозиция, *четырехзначную* функцию, вовсе не совпадающую с двузначной функцией $3\sqrt{x}$.

Непредставимость такими полными суперпозициями функций со слишком сложным для представимости ветвлением удается доказать. Но, к сожалению, в смысле этой теории «неразрешимыми в радикалах» оказываются уже уравнения младших степеней 3 и 4 (потому что стандартные классические формулы доставляют, кроме нужных трех или четырех корней уравнения, еще много «паразитных» значений соответствующих суперпозиций радикалов, не удовлетворяющих исходному уравнению).

Избавиться от требования полноты изучаемой суперпозиции в теории характеристических классов алгебраических функций пока не удалось. Я отмечу только, что здесь можно надеяться на помощь *теории смешанных структур Ходжа*: эта топологическая теория снабжает цикл на особом алгебраическом многообразии указанием о том, от гладкого многообразия какой размерности этот цикл происходит. Эта размерность происхождения не инвариантна относительно гомеоморфизмов, если они не являются алгебраическими, но сохраняется при алгебраических отображениях.

Чтобы немного объяснить, о чем идет речь, рассмотрим треугольник из трех эллиптических кривых. Это приводимое особое алгебраическое многообразие состоит из трех гладких (торических с вещественной точки зрения) компонент, трансверсально пересекающихся попарно в трех точках A, B, C, по одной для пары.

Среди вещественно-одномерных циклов этого вещественно-двумерного многообразия теория смешанных структур выделяет те, которые можно реализовать на одной неприводимой компоненте: они «происходят» из этой (гладкой) компоненты.

А замкнутый треугольный путь $ABCA$ (определенный этим условием по модулю сумм циклов описанного раньше класса) имеет уже принципиально иное происхождение, определяемое комбинаторикой пересечений гладких компонент, а не их внутренностями.

Запоминание циклом размерности того гладкого многообразия, которое его породило, позволяет надеяться на использование этой структуры для доказательства невозможности редукции более многомерной структуры функции многих переменных к маломерным.

Шестнадцатая проблема Гильберта начинается с одной из старейших и фундаментальнейших математических задач: *как может выглядеть вещественная алгебраическая кривая степени* n (заданная на плоскости с координатами (x, y) уравнением $\{f(x, y) = 0\}$, где f — многочлен степени n)?

В случае степени 2 вопрос решен еще древними: кривая — это эллипс, гипербола или парабола. Но Гильберт предпочитает считать эти три кривые одинаковыми: чтобы их сравнить, надо только поместить их на бóльшую нашей обычной плоскости *проективную плоскость*, где парабола замыкается одной бесконечно удаленной точкой, а гипербола — двумя (после чего она становится диффеоморфной окружности и даже проективно ей эквивалентной).

Топологические описания кривых степеней 3 и 4 были получены Ньютоном и Декартом, Но уже для кривых степени 6 вопрос был еще открыт во время доклада Гильберта, и Гильберт так сформулировал первый вопрос своей 16-й проблемы: *дать топологическую классификацию расположений всех алгебраических кривых степени* 6 *на вещественной проективной плоскости*.

Наибольшее число компонент связности вещественной алгебраической кривой равно $g + 1$, где g — род кривой (т. е. $g = (n - 1)(n - 2)/2$ для гладкой кривой степени n), — это «теорема Харнака». По этой теореме, например, наибольшее число компонент связности («овалов», диффеоморфных окружности, ограничивающей круг) у алгебраической кривой степени 6 равно 11.

Гильберт сообщил в докладе, что он знает, как именно могут быть расположены эти овалы, когда их число максимально, т. е. равно 11: *только один из них содержит другие внутри своего «круга», а число этих внутренних овалов,— утверждал Гильберт,— либо 1, либо 9.*

Как могут быть расположены овалы кривой степени 8 (их число не превосходит 22), неизвестно и сегодня: построено около 90 реализующихся расположений 22 овалов и найден список из примерно сотни расположений, исчерпывающий для 22 овалов все расположения, не противоречащие уже доказанным теоремам. Но для примерно полудюжины из этих кандидатов их реализуемость неизвестна (точное число оставшихся трудных случаев меняется не то ежегодно, но то ежемесячно).

Общее число топологически различных расположений 22 (неалгебраических) овалов составляет много миллиардов, но почти все эти расположения уже исключены доказанными теоремами для алгебраических кривых.

Вопрос о топологическом строении алгебраических многообразий, заданных одним или несколькими полиномиальными уравнениями в вещественном аффинном или проективном пространстве, является одним из фундаментальнейших вопросов всей математики, часто необходимым для исследования самых разных прикладных задач (*где эти уравнения описывают те или иные законы природы*). Например, речь может идти о *фазовых диаграммах* (в термодинамике), о *поверхностях Ферми* (в физике металлов), о *поверхностях Френеля* или *дисперсионном соотношении* (в оптике и в теории распространения волн) и т. д.

На мой взгляд, этот вопрос гораздо важнее и проблемы Ферма, и обсуждавшейся выше «проблемы близнецов» в теории простых чисел. Но, к сожалению, алгебраические геометры не могут помочь решению действительных (real, $\mathbb{R}$) вопросов.

И. Г. Петровский (в 30-е гг.), а затем его ученица О. А. Олейник (примерно около 1950 г.), получили замечательные *оценки сверху для основных топологических инвариантов вещественных алгебраических многообразий — чисел Бетти* (т. е. чисел независимых циклов разных размерностей: например, одномерное число Бетти b_1 для тора равно 2, так как на торе 2 независимых одномерных цикла, параллель и меридиан, а все остальные одномерные циклы — целочисленные линейные комбинации параллели и меридиана).

Результаты Петровского и Олейник прямо продолжают теорему Безу (о том, что кривые степеней m и n пересекаются в не более чем mn точках) и неравенство Харнака (оценивающее сверху количество овалов кривой степени n числом $(n-1)(n-2)/2+1$).

Для алгебраической гиперповерхности[12] степени n в вещественном проективном пространстве размерности m комбинация чисел Бетти оценивается сверху некоторым (довольно сложно описываемым) многочленом степени m от величины n, который в работе Олейник задан длинной цепочкой рекуррентных соотношений, позволяющей все же явно выписать

[12] *Гиперповерхностью* в N-мерном многообразии или пространстве называют подмногообразие коразмерности один, т. е. размерности $N-1$. Например, уравнение $\{x_1=0\}$ задает в пространстве с координатами $(x_1, \ldots, x_N)$ гиперплоскость, а точка — это гиперплоскость на прямой.

Степенью алгебраической гиперповерхности, заданной уравнением $\{f(x)=0\}$, называется степень многочлена f (например, степень прямой на плоскости — единица, а окружности — два).

ответ в каждом конкретном случае (аналогичные ответы приведены и для случая многообразий, заданных системами из нескольких уравнений, как, например, кривые в пространстве).

Лет пятнадцать спустя после работы Олейник новые оценки чисел Бетти вещественных алгебраических многообразий опубликовали, независимо друг от друга, Дж. Милнор и Р. Том. При сравнении с результатами Олейник выяснилось, что их оценки в несколько (а иногда и много) раз слабее оценок Олейник, т. е. что они оценивают числа Бетти сверху гораздо большим числом, чем истинно наблюдаемые в примерах величины.

Впоследствии все эти оценки цитировались на Западе как «оценки Милнора—Тома», хотя у самих этих замечательных авторов и была ссылка на исходную работу Олейник (с лучшими и значительно более ранними, чем у них, результатами, уже использованными Витушкиным). Здесь сто́ит, впрочем, заметить, что работа Тома содержала замечательное общее *неравенство Смита*

$$\sum b_i(\mathbb{R}M) \leqslant \sum b_i(\mathbb{C}M),$$

оценивающее сверху сумму чисел Бетти вещественного многообразия через сумму чисел Бетти множества всех комплексных точек, удовлетворяющих тому же уравнению. Неравенство Харнака является частным случаем этого неравенства Смита. Для вещественной кривой из r овалов сумма ее чисел Бетти равна $2r$ (каждый овал вносит свой вклад: по единичке в число компонент связности, $b_0(\mathbb{R}M) = r$, и столько же в число независимых одномерных циклов, $b_1(\mathbb{R}M) = r$).

Для римановой поверхности с g ручками (рода g) сумма чисел Бетти равна $2g+2$: $b_0 = 1$ (одна компонента связности), $b_2 = 1$ (одна вещественно-двумерная поверхность), $b_1 = 2g$ (по одной «параллели» и одному «меридиану» на каждой ручке). Так что для кривой неравенство имеет вид

$$2r \leqslant 2g+2,$$

что и приводит к теореме Харнака:

$$r \leqslant g+1.$$

Правда, известный Харнаку факт достижения равенства $r = g+1$ для некоторых *«максимально вещественных» кривых* (*M-кривых, по терминологии Петровского*) из неравенства Смита не вытекает.

Чтобы вывести из неравенства Смита оценку сверху суммы чисел Бетти многочленом от степени уравнения (или степеней уравнений), достаточно вычислить сумму чисел Бетти для комплексного многообразия. Это легче, чем исходная вещественная задача, благодаря тому что достаточно сосчитать ответ в одном (невырожденном) примере: ведь *в комплексном* *случае все невырожденные объекты данной степени топологически* (*и даже дифференцируемо в вещественном смысле*) *одинаковы*, так как множество всех вырожденных комплексных объектов (например, многочленов с кратным корнем в пространстве всех комплексных многочленов данной степени) задается алгебраическим *комплексным* уравнением, а следовательно, имеет *вещественную коразмерность два* в комплексном пространстве всех рассматриваемых комплексных объектов. Следовательно, гиперповерхность вырождений не делит это комплексное пространство на части (в отличие от вещественного пространства, которое вещественная гиперповерхность вырождений делит на части, образованные, например, множествами вещественных многочленов данной степени с разными числами вещественных корней).

Именно при вычислении ответа для специального примера Том и получил свою слишком грубую оценку: вместо явного вычисления топологических инвариантов комплексных многообразий он использовал их завышенные оценки сверху.

Что касается исходного утверждения (Гильберта) о кривых степени 6, то оно *ошибочно*. Около 1970 г. И. Г. Петровский попросил меня дать отзыв о докторской диссертации своего и А. А. Андронова ученика, нижегородского математика Д. А. Гудкова, который опроверг не только утверждение Гильберта, но и свою предшествующую диссертации работу, в которой он это неверное утверждение Гильберта доказывал.

Результат диссертации Гудкова правилен, и *полный список M-кривых степени* 6*, состоящих из* 11 *овалов, содержит не две, как утверждал Гильберт, а три кривые*: внутри «круга», ограниченного одним из овалов, содержатся либо 1, либо 5, либо 9 других, и все эти три случая реализуются (Гильберт считал невозможным случай пяти внутренних овалов).

Несмотря на то что эти фундаментальные вопросы, в сущности, могут рассматриваться при помощи компьютерных подсчетов (способных, в принципе, даже определить, согласно теореме Тарского—Зайденберга, число компонент связности, на которые дискриминантная гиперповерхность вырожденных вещественных кривых данной степени делит пространство всех таких кривых), практически никакой пользы в этих трудных вопросах компьютеры пока не принесли, хотя настоящие математики, начиная с И. Г. Петровского и Д. А. Гудкова, получили прекрасные результаты.

Продумывая работу Гудкова, я заметил, что не только для кривых степени 6, но и для всех исследованных им кривых четной степени $2k$ проявлялись замечательные сравнения по модулю 8 (числа 1, 5 и 9 внутренних овалов кривой степени 6 не зря идут через четыре).

Общая формулировка этого сравнения (которое я назвал *сравнением Гудкова*) такова: пусть кривая $\{f(x, y) = 0\}$ задана многочленом степени

$2k$, отрицательным на бесконечности. Рассмотрим ту область с краем, D, ограниченную нашей кривой, где $f \geqslant 0$. Тогда *эйлерова характеристика этой области удовлетворяет* (*для кривой степени* $2k$ *с максимальным по теореме Харнака числом овалов*) *сравнению по модулю* 8:

$$\chi(D) \equiv k^2 \pmod 8$$

(для кривых степени 6 $\chi = 9,\ 1,\ -7,\ k = 3$).

Но я знал, что *сравнения по модулю* 8 *являются фундаментальными в топологии четырехмерных многообразий*, и стал думать — а где же в этом вопросе об *одномерных* алгебраических кривых *четырехмерное* многообразие? В конце концов я понял, что для получения четырехмерного объекта надо *комплексифицировать* двумерное вещественное многообразие с краем, $\{f(x, y) \geqslant 0\}$.

Комплексифицировать неравенство не легко, поэтому я заменил его тождеством $\{f(x, y) = z^2\}$ и рассмотрел заданное этим тождеством *накрывающее пространство комплексной проективной плоскости, разветвленное двулистно вокруг римановой поверхности* (*т. е. множества всех комплексных точек*) *нашей кривой*.

Это — компактное вещественно-четырехмерное многообразие, и, применяя известные из топологии его свойства, я сумел доказать сравнение Гудкова по модулю 4 (а впоследствии В. А. Рохлин, которого я об этом попросил, привлекая свои результаты о топологии четырехмерных гладких многообразий, где топологические сравнения для сигнатур по модулю 8 заменяются на более точные дифференциально-топологические сравнения по модулю 16, доказал сравнение Гудкова[13] и по модулю 8).

С этого времени топология вещественных алгебраических многообразий быстро пошла вперед, связавшись, через четырехмерную топологию, и с теорией инстантонов, и с инвариантами Дональдсона, и с квантовой теорией поля. Огромное развитие возникшей таким образом науки подробно освещено в целой серии обзоров В. А. Рохлина, В. М. Харламова и О. Я. Виро. Но я хотел бы подчеркнуть здесь еще раз большое значение более ранних вкладов И. Г. Петровского, О. А. Олейник и Д. А. Гудкова в развитие этой науки.

[13] Релятивистские «преобразования Лоренца» никогда великим физиком Лоренцем не рассматривались: он *поставил* вопрос о группе преобразований симметрии уравнений электродинамики Максвелла, но решил его *неверно*, указав совсем не те преобразования, которые сейчас называют его именем. Пуанкаре, излагая эту ошибочную работу Лоренца в своих лекциях, нашел правильные преобразования, а при публикации этих своих результатов назвал их «преобразованиями Лоренца», и это название сохранилось до сих пор.

Я не знал, что повторяю опыт Пуанкаре, когда вводил термины «сравнения Гудкова» и «индекс Маслова» в свои отзывах на диссертации, где, строго говоря, определенных мною объектов еще не было (хотя и были идеи, которые я превратил в математические понятия).

Странные многочлены из неравенства О. А. Олейник послужили основой другой большой области математики: сравнивая их с более простыми, но доставляющими более грубые оценки, многочленами Милнора и Тома, я заметил, что О. А. Олейник фактически вычисляла *числа целых точек в некоторых специальных выпуклых многогранниках и в их сечениях гиперплоскостями*.

Число целых точек, как и объем выпуклого многогранника, выражается через координаты вершин или через уравнения граней многогранника довольно сложными формулами (из-за чего у Олейник и возникли громоздкие вычисления, которые Том заменил более просто вычислимыми, но зато менее точными оценками топологических инвариантов сверху).

Я вспомнил, что уже встречал подобные же сложности в нескольких вопросах теории особенностей, в частности, при вычислениях смешанных структур Ходжа. С другой стороны, подобные же удручающе сложные формулы встречались мне в теории представлений групп (громоздки уже классические формулы для коэффициентов Клебша—Гордана).

Поэтому я попросил А. Г. Хованского подробно разработать *стереометрию многогранников Ньютона особенностей* для выражения ответов в задачах о вычислении смешанных структур скорее через стереометрические величины, вроде объемов, чем через мои громоздкие многочлены от координат вершин диаграмм Ньютона (что он и сделал, назвав созданную теорию «геометрия формул»).

С другой же стороны я посоветовал И. М. Гельфанду (в ответ на его просьбу разобраться с особенностями из теории представлений) постараться упростить удручающе громоздкие формулы его теории гипергеометрических функций многих переменных, заменяя сложные алгебраические выражения простыми геометрическими словами: «число целых точек в таком-то многограннике», «объем» и т. п.

Эти побочные косвенные последствия работы О. А. Олейник по 16-й проблеме Гильберта привели, таким образом, к замечательным достижениям многих лиц.

Теория многогранников Ньютона, созданная в основном А. Г. Хованским, тесно связана с *геометрией торических многообразий* с одной стороны и с *теорией смешанных объемов* Минковского—А. Д. Александрова—Фенхеля с другой. С третьей же стороны она привела Хованского впоследствии к теории «*малочленов*», т. е. *многочленов с малым числом одночленов* (*степени которых могут быть и велики*). Дело в том, что *топологические инварианты вещественных многообразий, заданных малочленами, ограничены числом слагаемых независимо от их степеней*. Это — грандиозное многомерное обобщение «правила Декарта» для оценки числа вещественных корней многочлена от одной переменной (ведь входящее в правило Декарта число перемен знаков в последовательности коэффициентов многочлена не может превосходить общего числа его ненулевых коэффициентов).

В свою очередь, теория малочленов переносится и на теорию дифференциальных уравнений, где она позволяет давать топологические оценки поведения интегральных и фазовых кривых в зависимости от числа одночленов в многочленах, задающих компоненты векторного поля. И можно даже итерировать эту процедуру, рассматривая на каждом следующем шаге уравнения, коэффициенты которых доставляются кривыми предыдущего шага.

Специалисты по теории представлений групп тоже использовали мой совет. В своих первых публикациях этого направления они даже на этот совет сослались.

Таким образом, работы Петровского и Олейник по 16-й проблеме Гильберта косвенным образом способствовали прогрессу в большой серии исследований в разных областях математики (в числе которых нужно упомянуть еще и замечательную топологическую «теорию лакун» Петровского, возникшую при исследовании им распространения волн, описываемых гиперболическими системами дифференциальных уравнений в частных производных).

В нашем трехмерном пространстве у волны, например акустической, есть и передний, и *задний фронт*. Благодаря последнему, возмущение (скажем, звук), пройдя через некоторую точку наблюдения, затем в ней полностью исчезает. Это явление и делает возможным *акустическую связь* в нашем трехмерном пространстве. В двумерной или четырехмерной среде заднего фронта у волны нет, и возмущение, пройдя через точку наблюдения, лишь постепенно там затухает, а не прекращается сразу. Акустическая связь в таких случая невозможна, так как уже принятый сигнал долго еще продолжает звучать в точке приема, мешая разобрать последующие сигналы.

И вот оказывается, что *математической причиной этого различия между волнами с резким фронтом и без него является топологический характер «цикла Петровского» в гомологиях алгебраического многообразия («поверхности Френеля»), определяющего колебания среды*. Среди прочих достижений теории лакун Петровского (развитой впоследствии Атьей, Боттом и Гордингом, а затем доведенной до вычисления конкретных ответов В. А. Васильевым) упомяну содержащееся в работах Петровского о лакунах доказательство реализуемости классов когомологий алгебраических многообразий и их дополнений дифференциальными формами с рациональными коэффициентами — этот результат обычно приписывают Гротендику, опубликовавшему его позже.

Возвращаясь к проблемам Гильберта, замечу, что ошибочное утверждение Гильберта о кривых 6-й степени в 16-й проблеме — далеко не единственная его ошибка. В опубликованной несколькими годами позже проблем статье о Минковском Гильберт так объясняет *принцип относительности*: «таким образом, *понятие одновременности отдаленных друг от друга событий существует само по себе, безотносительно к какому-либо способу синхронизации часов в разных местах*».

Ни Минковский, ни Пуанкаре никогда бы так не сказали: напротив, *никакой абсолютной одновременности событий в разных точках пространства определить принципиально нельзя*, в этом и состоит принцип относительности.

Но физика трудна, и у самых физиков логики не больше (одна из нерешенных проблем Гильберта как раз состоит в том, чтобы придать физике математическую строгость). При изложении результатов Минковского по *геометрии чисел* Гильберт проявил не бóльшее понимание работ своего друга: контрпримеры к утверждению, которое Гильберт приписал здесь Минковскому, строятся без труда.

Ошибки играют в математике не меньшую роль, чем доказательства: анализируя их причины и пути их преодоления, можно быстрее идти вперед, чем тупо пытаясь продвинуться в малоизученном направлении[14].

А. Пуанкаре потратил премию, присужденную ему шведским королем Оскаром II за его ошибочную работу о проблеме трех тел, на то, чтобы скупить все копии журнала «Акта математика», где эта его ошибочная работа была напечатана, и разослать всем подписчикам исправленную версию (экземпляр с правкой был лишь недавно обнаружен в архиве издателей, после чего эта история только и стала широко известной). Но результатом исправления ошибки было создание Пуанкаре современной теории динамических систем (часто называемой «теорией хаоса»).

[14] А. С. Пушкин уже высоко ценил значение ошибок:

> О, сколько нам открытий чудных
> Готовит просвещенья дух,
> И опыт, сын ошибок трудных,
> И гений, парадоксов друг.

Я. Б. Зельдович выбрал себе поэтому псевдоним «Парадоксов», объясняя, что это — «фамилия друга гения».

Комментируя «Евгения Онегина», Набоков замечает, что «Пушкин, подобно многим великим людям, математиком был усердным и никудышным». Сам Набоков служит тому примером: по его словам, строка «в граненый ствол уходят пули» объясняется тем, что «ствол пистолета в сечении представляет собой *многогранник*».

Лейбниц писал на полях своего экземпляра труда Ньютона: «ошибка», «ошибка» — например, по поводу теоремы Ньютона, утверждающей[15], что *площадь, отсекаемая от замкнутой плоской кривой переменой секущей прямой, не может быть алгебраической функцией от секущей прямой.* Лейбниц привел свой контрпример кривой: треугольник (сейчас его рукопись опубликована и по-русски).

В действительности Ньютон считал кривую гладкой, а его замечательное топологическое доказательство основывалось на самом деле на аналитическом продолжении функции вдоль соответствующей данной кривой римановой поверхности. В современных математических терминах это доказательство можно изложить совершенно строго. И при этом становится ясно, насколько хорошо Ньютон (в отличие от алгебраического бурбакиста Лейбница) понимал и римановы поверхности, и ряды Пюизо (которые он считал своим основным математическим достижением и которые в то время назывались «*теорией параллелограмма Ньютона*»). Сейчас они, к сожалению, выкинуты из курсов анализа, хотя они и объясняют, например, замечательное и часто употребляемое в физике рассуждение, почему *некоторые члены сложных асимптотических выражений следует сохранять, хотя они и меньше по величине, чем другие, отбрасываемые как малые.* Физики вроде Ландау обычно говорят, что сохраняемые члены отличны от бо́льших отбрасываемых тем, что они якобы «*имеют бо́льший физический смысл*», в то время как Ньютон справедливо приписывал им преимущество в квазиоднородной фильтрации в пространстве степенных рядов, определяемой *многоугольником Ньютона* (который теперь называют «границей выпуклой оболочки носителя ряда Фурье»). Эйлер в своем

[15]Эту свою теорему Ньютон открыл, думая о том, *какую форму планетных орбит следовало бы выбрать* Создателю, чтобы облегчить нам вычисление положения планеты на орбите в каждый момент времени (при ее движении по известной орбите в соответствии с законом площадей Кеплера): сейчас для этого приходится решать трудное трансцендентное уравнение, а теорема Ньютона показывает, что эта трудность неизбежна: «лучших», чем эллипсы, орбит не существует.

Между прочим, именно исследование этого специального трансцендентного уравнения привело математиков к пониманию *радиуса сходимости степенного ряда* как расстояния до ближайшей особенности, где исследуемая функция перестает быть голоморфной: ряд Тейлора для арктангенса перестает сходиться при бо́льшем по модулю, чем единица, аргументе не из-за того, что у него большие коэффициенты, а из-за особенности функции «арктангенс» в мнимой точке i. Странные явления в анализе часто имеют простые топологические причины.

Открытие Пуанкаре *топологических причин расходимости рядов теории возмущений небесной механики* (Лагранжа, Лапласа и их последователей) было основой его работы о задаче трех тел, с которой начинается новый период теории хаоса и динамических систем.

Но именно это свое замечательное открытие Пуанкаре вынужден был посчитать ошибкой, так как он истолковал его как решение другой, гораздо менее важной проблемы, сформулированной королем Швеции, истинный ответ в которой противоположен ответу, указанному Пуанкаре.

«Введении в анализ» объяснял эту геометрию многоугольников Ньютона и квазиоднородных фильтраций и градуировок как важнейшую для изучения анализа часть алгебры, но теперешние аксиомофилы выбросили из курсов анализа все самое главное.

Эпонимический принцип, приписывающий эпигонам вроде Лейбница, все достижения классиков вроде Ньютона, является важным социальным стимулом поощрения новых поколений слабых исследователей.

Современный английский физик М. Берри написал мне после нашей с ним дискуссии о происхождении «фазы Берри», использованной и опубликованной несколькими десятками лет раньше Берри в работах С. М. Рытова об инерции направления поляризации в светопроводе и в (засекреченных в свое время) работах А. Ю. Ишлинского о набеге фазы гироскопа на подводной лодке, возвращающейся домой по пути, отличному от пути «туда». По словам Берри, нужно всегда иметь в виду сформулированный им

принцип Арнольда: *если какой-либо объект имеет собственное имя* (*например, «Америка»*), *то это — не имя первооткрывателя.*

Но,— продолжает Берри,— пользуясь этим принципом, нужно иметь ввиду и следующее его дополнение:

принцип Берри: *принцип Арнольда применим к самому себе.*

Происхождение математических проблем бывает очень разным. Я не собираюсь пополнять список Манина новыми загадками, отвлекающими умников от полезных дел. Следующая тема была одним из последних увлечений А. Н. Колмогорова: вопрос подсказан проблемой миниатюризации мозга или компьютера.

Рассмотрим *граф из n вершин* (шариков фиксированного радиуса a) *и соединяющих их проводов* (фиксированной толщины b). Предположим, что *максимальное число k выходящих из одной вершины проводов* («аксонов», «дендритов») *ограниченно фиксированной постоянной* (можно представлять себе величину $k=100$ или 1000), а число вершин («нейронов», «ячеек») n растет неограниченно.

Спрашивается, *как будет при этом расти минимальный радиус R того шара, в который этот телесный «граф» из n нейронов можно уместить без самопересечений*?

Ясно, что радиус мозга, R, должен расти с числом нейронов, n, не медленнее, чем $\sqrt[3]{n}$, иначе объем вмещающего шара был бы меньше суммы объемов уместившихся в нем «нейронов».

Дальше Колмогоров рассуждал так. Белое вещество экономно упакованного в черепе мозга — это дендриты и аксоны, связывающие между собой нейроны, а серое — тела нейронов. *Серое вещество мозга составляет его поверхность, а белое расположено внутри.* Это подсказывает, что *минимальный радиус «мозга» из n нейронов должен расти* *не как кубический корень из n, а быстрее, как квадратный корень из числа нейронов.*

В конце концов Колмогоров (со своим сотрудником Бардзинем) получил целую серию теорем. Во-первых, *уместить в шаре радиуса порядка* $\sqrt{n}$ *систему* (*«мозг»*) *из n ячеек* (*«нейронов»*) *всегда можно.*

Во-вторых, *существуют «умные» графы* (*«устройства мозга»*), *для которых меньшего радиуса не хватит.*

В-третьих, *таких* (*требующих радиуса порядка* $\sqrt{n}$) *графов с n вершинами большинство.*

В-четвертых, можно явно указать свойство «сложности», при наличии которого возникает необходимость радиуса порядка $\sqrt{n}$. Например, примитивный «мозг червя» из n «нейронов», соединенных в последовательную цепочку .—.—...—. , можно уместить и в круге меньшего радиуса, $\sqrt[3]{n}$. Но *достаточно сложный компьютер или мозг такого уплотнения не выдерживает.* А критерием «сложности» является *универсальность*: *граф из n нейронов «сложен», если он включает в качестве подграфов все графы из немного меньшего, чем n, числа нейронов* (*при прежнем ограничении на число связей, выходящих из одной вершины*).

Указанным свойством универсальности обладает, оказывается *большинство* графов из n элементов: кретинский «мозг червя» — редкое исключение.

Описанный этой теорией степенной закон зависимости радиуса мозга от числа нейронов — прообраз множества других подобных *степенных законов*, которые чаще всего обнаруживают эмпирически, при рисовании результатов измерений на двойной логарифмической миллиметровке. Степенные зависимости изображаются тогда наклоненными прямыми линиями. Удивительно то, что тангенс наклона этих прямых (а он-то и определяет показатель степени степенного закона) часто оказывается рациональной дробью с небольшими числителем и знаменателем.

Иногда для объяснения такого наблюденного степенного закона удается придумать приводящую к нему теорию (часто довольно сложную), Примером является здесь показатель 5/3 в колмогоровских законах турбулентности, объясненный им при помощи также недоказанного *принципа подобия* (согласно которому рождение средних вихрей из бóльших управляется *тем же* неизвестным нам законом, что и рождение малых из средних — и так от планетарных масштабов в атмосфере или океане и до микроскопических вихрей, где энергия движения диссипируется за счет вязкости). Интересно, что идея о существовании такого закона в гидродинамике высказывалась уже Леонардо да Винчи (объяснившего другим законом подобия, почему киты больше слонов).

Я приведу здесь еще несколько наблюденных степенных законов, объяснения показателей степеней в которых мне неизвестны.

Число видов на острове пропорционально корню четвертой степени из площади острова.

Число типов клеток в организме пропорционально квадратному корню из числа генов в его геноме.

Число научных работников данной производительности обратно пропорционально числу научных публикаций каждого из них.

Скорость метаболизма пропорциональна степени 3/4 от массы организма (а не степени 2/3, как получилось бы вследствие простой зависимости метаболизма от площади гладкой поверхности химического контакта).

Число извержений вулкана с выбросом объемом меньше V растет при уменьшении величины объема выброса как $V^{-3/2}$ (это — по наблюдениям вулкана Piton de Fournaisse, опубликованным F. Lahaie, J.-R. Grasso, P. Marcenac и S. Giroux (C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II. 1996. Vol. 323, №7. P. 569—574)).

Л. Н. Толстой сообщал сыну, что *затрачиваемые на удовольствия средства растут как квадрат наслаждения* (письмо от 16.X.1895. Собр. соч. М., 1984. Т. 19. с. 334).

Номер города в списке, упорядоченном по числу жителей, обратно пропорционален числу жителей.

Упомяну еще пару математических задач из списка, составленного А. Д. Сахаровым.

Жена попросила его нарубить капусту для пирогов. Технология такая: сначала кочан нарезается на плоские круглые слои, а потом каждый слой, положенный на стол, рубится на выпуклые мелкие многоугольники случайными вертикальными ударами ножа.

Занимаясь этой рубкой, Сахаров задался вопросом: а сколько в среднем сторон у получающихся мелких выпуклых многоугольников?

Ответ А. Д. Сахарова: в среднем четыре, хотя среди кусочков попадаются и треугольники, и пятиугольники.

Подготавливая эту задачу к печати, Ф. Аикарди заметила ее n-мерное обобщение: в n-мерном пространстве получающиеся при разрезании случайными гиперплоскостями n-мерные мелкие выпуклые многогранники будут в среднем (при большом их числе) иметь столько же k-мерных граней, сколько их имеет n-мерный куб (в трехмерном пространстве: среднее число граней кусочка — 6, среднее число ребер — 12, среднее число вершин — 8).

Возвращаясь к двумерному случаю, упомяну еще одно наблюдение А. Д. Сахарова. Сосчитаем *средний периметр* p получающихся многоугольных мелких частей и *среднюю площадь* S такой части. Чтобы размер части не влиял, составим их *безразмерную комбинацию* S/p^2. Спрашивается, как ведет себя эта безразмерная характеристика форм частей разбиения, когда число этих мелких частей растет до бесконечности?

Ответ А. Д. Сахарова: *безразмерная дробь S/p^2 стремится к отношению площади круга к квадрату длины его окружности, т. е. к $1/4\pi$*. Это кажется парадоксально противоречащим изопериметрическому неравенству, согласно которому *площадь, ограниченная кривой данного периметра, максимальна, когда кривая — окружность*. Но никакого противоречия тут нет, так как речь идет не о среднем значении отношения S/p^2, а об отношении средних значений величин S и p^2. Средняя площадь и средний периметр достигаются на совершенно разных кусочках разбиения. Статистика — опасная парадоксами наука (и часто большая ложь)[16].

§ 4. Математика от древних до наших дней

Удивительная математическая задача упомянута Плутархом (в его «Застольных беседах»). «Некоторые утверждают,— говорит Плутарх,— что *из десяти простых утверждений якобы можно составить, по-разному комбинируя их, более миллиона сложных*. Но это неверно,— продолжает он,— так как Гиппарх сосчитал, что их всего 103049, а на отрицательной стороне — 310952».

Об этой задаче мне рассказал в Калифорнии американский комбинаторик Р. Стэнли, и я попросил своих учеников в Москве проверить эти вычисления Плутарха. Через несколько недель мои студенты сообщили, что они не только подтверждают проведенное и самим Стэнли перевычисление числа Гиппарха сложных предположений, но и разгадали непонятый

[16]При анализе средних в подобных задачах о геометрии разбиений важно точно указывать, о каких именно средних идет речь. Выше, например, среднее число вершин кусочка определялось как частное от деления суммы чисел вершин кусочков на число кусочков.

Но во многих вопросах интереснее усреднять не по числу кусочков, а по их площади (в многомерном случае по объему), иначе вклад мелких кусочков в среднее будет преувеличен (вследствие их обилия), а ведь у каждого из них число вершин, скорее всего, меньше, чем у более значительных кусков.

Было бы интересно выяснить корреляцию между величиной безразмерного отношения Сахарова, S/p^2, и также безразмерным числом вершин кусочка, причем вычисляя среднее не только по числу кусочков, но и по занятой ими площади (т. е. приписывая каждому кусочку при усреднении вес, пропорциональный его площади, что более соответствует подходу статистической физики и термодинамики к подобным вопросам).

Переход на усреднение по площади мог бы изменить ответы во всей большой области — статистической геометрии, возникшей исторически ради анализа биологической и геологической информации, содержащейся в статистике случайных срезов.

Стэнли термин «на отрицательной стороне». В «положительном» случае речь идет о числе правильных скобочных символов, содержащих 10 букв (вроде чисел Каталана, в определении которых, однако, внутри каждой скобки ровно 2 термина, так что число Каталана — это число способов организовать для 10 участников футбольный турнир с выбыванием проигравшего, или число способов разбить многоугольник диагоналями на треугольники: $C(3)=1$, $C(4)=2$, $C(5)=5$, $C(6)=14$). Но в определении чисел Плутарха внутри скобок может быть любое число символов: для $n=3$ пригодны, например, все символы списка

$$(1,2,3);\ (1,(2,3));\ (2,(1,3)),(3,(1,2)).$$

В случае же «отрицательной стороны» одно из предложений предваряется отрицанием:

«Кай человек; *не* все люди смертны».

Результаты этого расследования (с ответом 310954) были опубликованы М. Э. Казаряном и С. К. Ландо в American Math. Monthly[17]. Для вычислений потребовалось рекуррентное соотношение из 40 слагаемых: видимо, Гиппарх уже справлялся с такими подсчетами (ведь он умел также правильно предсказывать затмения и рассчитывать планетные орбиты, по-видимому, при помощи законов Кеплера и закона всемирного тяготения).

Ньютон утверждал впоследствии, что все эти древние вычисления (включая вывод законов Кеплера из закона обратных квадратов для силы притяжения) сгорели, к сожалению, в большом пожаре Александрийской библиотеки — музеума в Египте и что ему, Ньютону, принадлежит честь восстановить их для современного человечества. Историки рассказывают, что римский царь Нума Помпилий (вскоре после Ромула, в 7 в. до Рождества Христова) устроил в храме Весты на Форуме в Риме своеобразный планетарий. Планеты (в правильном порядке: Меркурий, Венера, Земля с Луной, Марс, Юпитер, Сатурн) носили по нарисованным в храме кеплеровым эллиптическим орбитам, в соответствии с законом площадей и с пропорциональными кубам больших полуосей квадратами времен обращения, специально приставленные к планетам весталки.

И если кому нужно было найти на небе Сатурн, то в этом храме Весты надо было стать около весталки, заведовавшей Землей, и определить направление на ту другую, у которой Сатурн.

Но объяснить всю эту сложную небесную механику нуждавшимся в календаре потребителям ученые не умели, поэтому для потребителей они

[17] L. Habsieger, M. Kazarian, S. Lando, On the second number of Plutarch // American Math. Monthly. 1998. Vol. 105, №5. P. 446.

придумали систему эпициклов (разложили описывающие движение планет функции от времени в «ряды Фурье»).

Эллипсы, впрочем, явно упомянуты как орбиты планет в древней книге Витрувия «Архитектура» (при перечислении всевозможных полезных для архитекторов кривых), изданной в I веке новой эры.

Замечательная древняя наука была принесена в современную Европу греками из Египта. В Египте, задолго до пребывания там Моисея, жил величайший ученый, которому после его смерти фараон присудил божеское звание и имя: Тот, бог мудрости (знак — ибис).

Открытия Тота описаны, например, историком I в. до н. э. Диодором Сицилийским (а также Платоном[18] — в его диалоге «Федр»). Первым считается изобретение Тотом *фонетического алфавита* (до этого надо было вызубривать тысячи иероглифов, по числу слов, а он заменил их несколькими десятками упрощенных символов, по одному на фонему). От алфавита Тота произошли финикийский, затем греческий, а от него — латинский и кириллица. В Индии и в Китае аналогичный процесс прошел независимо.

Платон описывает беседу Тота с богом Аммоном, который, соглашаясь с пользой письменности и алфавита Тота, скептически оценивает мысль Тота, будто люди, вооруженные письменностью, поумнеют, так как ум освободится для думания, когда отпадет необходимость слишком много держать в памяти.

По приведенным Платоном словам Аммона, *никакого поумнения ни грамотность, ни алфавит* (*ни, добавлю я, компьютер или телевизор*) *не принесут*: *наоборот, думать будут еще меньше, так как будут надеяться на свои записи.*

Сегодня наступающие на математику агрессоры пытаются полностью исключить из нее недоступное им думание, создавая взамен грандиозную компьютерную библиотеку «всех когда-либо существовавших математических текстов». Сочинение новых математических «работ» будет после этого Левиафана сводиться просто к нажатию кнопок для компиляции из забытых старых источников. Они убеждали меня (на заседании Исполнительного комитета Международного математического союза) принять *самоубийственное для математики решение об обязательной принудительной компьютеризации каждой мысли*[19] *таким доводом*: *спасти живопись от наступления фотографии все равно невозможно, это — поступь истории*!

[18]Платон пишет о Тоте: «Он первым изобрел число, счет, землемерие, звездочетство, игру в кости и шашки, а также письмена».

[19]В частности, они хотят обязать каждого математика набрать на компьютере (и подарить в их всемирный математический кодекс) все свои сочинения.

Но я продолжаю оставаться на той старомодной точке зрения, что 6 раз по 7 — по-прежнему сорок два, что нуль по-прежнему не положительное число (хоть этому и учат «современные» математики во Франции), что как живопись, так и математика должны и будут жить (прежде всего — в интересах всего человечества).

Вторым открытием Тота был *натуральный ряд* (*и математические рассуждения с участием актуальной бесконечности*). До него многие думали, что существует *самое большое число* (сумма ежегодного суммарного налога фараону), а он объяснил, что всегда можно прибавить еще единицу.

Геометрия была построена Тотом в виде *землемерия* (что это слово и означает). Он был при жизни главным землемером фараона и отвечал за измерение площадей всех земельных участков, которые ведь нужно было знать и для исчисления налога, и для прогноза урожая, и для дележа нильской воды в оросительных системах. Единственным отличием геометрии Тота от евклидовой было то, что он совершенно не заботился о независимости своих аксиом друг от друга.

И когда Евклид, через много столетий, стал писать учебник геометрии Тота для греческих учеников в виде книги, то он решил сократить исходный текст Тота и для этого выбрал из тех пяти аксиом Тота, которые были друг другу эквивалентны, всем известный теперь «пятый постулат», а другие постулаты Тота (вроде того, что сумма углов треугольника есть развернутый угол) он превратил в теоремы и доказал, выведя их из оставленного им аксиомой постулата о параллельных[20].

[20]Впоследствии Лобачевский, отвергнув постулат Евклида о параллельных, «построил» свою замечательную геометрию Лобачевского, где через точку вне прямой проходит не *одна* пересекающая эту прямую прямая, а *бесконечно много* таких прямых (в то время как все остальные аксиомы геометрии Евклида выполнены и в геометрии Лобачевского).

Однако Лобачевский этим своим построением *не доказал* даже хотя бы утверждавшуюся им независимость евклидова или своего постулата о параллельных от остальных: ведь неправильную теорию тоже можно в течение некоторого времени логически последовательно «строить», как это ясно показывают все «доказательства от противного», приводящие неверное допущение к противоречию.

Сейчас эта независимость доказана: *в геометрии Лобачевского рассуждения никогда не приведут к противоречию, во всяком случае, противоречий в ней не больше, чем в геометрии Евклида*. Доказывается это тем, что в обычной геометрии Евклида существуют *модели* геометрии Лобачевского. Например, в *модели Клейна* роль плоскости Лобачевского играет открытый круг Евклида, а роль прямых плоскости Лобачевского — его хорды, и все аксиомы и теоремы выполнены. В *модели Пуанкаре* роль плоскости Лобачевского играет верхняя полуплоскость евклидовой плоскости, а роль прямых — перпендикулярные граничной прямой этой полуплоскости окружности и прямые, и опять выполнены все аксиомы и теоремы.

Если бы в геометрии Лобачевского было противоречие, то ввиду существования модели противоречивой оказалась бы и геометрия Евклида.

Если и не сам Тот, то его близкие ученики измерили *радиус Земли с точностью в* 1%, посчитав для этого верблюжьи шаги караванов между двумя столицами Египта — Фивами на юге и Мемфисом на севере (почти что на одном меридиане). Зная разницу максимальных высот Солнца в обеих столицах в один день, египетские ученые легко сосчитали радиус Земли (в числе верблюжьих шагов).

Греческие их последователи отнеслись к этим данным с недоверием, так как они вообще не доверяли засекреченной науке Египта, где, по их словам, «женщины публично проституировали себя с крокодилами»[21]. Греки измерили радиус при помощи триремы, плывшей через Средиземное море от Египта до острова Родос. Они умножали время в пути на «скорость триремы при ветре средней силы», и у них Земля вышла вдвое больше, чем у египтян.

Через пару тысяч лет один генуэзский капитан попросил одну католическую королеву разрешить ему добраться на корабле до Индии, плывя на запад по Атлантическому океану. Королева сочла необходимой *научную экспертизу* проекта и в результате забраковала его, так как, по словам экспертов, никто в мире не сумеет построить столь большой корабль, чтобы он вместил так много бочек пресной воды, сколько требуется, чтобы не погибнуть от жажды в таком дальнем путешествии.

Впоследствии оказалось, что эксперты (как и все на свете) верили греческим измерениям, где расстояние было вдвое больше истинного. А у оптимиста-капитана были другие (египетского происхождения) географические представления. В конце концов королева разрешила ему, раз уж он так мечтает погибнуть от жажды, проделать свой рискованный эксперимент, что он и сделал (впрочем, неудачно: до Индии он так и не добрался).

Лейбниц говорил, что найти что-нибудь всегда трудно, особенно если ищешь, но труднее всего — когда ищешь именно это.

От геометрии Тот естественным ходом мысли перешел к *звездочетству*, а впрочем, он изобрел и много другого — например, *игру в шашки* (которыми он демократически заменял слишком трудные, по его мнению, индийские шахматы). Интересно, что шахматы в то время существовали, кроме нынешнего вида, еще в усложненном «компьютеризованном» варианте, где каждая фигура (скажем, конь) означала не одного всадника, а войско, численность которого была на фигуре указана. И взаимодействие фигур было не всегда полным уничтожением одной из них, а чаще приводило только к уменьшению надписанных численностей войск.

Греки, заимствуя достижения Тота, переименовали его на свой лад в *Гермеса Триждывеличайшего* (Трисмегиста), и в средние века его

[21] P.-J. Proudhon. De la celébration du dimanche. Paris, 1850.

сочинения многократно переиздавались (под названием «Изумрудная скрижаль»): у Ньютона дома было 5 экземпляров разных изданий. Современное издание: A. D. Nock, A. J. Festugière, Corpus Hermeticum, v. 1—4, Paris, 1945—1954.

Перенесение всех этих знаний в Грецию совершилось главным образом за счет промышленного шпионажа: у египетских жрецов науки были засекречены, и для их освоения требовалась подписка о неразглашении.

Историк Диодор Сицилийский описывает это так: «египетские жрецы рассказывают, на основании своих священных книг, что в раннее время их посетили Орфей, Музеус, Мелампус и Дедалус, а также поэт Гомер, спартанец Ликург и — позже — Солон из Афин, а также философ Платон; их также посетили Пифагор Самосский и математик Эвдокс, а также Демокрит из Абдеры и Энепид с Хиоса.

Пифагор научился в Египте своему учению о Боге и геометрическим утверждениям, а также теории чисел, Энепид — вычислению орбиты Солнца» («История» Диодора Сицилийского, т. I, с. 96—98).

Подробности о Тоте изложены в книге Б. А. Тураева «Бог Тот», изданной в Лейпциге в 1898 г. Ссылки Ньютона на древних были им исключены из Principia во втором издании (см.: I. Newton. Mathematical Principles of Natural Phylosophy and His System of the World / Ed. F. Cadjory. Berkley, 1962. P. 549—550; The correspondence of Isaak Newton: 7 vols / Eds. H. W. Turnbull, J. Scott, A. Hall, L. Tilling. Cambridge, 1959—1977. Vol. III (1688—1694), 1961. P. 338, 384).

Н. Коперник ссылается на древнюю гелиоцентрическую небесную механику в тексте «О вращении небесных сфер. Малый комментарий» (в издании «Послание против Вернера. Упсальская запись». М., 1964. С. 35).

В перенесении математики египтян в Грецию особую роль сыграл Пифагор, проведший в Египте около 20 лет. Он привез оттуда теорию переселения душ и вызванное ею вегетарианство (а то ненароком съешь тело души своего родственника, переселившегося после его смерти в корову или в свинью!). Обязавшись не публиковать полученные им от египетских жрецов научные сведения, Пифагор лишь устно пропагандировал свою науку, но держал ее в тайне. Особенно охранялась *тайна несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной*: ведь это открытие означает, что *арифметика дробей недостаточна для практически необходимых измерений*, а иррациональных чисел тогда еще не было (их теорию создал Эвдокс, также обучавшийся в Египте).

Недостаточность арифметики дробей для задач измерения подрывала авторитет математиков в глазах властей: ведь выходит, что математики занимаются ненужными философствованиями о малоценных предметах (дробях, пропорциях и т. п.), стало быть, и кормить их незачем.

Все же через несколько поколений учеников геометрия Тота дошла через Пифагора до Евклида, который уже не был связан, как Пифагор, подпиской о неразглашении и все опубликовал (Пифагор боялся и так ничего и не опубликовал, хотя школа пифагорейцев процветала больше тысячелетия, распространяя то вегетарианство, то веру в переселение душ, а то и геометрию, теорию чисел и принадлежащий им обеим «алгоритм Евклида», который, конечно, тоже был давно известен на Востоке).

Из всего этого ясно, что промышленный шпионаж с давних пор приносил человечеству большую пользу: без него до сгоревшей в Александрийской библиотеке древней мудрости современному человечеству пришлось бы добираться гораздо дольше.

В разных исторических источниках я нашел разные сведения об этом знаменитом пожаре, виновников которого приписывают трем различным религиям (в зависимости от предпочтений историка):

— в 48 г. до Р. Х. войска Цезаря сожгли больше семисот тысяч томов Александрийской библиотеки,

— в Александрийской библиотеке, сожженной в конце IV в. по наущению патриарха Феофила, было 700 000 томов,

— в 640 г. н. э. по приказу Халифа Омара в Александрийской библиотеке сожгли 200 000 томов.

Я не знаю точно, что такое том, но в других источниках упоминаются и семь миллионов «сожженных книг».

Начавшаяся этим пожаром (или этими пожарами) борьба обществ и правительств с науками и математикой, да и с культурой вообще, продолжается и сегодня.

Великому итальянскому физику Бруно Понтекорво принадлежит замечательный прогноз будущего культуры, о котором я узнал при следующих обстоятельствах.

Вскоре после войны Понтекорво, бывший сотрудником Ферми и занимавшийся в основном нейтрино — частицей, которую он же и открыл (название дал, кажется, Паули, но Понтекорво знал уже, что в его опытах, если бы такой частицы не было, нарушались бы стандартные законы сохранения), бежал с женой и малолетними детьми через финские болота в Россию, где он быстро вошел в число деятелей атомного проекта, а позже стал и академиком РАН.

В период перестройки ему разрешали уже ездить в Италию, так что мы встречались с ним на заседаниях обеих наших общих академий: то в РАН в Москве, то в *Академии Линчей* («*рысей*») в Риме, где когда-то Галилей был шестым избранным членом (предполагается, что рыси отличаются особенной зоркостью и высмотрят всех лучше все тайны природы).

Мое первое впечатление от Понтекорво связано с замечательной пародией на математическую статью, представленной им в Доклады Академии Наук (к первоапрельскому номеру), как только его избрали в академики и он получил право представлять статьи.

Автором статьи, ходившей уже несколько лет по московскому самиздату, был Орас де Бартини — живший в России знаменитый итальянский авиаконструктор, работавший после своего ареста в шарашке (кажется, атомной), которую глава атомного проекта Берия решил однажды угостить, по случаю праздника, пирогами.

Во время пиршества итальянец заявил: «Очень хорошо мы тут с Вами пируем, как друзья, но почему меня здесь держат? Ведь я совершенно ни в чем не виноват, Лаврентий Павлович!»

На это Берия, по воспоминаниям присутствовавших, ответил: «Конечно, знаю, что ты ни в чем не виноват. Был бы виноват — давно уже расстреляли бы!»

Статья по математике (ее можно найти в ДАН) называлась «О размерностях физических величин» и начиналась с фразы: «Пусть A — унарный и, следовательно, унитарный объект. Тогда A есть A и, таким образом, $A/A=1$, ...».

Продолжения я наизусть не помню, но заканчивалась статья «благодарностью за помощь в вычислении нулей функции пси».

Когда эта статья была написана, автор попросил Н. Н. Боголюбова представить ее в «Доклады», но тот побоялся, и она дождалась избрания академиком Понтекорво, который тотчас же, нисколько не побоявшись, ее представил в журнал, где она и опубликована.

Меня всегда удивляла в Понтекорво опасная для него склонность говорить правду, даже когда это ему может доставить неприятности. Если уж он чего не хотел рассказывать (например, о причинах и обстоятельствах своего перехода на российскую сторону), то он просто сообщал, что «на этот вопрос отвечать не хочет», вместо того, чтобы, как многие другие, что-нибудь подходящее соврать.

И вот, несколько лет назад, получаю я от Академии Линчей том, посвященный Б. Понтекорво через пару лет после его смерти: этот том Трудов Академии составляли доклады на конференции в Риме, посвященной его памяти.

В этом томе я и прочитал (по итальянски, но, надеюсь, понимая все правильно) следующую историю, происшедшую с Б. Понтекорво в подмосковном городе Дубна, где он жил, работая в находящемся там международном «Объединенном институте ядерных исследований» (ОИЯИ).

Итальянский академик-докладчик пересказал следующий рассказ Бруно о своем приключении. Отправившись в лес (вероятно, за грибами, которых там много) в окрестностях Дубны, Понтекорво заблудился, а выйдя к вечеру из леса, не знал, где ему искать Дубну.

Но неподалеку, на опушке, стоял трактор с трактористом, и в ответ на вопрос «Где Дубна?» тракторист даже предложил подвезти. Желая быть любезным, тракторист сказал в пути: «Я догадываюсь, что вы работаете в ОИЯИ, и знаю, что там делают, но вот Вы, лично, чем там занимаетесь?»

Понтекорво честно ответил: «Нейтринной физикой». Но тракторист продолжил расспросы. «Вы очень хорошо говорите по-русски,— сказал он,— но я все же догадываюсь, что Вы были когда-то иностранцем, потому что у русского акцент всегда связан с каким-нибудь одним географическим местом, а у Вас в одних словах акцент «окающий», вологодский, а в других — «гакающий», украинский. И вот, я думаю, может быть принесу даже и пользу науке, улучшив Ваше произношение какого-нибудь слова: Вас станут лучше понимать в Институте, в Академии, на конференциях...»

Понтекорво радостно попросил помочь, и тогда тракторист объяснил ему главное: «Физика — *не нейтринная, она нейтронная*»!

Рассказывая эту историю в Риме, Понтекорво и высказал свою гипотезу о будущем науки. «Я уже стар, — сказал он,— и, вероятно, скоро умру. Но я все же надеюсь *дожить до времени, когда никто уже не будет путать нейтрино с нейтроном*!»

Здесь рассказ самого Понтекорво заканчивается, но доклад римского академика содержит еще и его краткий комментарий.

— Сегодня,— сказал он,— мы можем с сожалением констатировать, что первое предсказание Бруно сбылось: его с нами уже нет. Что же касается второго, то я не знаю, исчезла ли уже путаница до его смерти, но сегодня, я думаю, мы можем твердо сказать, что стоим на пути к исполнению и этого пророчества, потому что *очень скоро никто уже не будет знать ни слова нейтрон, ни слова нейтрино*.

Всю эту историю я рассказал учителям математики в конце конференции, посвященной вопросу о том, как преподавать математику. Конференция эта проходила в Дубне, в лесном местечке Ратмино, где река Дубна впадает в Волгу. Кончил я так:

— Мы с вами долго здесь обсуждали разные детали методики, что и как преподавать. Но дело-то ведь идет к тому, что предсказание Бруно Понтекорво сбывается не только в физике, но и в математике. Еще несколько лет, и никто уже не будет видеть разницы между треугольником и окружностью[22].

[22]Легенда утверждает, что Пуанкаре создал топологию именно из-за того, что его (эта часть легенды — заведомая правда) провалили на экзамене за сходство на его чертежах треугольников с окружностями. В топологии разница между треугольником и окружностью становится несущественной, они друг другу гомеоморфны (топологически одинаковы).

Вскоре министр образования России опубликовал свои новые требования к уровню подготовки школьников. По геометрии они сводились к умению решать такие «задачи»: «Найти четырехугольник с наибольшим количеством свойств». Ответ — квадрат. Решение: нужно сосчитать числа свойств в учебнике.

И это еще хорошо — ведь за год до этого тот же министр, «математик» по образованию, вообще *полностью вычеркнул геометрию* из программ школьного образования (следуя Декарту, говорившему, что, «чтобы сделать математику наукой, надо изгнать из нее всякое участие воображения, и прежде всего — чертежи»).

Впрочем, основная идея Декарта была «политически корректной»: «*Необходимо немедленно запретить все другие методы преподавания, кроме моего, потому что только при моем методе самый посредственный ум достигает такого же успеха, как и самый блестящий*».

Декарт не успел достичь своей цели, но теперь у него много сторонников-посредственностей.

Большая и повсеместная поддержка этого «метода» всеми слабыми троечниками в мире объясняется вполне естественными социальными причинами, прежде всего — заботой о самосохранении и самоохране от конкуренции со стороны людей с талантом[23]. Но и для стран, где эта мракобесная точка зрения побеждает, и для человечества в целом, где она тоже может ведь победить, если решения будут приниматься голосованием серого большинства, такая победа представит серьезную опасность возврата к средневековой дикости.

В истории математики много сложных вопросов и крутых поворотов, причем трудно бывает сказать, откуда приходят даже крупнейшие открытия. Вот яркий пример: приход в математику Вейерштрасса, одного из крупнейших математиков XIX в. Мой рассказ основан на некрологе Вейерштрасса, написанном Пуанкаре.

Вейерштрасс начинал как преподаватель в средней школе. Преподавал он там *гимнастику*, особенно — работу на параллельных брусьях. Но в те времена школьный учитель в Германии, чтобы подтвердить свое

Один крупный математик в одном выдающемся университете даже убеждал меня недавно, будто треугольник является гладким подмногообразием плоскости (так как на нем можно, при помощи соответствующего атласа, ввести гладкую структуру, диффеоморфную структуре окружности). Подобная безграмотность лучших профессоров лучших университетов — еще одно подтверждение того, что вследствие аксиоматически сверхабстрактного преподавания предсказание Понтекорво быстро сбывается на всей планете и степень всеобщего невежества неуклонно растет по мере замены понимания научных фактов зазубриванием аксиом.

[23]«Невежды любят невежество... и глупцы ненавидят знание» — гласят притчи Соломона (1:22).

качество, е ж е г о д н о должен был представлять свое *письменное сочинение*.

В качестве такового Вейерштрасс представил свое *сочинение об эллиптических функциях*. Так как в школе никто понять его не мог, это сочинение отправили на отзыв в университет. И через несколько дней Вейерштрасс стал одним из самых уважаемых математиков мира, быстро перевернувшим стиль всех математических курсов, которые и сейчас изобилуют «теоремами Вейерштрасса» вроде такой: «*предел последовательности непрерывных функций непрерывен*». Эта неверная «теорема» была первым достижением бурбакистского наведения в анализе строгости, которое начал Коши, давший современное определение предела. Контрпримеры к неверной теореме Коши предъявил Абель. Вейерштрасс спас положение, заменив нелепую «поточечную сходимость» из определения Коши правильной «равномерной сходимостью», при которой непрерывность уже сохраняется.

Эта грубая ошибка «строгого» Коши — одна из самых поучительных глав в истории математики, *без ее разбора невозможно понять важнейшее в математике и в приложениях понятие сходимости*. Поэтому в «современных» курсах анализа о ней не упоминают — вероятно, для того, чтобы студенты ничего не понимали и потому больше уважали профессоров. Понятие предела или сходимости, которое неудачно бурбакизировал Коши, принадлежит Ньютону (хотя, по существу, оно использовалось уже Архимедом и даже раньше). Интересно, что сходимость функций — не то, что сходимость их графиков (это «явление Гиббса» тоже следовало бы включать в курсы анализа).

Признать влияние Ньютона или Гиббса французам трудно, так как они не французы. О том, как во Франции преодолели эту трудность, мне стало известно в результате многообразной деятельности «*Комитета по защите наследия французской науки от иностранцев*», членом которого меня назначил министр науки Франции (и в работе которого я, впрочем, никакого участия не принимал, все вспоминая о родине слонов[24]).

Принцип работы «защитников наследия» состоит в том, чтобы утверждать, будто все сколько-нибудь важные открытия и изобретения в любой области (будь то изобретение радио или первый самолет[25]) принадлежат

[24]Слова «Россия — родина слонов» изобрел в XVIII в. испанский путешественник, рекламировавший таким способом увиденные им в кунсткамере Петербурга остатки мамонтов.

[25]В «Музее искусств и ремесел» в Париже под куполом бывшей церкви подвешен один из их первых самолетов, размахом крыльев метров в десять. Он — с паровым двигателем, как у паровоза, а крылья обтянуты кожей.

В Венсенском лесу под Парижем есть памятник садовнику, убитому вследствие происходившего над ним во время Первой мировой войны воздушного боя. Французский самолет, исключительно французам. Все это живо напоминает борьбу с космополитизмом в СССР сороковых годов.

И вот, о Ньютоне я прочитал, что он — «*чисто французское изобретение*», историю которого я сейчас и расскажу.

На улице Сен-Жак в Париже, рядом с Коллеж де Франс, до сих пор находится лицей Людовика Великого. В конце XVII в. здесь учился мальчик по фамилии Аруэт. Его учитель, иезуит Н. Фрере, был яростным антисемитом и сумел внушить эту идею своим ученикам (сегодняшние погромы, в области которых Франция борется за первенство с русским царем, происходят не от него). Антисемитизм быстро привел Аруэта к антихристианству, потому что Иисус Христос был ведь евреем. И он впоследствии опубликовал много антихристианских сочинений, но со страху подписывал их не своей настоящей фамилией, а псевдонимом: Вольтер.

Кончив лицей, он решил, что для полного разгрома христианства нужно лишить его научной базы, каковую в то время обеспечивал крупнейший немецкий ученый Лейбниц (кстати, подаривший Петру I списанный им с устава Академии наук Франции проект Российской академии наук, который тот и осуществил).

Лейбницу принадлежит (бурбакистское) «*математическое доказательство бытия Божия*». Оно состоит в следующем. Наше мышление работает двумя путями: *индукция* (заключение от частного к общему) доступна и животным (обжегся два раза, третий не полезешь). А вот *дедукция*[26] имеет совершенно иной характер: *применение общего закона к частному случаю — это скорее юридическая деятельность* («не убий» — значит нельзя убить и жену, даже очень надоевшую). Ни одно животное, по Лейбницу, к дедукции не способно. А человек, наоборот, даже получает удовольствие от этого умозаключения, от своего рода законопослушности, подчинения себя законам. «Почему?» — спрашивает Лейбниц. И отвечает: «Да потому что *Создатель заложил в hardware мозга Адама удовольствие от дедукции*, сохранившееся и у нас. Следовательно,— заключает Лейбниц,— *прислушиваясь к тому наслаждению, которое нам доставляют дедуктивные умозаключения, мы добываем себе тем самым прямые доказательства участия Создателя в нашем происхождении, а тем самым — и его бытия*».

Чтобы разгромить учение Лейбница, Аруэт поехал в Берлин. Но там оказалось, что спорить придется не с Лейбницем, а с его могущественным покровителем, королем Фридрихом. И вскоре король, любивший флей-

---

неудачно маневрируя для обороны Парижа от летящего на город немца, уронил на землю свой мотор, которым и убил садовника.

[26]Б. Л. Пастернак подчеркивал: «Не все на свете создается дедукцией откуда-то сверху!» (речь на пленуме Союза писателей СССР в Минске в 1936 г.).

ту и науки, задал Аруэту ехидный вопрос: «Объясните, *почему это на всех континентах есть обезьяны, кроме только Европы, где вместо них — французы*?»

Аруэт нашелся и быстро ответил: «Нет, Ваше Величество, *французы — не обезьяны, они — помесь тигров с обезьянами*».

Эта фраза, между прочим, примерно через сотню лет сыграла роль в истории русской литературы. Шарлотта Кордэ зарезала в ванне Марата, а его брат Будри так испугался, что удрал спасаться от революции в Петербурге, где император Александр I доверил ему преподавание литературы в лицее. И на одном из своих уроков Будри рассказал лицеистам историю спора Фридриха с Аруэтом об обезьянах.

Но лицеисты, услышав, что «француз — это помесь тигра с обезьяной», сразу вскричали: «*Да ведь это Пушкин!*» — и с тех-то пор он и получил у товарищей известное прозвище «француз» (имелась в виду помесь тигра с обезьяной, все это знали, но произносить синоним «француз» было короче). Вдобавок, и первые стихи Пушкина были французскими.

J'ai possédé une maîtresse honette,
Je la servais comme il lui faut
Mais je n'ai pas tourné sa tête:
Je n'ai jamais visé si haut!

Пушкин в лицее, правда, «считал схоластику за вздор и прыгал в сад через забор».

Но обратимся к Вольтеру. Он стал спрашивать друзей-ученых: «Где бы найти врага Лейбницу?» (для уничтожения научного авторитета последнего) — и получил ответ: лучше всего помочь может Ньютон, у которого с Лейбницем приоритетные споры (Лейбниц опубликовал свой курс анализа, не ссылаясь на предшествовавшие работы Ньютона, и тот обиделся, хотя сам ничего к тому времени еще по анализу не опубликовал).

Итак, Вольтер приехал в Лондон. Но он опоздал: Ньютон успел умереть. Все же Вольтер отыскал там Катерину Бартон, племянницу и наследницу Ньютона, в лондонском доме которой он и умер.

Катерина Бартон считалась красивейшей женщиной Лондона, но Ньютон возражал: «Нет, не красивейшая, а умнейшая». Еще до переезда в Лондон, в Кембридже, у Ньютона был ученик, Монтэгю Галифакс, который бывал у него дома, влюбился в Катерину (оба были поэтами) и сохранил это чувство на всю жизнь.

После «бархатной революции» лорд Монтэгю Галифакс стал лордом-канцлером, правящим Англией вместо короля, когда тот уезжал. Он основал существующий и сегодня Английский Банк и пригласил своего учителя Ньютона в Лондон, чтобы там заведовать Монетным двором (который

Ньютон быстро реорганизовал, проведя монетную реформу: он изобрел насечки на ободе монеты и машины для их изготовления, фальшивомонетчикам стало невозможно срезать золото с ребра монеты напильником, и денежный кризис был ликвидирован).

Катерина стала у Галифакса домоправительницей, и Лондон быстро признал ее первой леди; послы предпочитали иметь дело скорее с ней, чем с королевой или с леди Галифакс.

Вольтеру Катерина постаралась рассказать, что знала: он привез от нее в Париж историю про яблоки, доказывающие закон тяготения, которую Ньютон раньше никому, кроме племянницы, не рассказывал. И вот, чтобы подорвать авторитет покойного уже Лейбница, Вольтер стал доказывать, что Лейбниц все украл у Ньютона, а для этого Вольтер *создал настоящий культ Ньютона с его яблоками, сохранившийся и до сих пор*. Гёдель обнаружил, что Вольтер и просто повсюду сжигал труды Лейбница.

Так что без француза (на самом деле швейцарца) Аруэта никакого Ньютона известно бы и не было: никто бы не знал, что у Великого философа Лейбница[27] был такой соперник! — вот теория для защиты Наследия Французской Науки (подробно вся эта история описана в статье P. Bonnefoy, G. Rivière-Wekstein. C'est la faute à Voltaire // Fusion. 2001. №84. P. 4—25).

Вопрос об авторстве разных математических открытий остается острым и сегодня. Например, в различных экологических, экономических и других подобных работах по «прикладной математике», в том числе российских, можно часто встретить упоминание «бифуркации Хопфа», в результате которой равновесное состояние системы, теряя устойчивость, сменяется малыми вначале периодическими колебаниями: это так называемая «*бифуркация рождения предельного цикла*».

[27] Философские труды Лейбница были даже изданы на русском языке в многотомном издании Института Маркса—Энгельса—Ленина—Сталина у Волхонки, так что я школьником читал его доводы в пользу единства мира: он утверждал, например, что лично видел помесь крысы и кошки и что помеси людей с обезьянами заполняют Африку. Учение Лейбница было использовано марксизмом.

Философские идеи Лейбница не лучше математических. Он считал, например, что дифференцирование — гомоморфизм кольца функций, и утверждал, что окружность кривизны пересекает гладкую кривую в общей точке с кратностью четыре, хотя настоящим математикам, как Ньютон или Гюйгенс, или даже Лопиталь, а также и художникам, например, рисующим драпировки, было совершенно ясно, что эта кратность нечетна (так как кривая по одну сторону от точки касания расположена внутри круга кривизны, а по другую — вне).

К сожалению, в современных курсах анализа этот вопрос не обсуждается, а эксперименты, немедленно приводящие в обеих указанных выше задачах к открытию истины, никогда не делаются студентами (для которых экспериментальный характер науки математики и вообще остается тайной).

Вероятно, первым исследовал это явление Пуанкаре, опубликовавший, впрочем (например, в «Новых методах небесной механики»), скорее общий метод исследования всех подобных бифуркаций, имея в виду не столько этот простой частный случай, сколько его гораздо более сложные обобщения.

Но гениальные работы Пуанкаре оставались малозамеченными аксиомофилами, царствовавшими после него в математике. Только физик А. А. Андронов, ученик Л. И. Мандельштама, занялся развитием и приложением идей Пуанкаре (в особенности для нужд радиофизики) в конце двадцатых годов XX столетия. Теория Пуанкаре была затем перенесена с аналитического случая, которым он занимался, имея в виду задачу трех тел, на системы конечной гладкости (эти обобщения опубликовал Л. С. Понтрягин). К концу тридцатых годов эта теория, изложенная уже и в виде книг, и в математических статьях со строгими доказательствами и точными формулировками теорем, вышла далеко за рамки первоначальных исследований Пуанкаре (породив, среди прочего, исследование проблемы «*структурной устойчивости*», которую Андронов и Мандельштам называли *грубостью*).

Интересно, что одна из основных идей этой теории осталась неосвоенной даже сегодня, хотя она и была явно сформулирована Мандельштамом в его предисловии к знаменитой во всем мире книге Андронова и Хайкина «Теория колебаний». Эта идея состоит в том, что *структурная устойчивость* (*т. е. сохранение качественных выводов при малом изменении параметров, от которых зависит система*) — *свойство не системы* (*векторного поля, дифференциальных уравнений, фазового портрета и т. п.*), *а свойство тех вопросов, которые мы об этой системе задаем*.

Например, знаменитая теорема Андронова и Понтрягина о типичности грубых систем на двумерной плоскости или на сфере исследует вопрос о топологическом строении фазового портрета и доказывает, что малое возмущение типичной системы меняет фазовые кривые лишь так, что фазовый портрет в целом остается гомеоморфным (топологически эквивалентным) самому себе в невозмущенном виде: не меняется ни число положений равновесия, ни число предельных циклов и т. д. В 1965 г. С. Смейл в замечательной работе доказал, что в многомерном случае картина совершенно иная. Он нашел *типичные примеры негрубых систем, в окрестности которых нет грубых*, так что исследование даже типичной многомерной системы не может сводиться, как это происходит в двумерном случае, к алгеброподобному анализу комбинаторики простых и структурно устойчивых элементов, вроде равновесий, циклов и иных притягивающих множеств («аттракторов», т. е. предельных, установившихся режимов движения).

Философия Мандельштама подсказывает в этом случае такой путь: негруба не сама система, а лишь наше *слишком подробное* ее описание (с точностью до топологической эквивалентности фазовых портретов). Разумная задача исследования состоит в этом случае не в уточнении тонкостей бифуркаций (перестроек) топологической структуры портрета, а в том, чтобы *найти более грубые важные вопросы, ответы на которые уже будут обладать устойчивостью по отношению к малым изменениям типичной системы*.

Но математики-аксиомофилы неспособны на столь крутое изменение точки зрения, так что нам предстоит, вероятно, столь же долго ждать результатов в этом направлении, сколько прошло между Пуанкаре и Андроновым.

Что касается Э. Хопфа, то он опубликовал (парой десятков лет позже Андронова) один специальный частный результат о бифуркации цикла, не коснувшись даже вопроса о бифуркации всего фазового портрета системы, основного для Андронова. Как это обычно и бывает, тема стала затем известной под именем «теории бифуркации Хопфа» (я даже в этом виновен, так как сильно похвалил никому тогда не известный вклад Хопфа в своем докладе о теории бифуркаций на семинаре Р. Тома в Институте высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем в 1965 г., когда во Франции были уже прочно забыты теории Пуанкаре, а об Андронове еще и вовсе не знали). Некоторые положения этого доклада слушатели позднее опубликовали в статьях «О теории турбулентности».

В Москве недавно издали переведенную с американского языка китайскую книгу, в которой я прочел об «экологических применениях бифуркации Хопфа» высказывания примерно такой структуры: «мы изучаем при помощи этой теории рост урожая *яблок*, не ссылаясь на предшествующие российские работы, где аналогичная нашей модель использовалась для прогноза урожая *картошки*, которая у русских более распространена» (не исключено, что речь шла не о яблоках и картофеле, а, скажем, о грушах и арбузах).

Разумеется, таблица умножения не меняется, считаем ли бы яблоки или картошку, и русская модель прекрасно годилась бы для «нового», яблочного, случая (но, вдобавок, ее математическое содержание было глубже, а результаты полезнее, чем примитивный китайско-американский вариант той же теории).

Так называемая «прикладная математика» чаще всего вся устроена подобным же воровским образом. Пастер давно уже провозгласил, что *никаких «прикладных наук» не бывает*: это просто способ выкачивать средства на свои потребности, отнимая их у истинных первооткрывателей. На самом деле, по словам Пастера, существует только *наука*, открывающая *истины*. И еще существуют *приложения* этой науки, не составляющие сами по себе никакой отдельной «прикладной науки» — так говорил Пастер, величайший прикладник, которого трудно заподозрить в ненужных человечеству занятиях.

В первые годы перестройки меня пригласил на заседание Лондонского математического общества[28] его тогдашний президент: он, оставляя свой пост, организовывал традиционное прощальное заседание, на котором, кроме него, должен был, по традиции, выступать на сходную тему параллельный докладчик, и он выбрал меня, так как собирался говорить о *влиянии на динамические системы малого шума*. Он даже прислал мне в Москву тезисы своего доклада, посвященного его новым открытиям в этой области.

Я никогда ничего не публиковал на эту тему, хотя и занимался ею еще студентом, в пятидесятые годы. Цепочка явлений, которые я тогда обнаружил, состоит в следующем. Для учета влияния малого шума (диффузии в фазовом пространстве) зададим какое-нибудь случайное распределение начальных условий с гладкой плотностью и проследим, что с ними станет со временем вследствие динамической эволюции, сопровождаемой малой диффузией.

Вначале плотность начнет вдруг быстро расти около некоторых точек — аттракторов, где образуется горб приблизительно гауссовского локального распределения. Скорость роста этого горба определяется силой притяжения аттрактора (т. е. отрицательным собственным числом задающего динамику векторного поля в притягивающей точке или же отрицательной вещественной частью этого собственного числа, если оно комплексное). Быстрее всего будет расти один из таких гауссовских горбов — тот, для которого упомянутая вещественная часть наиболее отрицательна.

Победителем в этом соревновании притягивающих режимов может, однако, оказаться вовсе не он. Через некоторое время бóльшую роль начнет играть *не начальная скорость роста, а масса притягиваемых фазовых точек, т. е. размер так называемого бассейна аттрактора*. Соответствующий аттрактору с наибольшим бассейном горб будет не обязательно самым высоким, но он будет иметь бóльшую массу, определяемую не только высотой, но и шириной горба.

---

[28] А. Н. Колмогоров считал, что *избрание почетным членом Лондонского математического общества — высшая честь, которой может удостоиться математик*, так как их список почетных членов лучше, чем любой список математиков какой бы то ни было Академии, лауреатов какой бы то ни было математической премии: у них нет дискриминации ни по возрасту, ни по области математики или по географии.

От американских и европейских организаторов международной конференции в Азии я получил однажды приглашение с дополнительным дискриминационным условием: сменить паспорт так, чтобы в новом не было виз некоторых нежелательных стран.

Однако соревнование аттракторов и этим не кончается. На следующем (гораздо более длительном) этапе медленное взаимодействие сложившихся около аттракторов горбов описывается так называемым *туннельным эффектом*: возможностью случайного (хотя и редкого) перехода из одного бассейна в другой за счет «диффузии». Это явление описывается приближенно системой линейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (размерность фазового пространства которой равна числу конкурирующих между собой аттракторов), т. е. матрицей небольшого порядка.

В конце концов победит один из этого небольшого числа аттракторов (какой именно — это зависит от собственных чисел упомянутой матрицы линейной системы, описывающей туннелирование). Например, если исходное векторное поле — градиент (со знаком минус) некоторого потенциала, то в конце концов установится «распределение Гиббса», в котором *основная масса фазовых частиц сосредоточится около того минимума потенциала, для ухода от которого приходится преодолевать наиболее высокий потенциальный барьер*.

Я называл в своей студенческой работе этот побеждающий в конце концов аттрактор *«генеральным аттрактором», так как его так же трудно предугадать по начальной эволюции системы* (*в которой превалируют сперва аттрактор с наибольшей скоростью притяжения, а затем — с наибольшим бассейном*)*, как невозможно было предвидеть, кто будет следующим Генеральным Секретарем Партии* (*вслед за Н. С. Хрущевым*).

Но мой учитель, А. Н. Колмогоров, исключил весь этот раздел о шуме из моей дипломной работы при ее публикации, справедливо сославшись на существование (даже и на английском языке) предшествовавшей работы о влиянии малого шума, опубликованной еще в тридцатые годы Андроновым, Понтрягиным и Виттом (впоследствии я увидел, что моих асимптотик, описанных выше, эта работа не содержала). Эти мои построения так и остаются неопубликованными — надеюсь, кто-нибудь приведет эту область в порядок, здесь есть и достаточно ясные, но глубоко нетривиальные, асимптотические теоремы (которыми начинал уже заниматься В. Фок), и трудные нерешенные вопросы (например, относящегося к псевдопериодической топологии неградиентных или многозначно-градиентных систем).

Возвращаясь к приглашению в Лондон, скажу, что я сразу понял, что предложенная «новая» теория содержит лишь малую часть классической работы Андронова с сотрудниками. Витт, между прочим, был вначале еще и третьим соавтором классической «Теории колебаний» Андронова и Хайкина. Но в более поздних переизданиях этой книги указано, что в первом издании (1937 г.) его фамилия «*была пропущена вследствие трагической ошибки*». Для российского читателя сразу совершенно ясно, какую «трагическую ошибку» совершили в 1937 г.: Витта расстреляли. Причины неправильной атрибуции авторства открытий бывают разными.

По этой ли или по иной причине, но работы Витта о влиянии малого шума на динамические системы оставались совершенно неизвестными на Западе (для физиков статья была слишком трудна математически, а для математиков сама постановка вопроса была слишком физической).

Так что я написал приглашающему меня в Лондон о существовании статьи Андронова, Понтрягина и Витта. С началом перестройки мне стали разрешать ездить за границу, и я приехал в Лондон на это заседание. Докладчик, хотя и поблагодарил меня за указанную мною литературу, ни слова не сказал в своем докладе о предшествовавшей работе российских авторов (это — стандартная западная технология, вплоть до реклам нобелевских премий или филдсовских медалей: не сослаться на российских предшественников совершенно безопасно для репутации эпигона, даже если он просто переписал русскую работу).

Затем слово предоставили мне, и я рассказал там всю описанную выше историю (перед своим докладом, посвященным действительно новым открытиям).

Привести много примеров беззастенчивого присвоения российских результатов (как моих учителей, включая Колмогорова, Петровского, Понтрягина и Рохлина, так и моих учеников) было бы слишком легко. Замечу только, что у меня лично практически никогда не крадут — возможно, из опасения, что я не промолчу, как это почти всегда делали мои ограбленные коллеги.

В середине шестидесятых годов в Америке начали появляться статьи авторов-«прикладников», претендующих на «*перенесение результатов Ю. Мозера об инвариантных торах гамильтоновых систем на аналитический случай*».

Упомянутая замечательная работа Ю. Мозера была обобщением теоремы Колмогорова, опубликованной тем в 1954 г., об инвариантных торах аналитических систем. *Мозер перенес теорему Колмогорова со случая аналитических функций на случай* 333 *раза дифференцируемых*. Это было замечательным достижением, так как сам Колмогоров считал, что даже бесконечного числа производных не хватило бы, так что работа Мозера изменила всю философию в этой области. Мозер использовал, в дополнение к работе Колмогорова, технику сглаживания Дж. Нэша и неравенства Адамара—Литтлвуда—Колмогорова между величинами производных разных порядков, обогнавшие на много лет теорию оптимального управления, к которой они по существу относятся.

Между прочим, я никогда не понимал деталей доказательств этой работы Мозера и даже опубликовал (в УМН 1963 г.) свою версию его доказательства, основанную на рассказанных им мне идеях. И только тридцатью годами позже мой ученик М. Б. Севрюк объяснил мне, почему я не понимал текст Мозера: во всех, кроме моего, многочисленных вариантах этого доказательства имелась недоказанная лемма, сформулированная вдобавок так, что ее легко можно было понять неверно, а к этому неверному утверждению можно было легко подобрать контрпримеры, которые мне и мешали.

Когда мне прислали из американского журнала на отзыв эти «прикладные обобщения теоремы Мозера», я резко возражал против такой попытки приписать Мозеру результаты Колмогорова (сегодня вся эта область называется обычно «теорией КАМ», по фамилиям трех авторов). Мозер поддержал меня и возражал не менее сильно, чем я, против попытки отнять у Колмогорова его результат (справедливо подчеркивая, правда, что Колмогоров так и не напечатал подробного доказательства своей теоремы, каковое доказательство появилось в печати лишь десятью годами позже теоремы, в посвященной шестидесятилетию Колмогорова статье Арнольда).

На мой взгляд, в короткой статье Колмогорова (в ДАН 1954 г.) все понятно и правильно. Основной вклад Арнольда в теорию КАМ — вовсе не публикация доказательства теоремы Колмогорова, а открытие (1963 г.) универсального механизма неустойчивости многомерных систем (позже названного физиками «диффузией Арнольда»), решение (1961 г.) проблемы Биркгофа об устойчивости эллиптических положений равновесия и доказательство вечной адиабатической инвариантности переменной действия (1962 г.).

Забавной моей ошибкой было при этом то, что, излагая свое решение проблемы Биркгофа, я ограничился точно указанной Биркгофом формулировкой задачи, в которой положение равновесия предполагается нерезонансным, в то время как в ходе своего доказательства я использовал не все это условие, а лишь отсутствие резонансов порядка меньшего пяти (теперь их называют *сильными*). *Рациональные числа со знаменателем 5 или выше ведут себя в этой задаче как иррациональные.*

Мозер сделал это дополнение к моему решению проблемы Биркгофа год спустя, но в свое время я просто проглядел эту возможность усовершенствовать результат, не меняя доказательства, будучи странно загипнотизирован формулировкой «классической» проблемы. Вывод: *никогда не следует поддаваться такому гипнозу авторитетов, сущность дела важнее, чем авторитетность классической формулировки*! Для устойчивости достаточно уже отсутствие сильных резонансов, порядка меньшего пяти.

Писание математических текстов — сложное искусство, и даже лучшие из математиков не всегда оказываются на высоте, а уж большинство математических публикаций (будь то научные статьи или учебники, даже для средней или начальной школы) вовсе не выдерживают никакой критики[29].

Недавно издательство Московского Центра непрерывного математического образования прислало мне образцы своих вновь вышедших книг, включая новые издания классической книги Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» и книги И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и Э. Э. Шноля «Функции и графики». И я с ужасом увидел, что даже и мои любимые книги следовало бы исправлять.

Например, в первой из этих книг я обнаружил фантастические транслитерации иностранных имен и фамилий: видно, что ни переводчик, ни издатель, ни редактор нового издания не знали, о ком идет речь. Правда, это наша старинная традиция: редко кто может понять, что *наш «Гейне» — это всем известный Хайне, да и наш «Гильберт» — на самом деле Хильберт*; *наш «Гамбург» — на самом деле Хамбург* (последними напрашивающимися еще здесь очевидными примерами не хочу засорять свой текст). Меня утешает только фантастическое произношение английских слов французами (и французских — американцами). Например, по французскому телевизору ежедневно можно узнать новости «острова Манатан» и «города Миами» (с ударением в обоих случаях на последней гласной;

---

[29]По словам Харди, «писать о математике — печальное занятие». Но я думаю, что он имел личные причины печалиться, отсутствовавшие, например, у его постоянного сотрудника, веселого альпиниста Литтлвуда, работы которого по теории гамильтоновых динамических систем предвосхищают более поздние классические результаты Нехорошева об экспоненциальной медленности эволюции. Открытия Литтлвуда в общей теории хаоса в динамических системах называются теперь «теорией подковы Смейла». Замечательная книга Литтлвуда «Математическая смесь», рассказывающая больше о жизни, чем о математике,— и интересная, и веселая. Непонятно только, как он мог уживаться с Харди, который выглядит на страницах своей (саморазоблачающей, подобно четырехтомным «Воспоминаниям» Гротендика) «Апологии математика» несчастным злодеем.

Правильный совет сочинителям математических текстов дал Пушкин (хоть он и был, по словам Набокова, «посредственным математиком»). Пушкин писал в «Бове» (1814 г.): «*Что примера лучше действует*?» К сожалению, этому призыву сейчас мало кто следует, и писания современных математиков обычно неисправимо абстрактны и вовсе лишены примеров («Уж очень примеры трудны»,— сказал мне один великий современный математик).

Книги Бурбаки о группах симметрий правильных многогранников содержат массу теорем, но для основного примера правильного многогранника, гиперикосаэдра с его 120 вершинами и шестьюстами тетраэдральными гранями в четырехмерном пространстве, замечательно красиво и просто описанного Коксетером уже в 1928 г., места у них не нашлось.

Основную причину исключения примеров сформулировал уже в 1876 г. крупнейший американский математик Сильвестр: по его словам, «удивительный интеллектуальный феномен» состоит в том, что «*доказательства общих утверждений проще доказательств содержащихся в них частных случаев*».

поясню для затруднившихся, что речь идет о Манхеттене и о Майами). Смейла мои французские друзья называют «Смалль».

В 1965 г. около Ситэ Уинверситер в Париже, на Внешнем бульваре, высунувшийся из окна лимузина неимоверной длины cornfed (краснорожий) американец потребовал от меня справки, как ему проехать на «*Чэмпл-Зи*». Я пытался вспомнить полузабытый немецкий язык (из-за его «Зи»), но он, обратившись к заполнявшим машину старушкам в голубых и розовых детских платьицах с оборками и помпончиками, высунулся вновь с предложенным ими вариантом: «*Чамп Элайзи*?»

Тут я (вспомнив, что я математик) расшифровал эти ребусы и объяснил ему дорогу к Елисейским Полям. Через много лет моей жене на уроке французского языка в Париже довелось читать вслух текст о канадской семье, поселившейся в Париже на «Avenue de Champs Elysées». И она, вспомнив мой рассказ, произнесла этот адрес и как «Чамп Элайзи», и как «Чэмпл-Зи». Однако ее вина не так уж велика. Председатель Ученого совета Математического института им. В. А. Стеклова в Москве Иван Матвеевич Виноградов, зачитывая названия диссертаций вроде «Об одном свойстве одного решения одного дифференциального уравнения», всегда произносил «*одного диофантова уравнения*» (поправляясь с комментарием: «*Ну, ничего, невелика птица*», когда перевирал и фамилию оппонента).

Много лет спустя мне довелось председательствовать на этом же Совете, и когда мне надо было объявлять о защите диссертации по теории чисел, то я, вспомнив о Виноградове, нечаянно прочел слова «диофантово уравнение» как «дифференциальное»!

Но вернемся к книгам МЦНМО. Открыв «Функции и графики», я был поражен фразой: «*Значение функции $f(x)$ в точке a мы будем обозначать через $f(a)$*».

Я всегда возражал против занудства бурбакистских оборотов речи (хотя мои французские друзья в 1965 г., приглашая меня на «Конгресс» Бурбаки, говорили мне: «Что бы ты против бурбакизма ни возражал, мы-то знаем, что главный бурбакист в Москве — это ты!»).

В случае определения $f(a)$ я, пожалуй, на стороне терминологической четкости Бурбаки. *Функцией является не $\sin x$, а синус, не $f(x)$, а f. Значение функции f в точке x — вот что означает символ $f(x)$, а вовсе не саму функцию.* Смешение функций (операторов, функторов и т. д.) с их значениями — недопустимая в преподавании небрежность, делающая огромное число математических текстов совершенно неудобочитаемыми.

Иерархия типов объектов, различающая элементы и множества, отображения и значения, области определения и т. д., столь же необходима для понятности текста, как *обязательное упоминание квантора перед* *каждым вводимым вновь объектом* (особенно в русском тексте, где нет артиклей, иногда заменяющих кванторы).

Что означает фраза: «значение функции f в точке x положительно», если о точке этой речи еще не было? Утверждения «значение функции f положительно *в каждой* точке x» и «*существует* точка x, в которой значение функции f положительно» имеют совершенно разный смысл. Хотя *грамматически* и допустимо заменить любое из них приведенной выше фразой, *математически* такая замена совершенно недопустима!

Еще одна типичная ошибка, делающая русские статьи непереводимыми на английский,— это русские родительные падежи. «Рассмотрим значение величины x» — что здесь x — величина или значение? Редакторский принцип таков: «*отец всегда неизвестен*». В математике это приводит к такой же неоднозначной трактуемости текста, как и неизвестно к кому относящиеся местоимения: «Иван просил отца, чтобы он купил ему козла, чтобы он ездил на нем»; спрашивается, кто на ком будет ездить? Козел на отце? В математике контекст далеко не всегда помогает сделать правильный выбор. Мне приходилось сталкиваться со случаями, когда редактор изменял смысл фразы на *прямо противоположный*, так как в правильное содержание не мог поверить, в силу его нетривиальности.

Но вернемся к «Функциям и графикам». Перелистывая этот школьный учебник, я обнаружил в нем массу грубых ошибок, за которые школьник получил бы двойку (включая неверный график функции $y=3x$, соответствующий, скорее, случаю $x=3y$), а еще больше — совершенно непонятных утверждений (некоторым из которых я даже умел придать правильный смысл, но которые читателем-школьником будут в лучшем случае просто не поняты, а в худшем — вследствие неправильного понимания которых он навсегда впадет в заблуждение)[30].

Вот еще один пример постоянно встречающегося в русских книгах и

[30]Неожиданные ошибки я встретил и в публикации моей собственной лекции, также изданной МЦНМО: «Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов» (М., 2002). Там написано: «Определение. Произведение комплексного числа на сопряженное ему называется квадратом модуля комплексного числа. Лемма. Модуль — действительное неотрицательное число. Доказательство. Квадрат модуля больше или равен нулю, поэтому модуль — тоже».

Разумеется, я не мог ни произнести, ни написать такую чушь. Из положительности квадрата числа вывести положительность самого числа невозможно. Видимо, слова «Лемма» и «Доказательство» добавлены либо записывавшими лекцию слушателями, либо редакторами. Но подобные мелочи не безобидны. Они серьезно подрывают у читателей понимание того, что такое математическое доказательство, и напоминают мне прочитанное во французском учебнике для математиков определение импликации: «Пусть A и B — два любых утверждения. Если оба они верны, то говорят, что из A вытекает B».

После таких «импликаций» учить студентов каким бы то ни было естественным наукам бесполезно: они думают, что из того, что дважды два четыре, «вытекает», что Земля вращается вокруг Солнца.

статьях неологизма: термин «*линейное пространство*». Во всем мире слово «линейный» означает «одномерный» (как линия): «линейный элемент» — это бесконечно малый кусочек кривой, «линейное расслоение» — расслоение на прямые, и т. п.

То, что в России долго называли «линейными пространствами», повсеместно называли и называют «*векторными пространствами*» (хотя термины «линейные функции» и «линейные операторы» всеми употребляются: в этих случаях подозрения о предполагаемой одномерности не возникает)[31].

При всех недостатках нашей математической литературы, она все же остается одним из последних оазисов настоящей научной культуры, с трудом сохраняющейся в окружении американизирующейся действительности супермаркетов и компьютеров.

На недавнем заседании Исполнительного комитета Международного математического союза в Париже коллеги долго меня пытались убедить, будто *художники должны смириться с неизбежностью победы фотографии над живописью*, а сопротивляться этим процессам, как то пытаюсь делать я, дескать, бессмысленно.

В математике их проект состоит в том, чтобы за несколько лет *полностью запретить во всем мире любое некомпьютеризированное математическое суждение. Все математические публикации прошлого предлагается собрать* (*заплатив много миллионов долларов*) *в единое компьютерное издание*. Сочинение любого последующего математического текста станет доступным самым безмозглым «узким специалистам» по математике по модулю пять, незнакомым с математикой по модулю семь, которые будут компьютерным путем компилировать «новые достижения», соединяя отдельные строки или страницы старых публикаций вроде полей Диофанта. И вся эта деятельность обещает давать

[31] Когда я был «студентом» Сорбонны, мой профессор Ж. Лере рассказал мне, что он не смог своевременно оценить по заслугам замечательную работу И. Г. Петровского о лакунах для гиперболических уравнений из-за того, что Петровский утверждал в ней, будто кокасательное расслоение любой сферы тривиально.

Разумеется, Петровскому нужна была только локальная тривиальность, но одно пропущенное слово уже может серьезно помешать читателю. Быть может, в этом одна из причин, почему в списке филдсовских медалистов нет ни Петровского, ни Колмогорова, ни Понтрягина, ни Лере.

Впрочем, отсутствие в этом списке таких имен, как, скажем, Г. Вейль, С. Черн, М. Морс, Х. Уитни (называю лишь первые приходящие в голову недостающие имена) больше говорит о свойствах филдсовских комитетов, чем об этих замечательных математиках, чьи достижения составляют славу математики XX в.

По счастью, филдсовская пропаганда и дискриминация оказывает на развитие математики и на репутации математиков не больше влияния, чем включение математической задачи в список проблем Гильберта.

большой доход (кому — я не сумел узнать, но, видимо, организаторам этого проекта — в первую очередь).

Как я ни пытался объяснить коллегам, что *важнее заботиться об интересах производителей, чем продавцов* (*даже, например, нужно поддерживать производителей пищи, а не организаторов цепей продающих ее супермаркетов*), поддержки у представляющих математиков всех стран деятелей, составляющих Исполнительный комитет Международного математического союза, я не нашел. «Русские не понимали и не понимают бизнеса»,— сказали они мне.

Напротив, они рекомендовали в свою «Комиссию по образованию» специалиста по «дидактике применения компьютерной технологии для перестройки математического образования», хотя эта *лемминговская самоубийственная тенденция состоит просто в том, чтобы перестать учить детей чему бы то ни было настоящему, особенно думать, а все думание заменить нажиманием на кнопки компьютера: ведь в Америке думать не учат*!

Французский школьник-отличник на вопрос «Сколько будет два плюс три?» отвечает: «Три плюс два, так как сложение коммутативно», а считать до пяти, хотя бы на пальцах, его не научили (видимо, вследствие «компьютерной дидактики»).

Студент четвертого курса одного из лучших университетов (на письменном экзамене по теории дифференциальных уравнений, где я запретил пользоваться компьютерами и калькуляторами): «*А как же я узнаю, будет ли число 4/7 больше или меньше единицы*?»

Ему нужно было для решения трудной задачи об асимптотике решения дифференциального уравнения выяснить, сходится ли некоторый интеграл, и это зависело от показателя в асимптотике подынтегральной функции, который действительно был равен 4/7 (и для нахождения которого студенту потребовалась пара страниц нетривиальных математических рассуждений качественной теории дифференциальных уравнений, которой учил его я, и с которыми студент хорошо справился). Но *простым дробям его учил не я, а «компьютерные дидактики», и он ничего в дробях не понимал*, а ведь хороший был студент!

Такое американизированно-компьютеризованное «обучение» совершенно бессмысленно, но, к сожалению, оно постепенно, но неуклонно, завоевывает мир: ведь потребность в понимании и думании «отпадает», что и является идеалом для бюрократических хозяев жизни, которые всегда стремятся обезопасить себя от конкуренции со стороны людей мыслящих и компетентных.

Уже упомянутый Международный математический союз принял решение *повысить с этого года на 10 процентов членские взносы для* *входящих в него стран*. Я стал разбираться, зачем это нужно, так как даже для России взнос уже тяжел, а многие бывшие республики СССР и Югославии уже просят о своем переводе в более низкую категорию ради снижения своего взноса.

Оказалось, что дополнительные деньги нужны для оплаты, во-первых, новых бухгалтерских расходов, а во-вторых,— для аудиторской проверки своих финансовых дел, т. е. для контроля над потенциальными ворами. Таким образом, от поддержки научных исследований, являющейся объявленной целью Союза, он постепенно переключается на поддержку компьютерного бизнеса (стремящегося прекратить весь выпуск научной литературы в виде книг и статей на бумаге) и на поддержку своего бюрократического и полицейского аппарата. А вот на издание «Московского математического журнала» по-русски денег нет, и он выходит только по-английски.

Франция объявила (в связи с президентскими выборами), что правительство сейчас отбирает у населения *сорок шесть процентов* дохода, «так как страна переживает посткоммунистический период» (занимая, вдобавок, первое место в Европе по числу безграмотных[32] и одно из последних — по доходу на душу населения, но зато первое — по рекордной величине национального долга).

Международный математический союз считает, что он не станет доводить свои затраты на бюрократию до *сорока шести* процентов своего бюджета. Но мне все же кажется, что речь идет о самоубийственной политике замены математиков[33] безграмотными компьютерщиками, беззастенчиво публикующими от нашего имени свои измышления в своих воровских («пиратских») изданиях. От моего, например, имени они объявили, будто малое отклонение метеорологических начальных условий от зарегистрированных сказывается на изменении погоды через несколько недель, увеличиваясь за это время «примерно в 105 раз».

У меня, в их первоисточнике, было «*примерно в десять в пятой степени раз*», т. е. выращивая стометровое возмущение до глобального размера земного шара.

Кроме явной некомпетентности их оценки (*сто пять гораздо меньше ста тысяч*), здесь еще проявилось полное отсутствие у автора подделки не только математической, но и самой обычной человеческой культуры.

[32] Солдаты-новобранцы, например, не понимают письменных предписаний и могут послать ракеты не туда. Неграмотны из них 20 процентов.

[33] «Мы привыкли к тому, как создает сам потребитель удобные ему продукты текстильной и нетекстильной промышленности через эластичную среду безличного предпринимательства. Потребитель не разбирается уже в достоинстве продукта, потому что причина недостатков последнего — именно это господство невежественного потребителя». Б. Пастернак, 1930 (в книге: «Об Искусстве». М.: Искусство, 1990. С. 123).

Ни один культурный человек никогда ни о чем не сможет сказать «примерно сто пять»: если уж «примерно», то «сто».

В другой компьютерной (столь же пиратской) публикации от моего имени сказано, будто, по моим словам, «*Россия может догнать Америку, только ей, России, для этого надо уничтожить свою математику*».

Это — образец того, какое «новое издательское дело» нам готовят. Ничего подобного я нигде и никогда не говорил. В своей статье я писал, что во всем мире, к сожалению, идет процесс снижения культурного и образовательного уровня, но что Россия и здесь, как и в других процессах, к счастью, отстает от мирового уровня: наши школьники по-прежнему умеют сознательно складывать дроби, любознательно интересуются науками, приходят в университеты и пополняют нашу, вполне еще активную, математическую школу.

«Уничтожать» эту школу я ни в коем случае не призываю, а, наоборот, всячески стремлюсь ей содействовать, в том числе — и образованием Независимого московского университета, и книгами, и лекциями, в том числе и настоящей лекцией (прочитанной 28 ноября 2001 г. для будущих учителей математики в Московском педагогическом государственном университете). Слушатели приятно удивили меня квалифицированным, живым и заинтересованным обсуждением всех затронутых здесь вопросов и перспектив математического образования и математической науки.

Более подробный разбор современных попыток уничтожить математическое образование в России имеется в моей статье «Новый обскурантизм и российское просвещение» (М., 2003. 60 с. Соответствующее краткое выступление в Комитете по образованию Государственной Думы опубликовано в «Известиях» 6 декабря 2002 г.)

ДОКЛАД О ДЕВЯТИ НЕДАВНИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОТКРЫТИЯХ

Ответ на запрос французских математиков о крупнейших достижениях современной математики

§ 1. Контактная топология и обращение волн

Простейший пример распространения волн дает семейство эквидистант данной гладкой плоской кривой, например эллипса (их, а также волновые фронты эллипсоидов изучал А. Кэли в своем труде, предшествующем теории Морса и теории катастроф и содержащем основные результаты этих теорий). Можно представлять себе исходную кривую местом, где происходят некоторые возмущения — эпидемия, излучение звука или света.

Распространяясь внутрь эллипса, волновой фронт, который изначально был гладким, приобретает четыре *особенности* (точки возврата). Позже, в процессе распространения, они исчезают, и вывернутый — уже гладкий — фронт распространяется далее до бесконечности вовне изначального эллипса.

Изучение изменений выворачивающихся фронтов привело к созданию новой математической науки — контактной топологии, описывающей волновые фронты через их *лежандровы контактные многообразия* (образованные контактными элементами[34] фронтов в расслоенном пространстве всех контактных элементов пространства, содержащего фронт): они тесно связаны с преобразованиями Лежандра, откуда и происходит их название.

В случае одномерного фронта лежандрово многообразие является кривой — *лежандровым узлом* в трехмерном пространстве, образованном всеми контактными элементами плоскости. Топология проявляется здесь благодаря следствию теории Гюйгенса распространения волнового фронта: *топологический тип лежандрова узла в пространстве элементов не*

[34] Контактный элемент на многообразии — это гиперплоскость, составленная из приложенных в одной точке касательных векторов. Если многообразие — плоскость, то элемент можно представлять себе как бесконечно малый кусочек прямой (или гладкой кривой). Многообразие всех контактных элементов плоскости трехмерно (и расслоено над этой плоскостью на окружности элементов, проходящих через одну точку).

может измениться в процессе распространения. Исходная и конечная лежандровы кривые задают узел одного и того же типа. (Это утверждение справедливо для любого процесса распространения волн, например для движущихся эквидистантных кривых на римановой поверхности, метрика которой может даже изменяться со временем.)

Это свойство сохранения узлов в любых системах распространения волн вытекает из корпускулярно-волновой двойственности: частицы движутся вдоль лучей согласно гамильтоновой динамической системе, и теорема единственности запрещает лучам (или фронтам) касаться. Топологический тип лежандрова многообразия волновых фронтов высших размерностей (n в $(2n+1)$-мерном расслоенном пространстве) также сохраняется.

Своеобразным результатом «контактной гомологической теории», созданной Ю. Чекановым для изучения топологических инвариантов распространяющихся фронтов, является следующая теорема, доказанная им вместе с П. Пушкарем:

При любых процессах выворачивания найдется промежуточный фронт с не менее чем четырьмя точками возврата.

На самом деле доказанное ими утверждение заключается в том, что *для любого однопараметрического гладкого семейства лежандровых кривых* (интегральных кривых естественной контактной структуры в пространстве контактных элементов), *связывающих лежандрову кривую фронта, движущуюся на плоскости внутрь диска, ограниченного ею, с лежандровой кривой вывернутого фронта, движущейся наружу, фронты некоторых промежуточных лежандровых кривых из связывающего семейства имеют по крайней мере четыре точки возвата каждый.*

Доказательство этой замечательной, имеющей глубокий физический смысл топологической теоремы очень сложно и использует, с одной стороны, недавний прогресс в симплектической топологии (гомологии Флёра и квантовые гомологии и т. п.), а с другой — результаты С. Баранникова об алгебре комплекса Морса (не получившие, к сожалению, заслуженного признания в момент своего появления несколько лет назад).

Вся эта новая теория предоставляет собой фантастическое обобщение забытой классической теоремы Штурма и Гурвица о рядах Фурье (говорящей, что *вещественная периодическая функция имеет по крайней мере столько же нулей, сколько и гармоника наименьшего порядка ее ряда Фурье*). Отсутствие постоянного члена дает два нуля — и это в точности неравенство Морса для окружности. Теорема Штурма—Гурвица обобщает это утверждение на критические точки высшего порядка, в которых обращается в нуль выражение $d(d^2+1)\cdots(d^2+n^2)f$.

Обобщение этой теоремы Пушкарем и Чекановым в некотором смысле параллельно обобщению теории Морса на пересечения лагранжевых многообразий в симплектической топологии: теории Морса и Штурма являются просто инфинитиземальными (или линеаризованными) вариантами новых общих топологических теорем в симплектической и контактной топологии. Эти новые результаты сводятся к своим более простым инфинитиземальным вариантам, когда описываемые ими преобразования лагранжевых и лежандровых многообразий остаются малыми. Но чекановская контактная теория доказывает, что они *остаются в силе и при сколь угодно больших деформациях*.

Таким образом, эта новая теория является далеко идущим *нелинейным топологическим обобщением теории Штурма—Гурвица* (представляющей собой обобщение теории Морса на высшие производные), в которой *функции* морсовской или штурмовской теории уже могут быть не однозначными, а *многозначными* (например, локально вести себя как квадратный корень). Вместо таких функций формально рассматриваются лагранжевы или лежандровы подмногообразия, которые больше не являются сечениями кокасательного расслоения или расслоения 1-струй (каковыми были лагранжевы и лежандровы подмногообразия, ассоциированные с функциями, т. е. лагранжевы графики дифференциалов и лежандровы графики 1-струй функций).

Я считаю изобретение контактной топологии, вершиной которой является теорема Чеканова и Пушкаря о выворачивании волновых фронтов, одним из наивысших достижений математики конца XX в. Это — нечастый случай, когда современная математика породила трудный физически значимый результат.

§ 2. Симплектические неподвижные точки и «последняя геометрическая теорема» Пуанкаре

В современных терминах утверждение этой теоремы (обязанной своему происхождению исследованиям Пуанкаре периодических движений в задаче трех тел) выглядит так.

Количество неподвижных точек любого точного симплектоморфизма компактного симплектического многообразия не меньше количества критических точек гладкой функции на этом многообразии.

И неподвижные, и критические точки можно подсчитывать как с кратностями (морсовская версия), так и геометрически (в версии Люстерника—Шнирельмана).

Точный симплектоморфизм, по определению,— это конечный член однопараметрического семейства диффеоморфизмов, порожденного движением точек симплектического фазового пространства под действием некоторой гамильтоновой системы. Здесь функция Гамильтона может зависеть от времени. Требование *точности* заключается в том, что гамильтониан должен быть однозначной функцией, а не просто замкнутой 1-формой. Поворот тора (не имеющий неподвижных точек) служит примером неточного симплектоморфизма. В размерности 2 симплектоморфизмы — это просто диффеоморфизмы, сохраняющие площадь. В высших размерностях они определяются сохранением обобщенной площади (которая является замкнутой невырожденной 2-формой, называемой «симплектической структурой» и «интегральным инвариантом Пуанкаре», или «гильбертовым инвариантным интегралом»).

Сформулированная выше теорема была опубликована как гипотеза А. Пуанкаре (сразу после его смерти) для плоского кругового кольца, и в этом случае она была позднее доказана Г. Д. Биркгофом. Я опубликовал общую гипотезу, сформулированную выше, (доказав ее при некоторых ограничениях) в 1965 г., но эта статья оставалась непрочитанной почти 20 лет, поскольку она была напечатана на французском языке (в C. R. Acad. Sci. Paris).

Позже эта «гипотеза Арнольда» послужила толчком к большому развитию симплектической топологии (замечательны работы Конли, Цендера, Громова, Элиашберга, Шапрона, Лоденбаха, Сикорава, Флёра, Хофера, ...). Возможно, теория гомологий Флёра (со своими приложениями к топологии и квантовой теории поля) является наиболее известным продуктом развития, порожденного этой проблемой.

В прошлом году мне сообщили, что «гипотеза Арнольда» окончательно доказана (независимо несколькими соревнующимися командами, включающими Фукая, Оно, Руана и многих других; все они использовали технику Концевича). К сожалению, я не могу проверить, верны ли окончательные доказательства. Доказанное утверждение является, возможно, более слабым, чем моя изначальная оптимистическая формулировка, приведенная выше (и основанная на неформальной аналогии между лагранжевыми многообразиями и «многозначными производящими функциями» рациональной механики).

В любом случае я рассматриваю прогресс на пути к доказательству теоремы о симплектических неподвижных точках (и ее версии для пересечений лагранжевых многообразий) как одно из главных достижений математики прошедшего века.

§ 3. Симплектические упаковки

Если совокупность шаров в евклидовом пространстве может быть вложена в больший шар с помощью сохраняющего объемы диффеоморфного вложения, то объем большего шара должен быть больше, чем общий объем шаров, которые требуется вложить. Для возможности симплектической упаковки в размерности 2 это ограничение является и достаточным.

Однако в симплектическом пространстве размерности большей двух такая упаковка в шар большего объема не всегда возможна. М. Л. Громов заметил, что *в четырехмерном пространстве два одинаковых шара единичного объема не могут быть симплектически вложены без самопересечений в шар объема два*. Позже Д. Макдаф и Л. Полтерович подсчитали максимальную часть большего 4-шара, которая может быть симплектически покрыта с помощью $n < 10$ одинаковых непересекающихся меньших шаров: только 50% для $n = 2$ шаров и только 75% для $n = 3$ (в то время как для $n = 4$ или 9 ограничений нет, что легко следует из существования разбиения треугольника на 4 или 9 конгруэнтных меньших треугольников).

Недавно П. Биран доказал совершенно неожиданный результат в этой области: *начиная с $n = 10$ все эти ограничения громовского типа исчезают и можно покрыть всю внутренность* (*за возможным исключением области, объем которой произвольно мал*) *с помощью заданного большого числа n симплектических шаров одинакового объема*.

Огромная часть всех этих достижений произошла из открытия (Д. Макдаф и Л. Полтеровичем) странной связи этой упаковки в симплектической геометрии с алгеброй и комплексной алгебраической геометрией: эти результаты (показывающие, например, что *критическое значение непокрытого объема для $n = 8$ шаров равно* $1/289$ *объема большего шара*) основаны на нескольких работах, в которых даны контрпримеры к алгебраическим гипотезам Гильберта, связанным с его «14-й проблемой».

Продолжая эту цепь рассуждений, Биран использовал ее в обратном направлении: *получая новые результаты на симплектической стороне двойственности между симплектическими и голоморфными мирами, он получал интересные новые неравенства между инвариантами* (*типа характеристических чисел*) *некоторых комплексных алгебраических объектов*.

Эти новые результаты в алгебраической геометрии напоминают мне неравенство Мияоки для чисел Чженя. Однако положение дел в этой области неравенств оставляет желать лучшего, даже для простейших обобщений соотношений Плюккера. Например, неизвестно, чему равно *максимальное число овалов параболической линии графика многочлена степени n от двух переменных*: ответ (3 или 4) неизвестен даже для $n=4$, а асимптотика лучших из известных примеров для больших n равна $n^2/2$, в то время как из результатов Харнака вытекает асимптотическая верхняя оценка $2n^2$.

Для алгебраической поверхности степени n в $\mathbb{R}P^3$ отношение известных нижней и верхней оценок даже больше четырех: оно равно 20. К сожалению, алгебраические геометры не умеют решать реальные вещественные задачи.

§ 4. Неявные дифференциальные уравнения

В 1885 г. шведский король Оскар II объявил 4 призовых математических проблемы. Две из этих проблем хорошо известны: задача трех тел (неверно «решенная» в получившей премию работе А. Пуанкаре, которая позже стала основой для его «Новых методов небесной механики») и динамика твердого тела (исследованная в знаменитой работе С. Ковалевской, которая легла в основу теории вполне интегрируемых систем).

Менее широко известно, что одна из четырех проблем оставалась открытой около 100 лет до ее окончательного решения А. Давыдовым, замечательный результат которого я сейчас опишу. Формулировка задачи была следующей: *построить качественную теорию неявных дифференциальных уравнений* (*подобную качественной теории Пуанкаре для фазовых кривых векторного поля в окрестности особых точек, в которых поле обращается в нуль*).

Давыдов свел изучение особых точек неявных дифференциальных уравнений к случаю нулей векторных полей, получив список нормальных форм, к которым можно свести неявное дифференциальное уравнение (в духе теории нормальных форм Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений).

А именно, неявное дифференциальное уравнение определяет поверхность, вложенную в трехмерное пространство линейных элементов плоскости. Векторное поле, связанное с неявным дифференциальным уравнением, живет не на плоскости независимых и зависимых переменных, а на этой поверхности. Она естественным образом проектируется на плоскость независимых и зависимых переменных с ветвлением над дискриминантной кривой. Вдоль линии ветвления векторы поля вертикальны (касаются слоя).

Приведя векторное поле на поверхности к нормальной форме Пуанкаре, Давыдов свел задачу о неявных уравнениях к изучению классификации ветвлений векторных полей Пуанкаре (относительно разветвленной проекции поверхности на плоскость).

Замечательная теорема Давыдова говорит:

Эти ветвления не имеют новых инвариантов: *они определяются, с точностью до диффеоморфизмов, полями Пуанкаре наверху, а нормальные формы неявных дифференциальных уравнений наверху определяются списком тех общих уравнений, для которых поля Пуанкаре имеют фиксированные значения инвариантов* (*а именно, фиксированные собственные значения линеаризованных уравнений, которые являются единственными инвариантами классификации Пуанкаре*).

Чтобы оценить эту фундаментальную теорию Давыдова, я должен заметить, что предыдущие работы в этой важной для приложений области принадлежат многим специалистам (в топологии, динамических системах, дифференциальных уравнениях, теории управления, плазменной физике, уравнениях в частных производных типа Трикоми и т. д.), включая Р. Тома, У. Брюса, Л. Дара, М. Чибрарио. Но эти предшественники Давыдова доказали только более простые результаты о *топологической классификации* (которые сами по себе трудны в этой проблеме), и общее мнение о возможности дифференциальной классификации было довольно отрицательное.

Статья Давыдова является нечастым случаем классического фундаментального результата, открытого лишь современными математиками, несмотря на его пользу во многих приложениях.

§ 5. Небесная механика и диофантовы приближения на подмногообразиях

Здесь я объясню (избегая технических деталей) очень важные недавние результаты (М. Севрюка) из *теории возмущений гамильтоновых дифференциальных уравнений*, принадлежащие той ее части, которая известна как КАМ теория.

Новые результаты описывают эволюцию динамической системы, участвующей в *быстром движении* с n частотами и в *медленной эволюции* параметров движения. Типичной моделью, из которой эта теория произошла несколько столетий назад, служит планетная система со своими быстрыми кеплеровскими движениями в сочетании с медленными «вековыми» изменениями таких параметров кеплеровых эллипсов, как усредненное расстояние от Земли до Солнца и т. д., вследствие взаимодействия планет.

Результат состоит в том, что *катастрофических изменений в системе не произойдет, благодаря тому, что некоторые характеристики кривизны медленной эволюции не обращаются в нуль тожде-*

ственно (*в частности, в случае планетных систем они не зануляются*).

Сложность заключается в том, что эволюция может привести быстрое движение к *резонансу* между его частотами, делая эргодическое движение неустойчивым. При входе системы в резонанс могут последовать другие сценарии эволюции, отличные от описанного усредненной системой, и результатом теории является доказательство *малой вероятности* (малой общей меры начального множества состояний) *этих опасных эволюций* (*обоснованное тем, что характеристики кривизны не зануляются тождественно*).

Теория Севрюка опубликована им несколько лет назад совместно с его нидерландскими сотрудниками: H. Broer, G. Huitema, M. Sevryuk. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems. Order amidst chaos. Berlin: Springer-Verlag, 1996. (Lecture Notes in Mathematics, 1645).

В последние годы своей жизни М. Эрман изучал приложения сложной теоремы Севрюка к небесной механике.

В обычных приложениях КАМ теории к небесной механике (которые я развивал в 1963 г.) используется условие невырожденности: необращение в нуль некоторых определителей. В своей статье 1963 г. я доказал, что они не обращаются в нуль для плоской задачи n тел и для пространственной задачи трех тел.

М. Эрман посчитал этот определитель для пространственной задачи четырех тел и заметил, что он обращается в нуль. Таким образом, мы оказываемся в ситуации теоремы Севрюка, а не в рамках обычной КАМ теории (если число тел больше трех и нельзя пренебречь отклонениями, делающими движение неплоским).

Я не читал работы Эрмана (незадолго до своей смерти он говорил мне, что там будет более 500 страниц) и не знаю, содержит ли она ссылки на работы Севрюка, как должно быть.

На самом деле я всегда знал о существовании этой проблемы, и я начал работать над ней, опубликовав первый результат в этом направлении в 1965 г. Математически она сразу привела меня к проблеме *диофантовых приближений на подмногообразии евклидова пространства и влияния кривизны этого подмногообразия, затрудняющей сохранение резонанса во время эволюции*.

Продолжив это исследование, мои ученики создали важную теорию разрушения резонанса, исходя из кривизны подмногообразия быстрых частот. Старшим из моих учеников, начавшим эту работу по диофантовым приближениям на подмногообразиях, был Г. Маргулис; позже его работа была продолжена А. Пяртли, Ю. Ильяшенко, Н. Нехорошевым, В. Бахтиным, и наконец М. Севрюк приложил полученную теорию к гамильтоновым системам (с приложением к небесной механике, полученным впоследствии М. Эрманом).

Я думаю, что глубокие работы по гамильтоновым системам (включая даже классическую теорему Нехорошева об экспоненциальной малости скорости падения устойчивости, обобщающую более ранний результат Литлвуда) были недооценены и математическим, и физическим сообществом, частично из-за технических трудностей этих работ, частично из-за славы основателей КАМ теории — и это, к сожалению, могло быть причиной недооценки замечательных результатов Севрюка, описанных выше.

§ 6. Теория усреднения и опасность аналитичности

Начала теории усреднения в динамических системах изложены в работах Лагранжа и Лапласа об устойчивости солнечной системы и о вековых возмущениях кеплеровских эллипсов.

Современные математически строгие доказательства (и даже глубоко нетривиальные строгие формулировки) соответствующих теорем принадлежат А. И. Нейштадту (его предшественниками были Т. Касуга и Д. Аносов, а продолжил его работу В. Бахтин).

Рассматривается расслоенное фазовое пространство с *«быстрым» векторным полем*, направленным вдоль слоев (которые обычно являются торами с инвариантными относительно вращений быстрыми полями), и это поле *возмущается* (*произвольно*) *малым «медленным» полем — слагаемым.*

Теория усреднения является описанием проекции результирующего возмущенного движения на базовое многообразие в терминах среднего значения (вдоль слоя) медленного поля (спроектированного на многообразие-базу вдоль слоев).

Основные утверждения теории усреднения Нейштадта описывают *малость меры опасной области фазового пространства, образованной движениями, проекции которых серьезно отклоняются от движения вдоль усредненного спроектированного поля.*

Сложность состоит в наличии *резонансов*, отвечающих слоям, вдоль которых *временное среднее отличается от пространственного среднего*, так как орбита быстрого движения распределена вдоль слоя неоднородно; она может, например, быть замкнутой кривой, или плотно покрывать тор размерности меньшей, чем размерность слоя.

Результаты теории усреднения содержат описание типичных асимптотик малости меры области плохих начальных условий в терминах асимптотики расстояния между спроектированной орбитой и орбитой усредненного спроектированного поля для большого временного интервала, обратно пропорционального параметру малости возмущения. Это — временной интервал, для которого результатом медленного движения может быть переход спроектированной орбиты на расстояние порядка 1 от орбиты усредненного поля вдоль базового пространства (переход, делающий возможным столкновение Земли с Марсом или Солнцем).

В этой теории так много сложных результатов, что я не пытаюсь описать здесь ее детали: это одно из основных достижений математики XX в., иногда напоминающее аналитическую теорию чисел, некоторые утверждения которой она использует, но гораздо более полезное для других наук, среди которых исследование космоса, физика и т. д.

Более подробное описание теории усреднения можно найти в книге: В. Арнольд, В. Козлов, А. Нейштадт. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. (Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фунд. напр. 3: Динамические системы — 3) (новое издание: М.: УРСС, 2002. 416 с.; особенно гл. IV, с. 181—286).

Я отмечу только один частный результат теории Нейштадта, описывающий очень странную *опасность, порожденную аналитичностью динамической системы, переживающей потерю устойчивости при переходе через мнимую ось пары собственных чисел системы, линеаризованной в состоянии равновесия*. Первый пример этой опасности был давно опубликован М. А. Шишковой, ученицей Понтрягина, но общность соответствующих случаев была доказана Нейштадтом лишь недавно.

Феномен потери устойчивости (с рождением или смертью предельного цикла) обычно называется «бифуркацией Хопфа» (возможно, из-за того, что он изучался А. Пуанкаре и А. Андроновым на 70 и 20 лет раньше, чем Э. Хопфом).

Обычно предсказываемое поведение системы при рождении цикла (скорость ε изменения системы мала) заключается в том, что через время t после момента потери устойчивости система будет осциллировать с нарастающей амплитудой около (уже неустойчивого) положения равновесия, причем растущая амплитуда осцилляции пропорциональна квадратному корню из произведения εt времени на параметр медленных изменений. Контролер реагирует на эти растущие малые колебания, возвращая параметр назад в безопасные пределы.

Теорема Нейштадта говорит, что *в то время как описанная мягкая потеря устойчивости дает правильное описание того, что случится в гладкой системе, общая аналитическая система эволюционирует по совершенно другому сценарию. Именно, состояние системы будет оставаться вблизи положения равновесия весьма длительное время после момента потери устойчивости, ожидая, пока ра-*

стущий, но ненаблюдаемый предельный цикл достигнет единичного размера. Затем, неожиданным скачком, система оставит окрестность положения равновесия, начав колебания с амплитудой порядка 1.

Все эти события будут неожиданными для контролера, поскольку наблюдаемое состояние системы будет оставаться нормальным длительное время после потери устойчивости. А неожиданный скачок с амплитудой порядка 1 может вызвать катастрофу вроде чернобыльской. Таким образом, безопаснее быть менее совершенным, чем аналитическая система.

§ 7. Инварианты узлов

Открытие В. Васильевым кольца инвариантов «конечного порядка» узлов стало одним из основных математических событий последней декады XX в.

Положение этих инвариантов в теории узлов такое же, как у многочленов среди гладких функций. Запоздалость открытия этой теории так же странна, как и позднее появление самой теории узлов (в попытках физиков, таких как Кельвин, понять природу микроскопической математической структуры, управляющей различием между ядрами атомов и ответственной за таблицу химических элементов Менделеева, которую эти физики пытались связать с классификацией узлов). Я все еще надеюсь, что мы скоро узнаем, различают ли инварианты Васильева все узлы.

Инварианты Васильева могут быть определены в других классификационных теориях, а интегральная формула Концевича для этих инвариантов выявила связь этого предмета с квантовой теорией поля, комбинаторикой графов, ζ-функциями и теорией чисел и многими другими ветвями математики. Нельзя недооценивать достижения Д. Бар-Натана в развитии этой теории. Но такая недооценка типична для сегодняшнего математического сообщества, где Васильев не был допущен к участию в I Европейском математическом конгрессе 1992 г. в Париже (на котором четыре доклада были посвящены описанию его теории!).

Недавно парижская газета «Gazette des Mathématiciens» (№91, январь 2002 г.) охарактеризовала И. Г. Петровского как «великого математика, *известного своим классом дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа*». Эта характеристика — как если бы Адамара охарактеризовали как автора «леммы Адамара», или Римана как автора римановых метрик, или Гильберта как «известного своим пространством» — напечатана на с. 44, где речь идет об исследованиях О. А. Олейник, чьи с Петровским работы по вещественной алгебраической геометрии обычно неверно приписываются западными последователями

Тому и Милнору (в то время как эти два автора честно ссылались на своих русских предшественников).

Недооценка всей российской математики, будь это Петровский или Васильев, Андронов или Колмогоров, Понтрягин или Рохлин, совершенно типична для современных математических сообществ (как западного, так и российского).

Теория параболических уравнений является малой толикой достижений Петровского, к которым, в числе прочего, относятся его важное продвижение в 16-й и 19-й проблемах Гильберта и его великое исследование «проблемы лакун» гиперболических уравнений и проблемы распространения волновых фронтов, содержащее глубокие топологические рассуждения, связанные с алгебраической геометрией,— исследование, развитое позднее Атьей, Боттом и Гордингом (и уже содержащее результаты о реализации когомологических классов рациональными дифференциальными формами, часто приписываемые Гротендику).

§ 8. Подсчет особенностей

Первым результатом из этой области является формула Эйлера—Пуанкаре, описывающая эйлерову характеристику гладкого многообразия как сумму индексов особых точек векторных полей на нем.

Важным новым открытием в этой области является большая теория, содержащая много аналогичных формул, опубликованная М. Казаряном несколько лет назад (M. Kazarian. The Chern—Euler number of circle bundle via singularity theory // Math. Scand. 1998. Vol. 82, №2. P. 207—236; М. Казарян. Относительная теория Морса расслоений на окружности и циклические гомологии // Функциональный анализ и его приложения. 1997. Т. 31, вып. 1. С. 20—31).

Результатами теории Казаряна служат *формулы для инвариантов многообразий и отображений, выражающие их через суммы обобщенных «индексов» некоторых аналитических объектов* (*нули векторных полей или критические точки функции*). *Причудливое свойство этих индексов заключается в том, что они являются не целыми, а рациональными числами* (*среди которых встречаются числа Бернулли и т. п.*).

Поскольку значения окончательных инвариантов целые, мы обнаруживаем своеобразные теоретико-числовые свойства особенностей различных аналитических объектов (по аналогии с тем, что эйлерова характеристика ориентированной поверхности четна, или с присутствием знаменателя 3 в соотношении между сигнатурами и первыми числами Понтрягина четырехмерных многообразий).

Теория Казаряна была бы высоко оценена, скажем, Эйлером, Пуанкаре, Хопфом, Морсом, Уитни, но я сомневаюсь, способно ли сегодняшнее математическое сообщество оценить эти *действительно фундаментальные* результаты.

Интересно, что даже классическая формула Плюккера для плоских алгебраических кривых все еще далека от обобщения на случай высших размерностей (где нужно считать различные локальные числа Ходжа вместо плюккеровых точек перегиба): я знаком только со старыми попытками Сальмона—Фидлера описать 47 обобщенных формул типа Плюккера для 48 чисел, связанных с данной проективной поверхностью и ее двойственной поверхностью. Однако эти классические формулы Сальмона—Фидлера не относятся ни ни к числу понятых, ни к числу обобщенных (в духе теории характеристических классов) современными алгебраическими геометрами, для которых числа 6 при счете вырожденных уплощений в двойных точках и 8 в полукубических точках возврата, входящие в формулы Плюккера, столь же сложны для понимания, как и новые открытия М. Казаряна.

По моему мнению, проблема подсчета особенностей (в которой теория Казаряна делает серьезный шаг) является одной из основных задач математики, задачей большего интереса, чем загадки типа теоремы Ферма.

§ 9. Зеркальные многообразия

«Миррор-теория» физиков состояла в загадочном экспериментальном наблюдении странного совпадения различных чисел Ходжа пар трехмерных комплексных многообразий, чисел, подсчитанных тысячами компьютерами этих физиков.

Я был ошарашен, когда мои ученики объяснили мне, что на самом деле я сам открыл такую зеркальность раньше, назвав ее «странной двойственностью» (в работе 1974 г. по классификации унимодулярных особенностей). «Взаимно двойственными» объектами были в моем случае некоторые особые алгебраические поверхности, построенные из некоторых 14 специальных замечательных треугольников на плоскости Лобачевского. Парные поверхности ассоциированы со *странными парами треугольников* (преобразование, переводящее каждый треугольник в двойственный ему, действует тождественно на шести треугольниках, переставляя члены четырех оставшихся пар).

История закончилась тем, что *А. Гивенталь построил математическую теорию, объясняющую зеркальную симметрию, доказав гипотезы физиков и получив много других результатов* (он использовал, среди прочего, некоторые предложения М. Концевича).

Теорию Гивенталя излагали в своих лекциях многие специалисты в Париже, США и других местах.

Одно из изложений этой теории содержится в недавней работе С. Т. Яо в книге Международного математического союза, посвященной наступлению нового тысячелетия: «Mathematics: Frontiers and Perspectives» (Eds. V. Arnold, M. F. Atiyah, P. Lax, B. Mazur. Amer. Math. Soc., 2000). Согласно Яо, он предоставил «первое полное доказательство» теоремы Гивенталя. На самом деле это доказательство основано на электронных письмах Гивенталя, отвечающих Яо на его вопросы о некоторых местах публикации Гивенталя (местах, которые были трудны для понимания читателя, не знакомого с предыдущими работами по этой теме).

С помощью этого доклада я надеюсь способствовать возвращению истинных авторов *многим* результатам; история странной двойственности лишь один из них!

Из других примеров я могу сослаться (1) на публикации американского SIAM в шестидесятых годах, представляющие великую теорему Колмогорова по гамильтоновым системам как их собственное обобщение теоремы Мозера на аналитический случай (в то время как теорема Мозера была его обобщением теоремы Колмогорова (1954 г.) с аналитических гамильтоновых систем на системы, имеющие только 333 непрерывные производные). Или (2) приписывание результатов Пуанкаре по бифуркациям предельных циклов (и их обобщений, полученных А. Андроновым) Э. Хопфу (приписывание, которому следуют даже французская и русская школа).

В недавнем издании Американского математического общества, посвященном наследию Пуанкаре, было напечатано, что (3) он не был знаком с понятием гладкого многообразия. У меня создается впечатление, что «современные» математики незнакомы с А. Пуанкаре (имя которого на станции «Люксембург» парижского метро написано как «Point Carré»)[35].

И (4): я слышал на собрании Лондонского математического общества разговор, посвященный нескольким «новым» теоремам английских математиков про малые шумовые эффекты в динамических системах, которые на самом деле были уже опубликованы Андроновым, Понтрягиным и Виттом в 1935 г.

Правда, как было упомянуто в последующих переизданиях книги Андронова и Хайкина «Теория колебаний», имя третьего автора «отсутствовало в первом издании (1937 г.) из-за трагической ошибки» (это означает, как понимает любой российский читатель, что Витт был расстрелян в ГУЛАГе). Лжеприписывания могут иметь разнообразные причины.

[35]Пуанкаре уже обсуждал эту ошибку («квадратную точку») в своих текстах. По его мнению, фамилия происходит от опасного «квадратного кулака» (poing carré) его предка, точка же квадратной не бывает: она круглая.

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ

в Париже в январе 2002 г.

1. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — многочлен степени D. Найти наибольшее возможное число компонент связности и наибольшее возможное число замкнутых компонент *параболической кривой* ее графика (т. е. множества таких точек плоскости (x, y), для которых $f_{xx}f_{yy} = f_{xy}^2$):

$$b_0(\mathrm{Par}(f)) = ?, \qquad b_1(\mathrm{Par}(f)) = ?$$

Даже для случая $D = 4$ неизвестно, достигает ли b_1 значения 4, а константы C из нижней и верхней оценок при больших D, $b_1 \sim CD^2$, отличаются в четыре раза:

$$\frac{(D-1)(D-2)}{2} \leqslant b \leqslant (2D-5)(D-3)+1.$$

2. Пусть $M \subset \mathbb{R}P^3$ — *гладкая алгебраическая поверхность* степени D. Найти наибольшее возможное число компонент связности ее параболической линии.

Константы C из нижней и верхней оценок вида CD^3 различаются в 20 раз:

$$\frac{D(D-1)(D-2)}{2} \leqslant b \leqslant 10D^3 - 28D^2 + 4D + 3.$$

Нижние оценки из задач 1 и 2 означают существование поверхностей с достаточно большим числом замкнутых параболических кривых, а верхние — несуществование поверхностей со слишком большим их числом.

3. Пусть $F\colon S^1 \to \mathbb{R}$ гладкая функция; она называется *D-гиперболической*, если второй дифференциал d^2f однородной функции $f(x, y) = r^D F(\varphi)$ (где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) гиперболичен (обладает сигнатурой $(+, -)$) везде в $\mathbb{R}^2 \backslash 0$.

Найти связные компоненты пространства D-гиперболических функций: *является ли индекс* (равный числу оборотов креста $d^2f = 0$ при одном обходе точки (x, y) вокруг начала координат) *единственным инвариантом компоненты связности*? Множество значений, достигаемых индексом, бесконечно и не ограничено снизу (но ограничено сверху).

4. В полиномиальном случае (когда F является тригонометрическим многочленом, а f — обычным однородным многочленом степени D) найти *число связных компонент пространства D-гиперболических многочленов*. Растет ли оно линейно по степени D при ее увеличении?

Более подробно о задачах 1—4 написано в моей недавней работе «Астроидальная геометрия гипоциклоид и топология гессианов гиперболических многочленов» (Успехи математических наук. 2001. Т. 56, вып. 6).

5. Рассмотрим *управляемую динамическую систему* $\dot{x} = v(x, u)$, где x является точкой на компактном фазовом многообразии M, а u принадлежит многообразию управляющих параметров U. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая *целевая функция*.

Исследовать *вариационную задачу о нахождении максимума среднего по времени* $\hat{f} = \lim T^{-1} \int\limits_0^T f(x(t))dt$ при оптимальном выборе управляющей функции $u(t)$. (Задачу эту можно рассматривать либо при фиксированном начальном условии $x(0)$, либо выбирая оптимальным и его — это две разные задачи.)

Если задача (т. е. пара функций v и f) зависит от некоторого внешнего параметра, то стратегия оптимизации и оптимальное среднее могут иметь особенности («фазовые переходы») в точках из *гиперповерхности фазовых переходов*, лежащей в многообразии P значений внешнего параметра.

Требуется найти *общие фазовые переходы, возникающие в вариационной задаче*, хотя бы в случае, когда размерности многообразий M, U и P достаточно малы. Задача является открытой даже в том случае, когда все рассматриваемые многообразия одномерны, ибо уже тогда возникают некоторые нетривиальные устойчивые особенности (см. мою статью в журнале «Функциональный анализ и его приложения». 2002. Т. 36, вып. 2).

6. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на компактном римановом многообразии, $0 < r < R < \infty$ — две другие гладкие функции на M. Исследовать вариационную задачу о максимизации для среднего по пространству

$$\hat{f} = \Big(\int\limits_M f(x)\rho(x)\,dx\Big) \Big/ \Big(\int\limits_M \rho(x)\,dx\Big)$$

при помощи выбора распределения масс, определяемого плотностью ρ по отношению к элементу риманового объема dx, удовлетворяющей неравенствам $r \leqslant \rho \leqslant R$ везде на M.

Исследовать общие фазовые переходы в случае, когда f, r и R гладко зависят от внешних параметров.

Доказано, что оптимальная стратегия состоит в следующем: {взять $\rho = r$ при $f(x) < c$ и $\rho = R$ при $f(x) > c$ для некоторой константы c}, но случай фазовых переходов требует исследования воздействия некоторых странных логарифмических особенностей и их разрешений в случае четномерных многообразий M, особенностей, которые возникают во многих физических задачах. Об этом написано в статье В. Арнольда «On a variational problem relate to the phase transitions of the averages in controlled dynamical systems» (Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics I. In Honor of Professor O. A. Ladyzhenskaya. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002. (International Mathematical Series, 1). Пер. в кн.: Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. Т. 1: В честь академика О. А. Ладыженской. Новосибирск, 2002).

7. Пусть $u_0\colon M^2 \to \mathbb{R}$ — гладкая «начальная» функция на римановом многообразии M (случай двумерного диска уже является интересным). Исследовать задачу *минимизации интеграла Дирихле* $\int\limits_M (\nabla u)^2 dx$, где функция u получается из начальной функции u_0 диффеоморфизмом многообразия M на себя, сохраняющим объемы («*несжимаемым потоком жидкости*»).

Экстремальная функция u будет гладкой, если начальная гладкая функция $u_0\colon B^2 \to \mathbb{R}$ горообразна, т. е. равна нулю на границе диска и имеет всего лишь один невырожденный (морсовский) максимум внутри диска. В этом случае экстремальная функция u является симметризацией функции u_0 (зависящей только от расстояния до центра диска).

Однако при гладкой начальной функции-горе u_0, имеющей (как гора Эльбрус) два локальных максимума, разделенных седловой точкой, экстремальная функция, видимо, имеет особенность типа $|x|$ вдоль некоторой кривой, причем особенности экстремальной функции на концах этой кривой неизвестны. Задача состоит в том, чтобы изучить эти особенности в случае произвольной начальной функции u_0.

Задача 7 связана с *уравнениями Эйлера стационарного состояния для двумерной несжимаемой гидродинамики и магнетогидродинамики*. В гладком случае эти уравнения выражают функциональную зависимость между некоторой функцией f на M^2 и ее лапласианом (*их скобка Пуассона должна быть тождественно равна нулю*).

Задача состоит в том, чтобы расширить это уравнение на более широкий класс функций. Данная задача является также упрощенным (двумерным) вариантом трехмерной задачи Сахарова о *магнитном поле звезды, обладающем минимальной энергией* (в трехмерном случае уравнения

Эйлера означают равенство нулю скобки Пуассона бездивиргентного векторного поля с его ротором). Более детальное изложение (а также ссылки на мою работу 1974 г. по этому поводу) содержится в написанной мною вместе с Б. А. Хесиным книге «Topological Methods in Hydrodynamics» (New York: Springer-Verlag, 1998. P. 69—81, 112—193. (Applied Mathematical Sciences, 125)). Разница между гидродинамическим и магнитогидродинамическим вариационными принципами состоит в том, что в одном случае сохраняющим объемы диффеомерфизмом переносится (магнитное) поле, а в другом — вихрь искомого поля (скоростей), энергия которого минимизируется.

8. (C, B, A)-*перестановка последовательности* $\{1, 2, \ldots, n\}$ ставит в конец подпоследовательность $A = \{1, 2, \ldots, a\}$, перед ней ставит последовательность $B = \{a+1, \ldots, a+b\}$, а в начало — последовательность $C = \{a+b+1, \ldots, n\}$.

Некоторые из этих $(n-1)(n-2)/2$ перестановок *циклические* (как прибавление постоянной в вычетах по модулю n), а некоторые из циклических перестановок *транзитивны* (как прибавление константы 1).

Найти долю циклических и транзитивных перестановок во всех (C, B, A)-*перестановках при больших* n.

Среди 45 (C, B, A)-перестановок для $n = 11$ имеется 22 циклические перестановки (все они транзитивны), а при меньших значениях n количества циклических и транзитивных перестановок образуют странную немонотонную последовательность.

Среди всех $n!$ перестановок множества из n элементов транзитивные перестановки являются малой долей (их $(n-1)!$), а число всех циклических перестановок, видимо, образует асимптотически ту же ($1/n$-ю) часть от числа всех перестановок, что и число транзитивных циклических.

Таким образом, мы видим, что *в случае* (C, B, A)-*перестановок статистика совершенно другая, чем в случае всех перестановок* (можно исследовать то же отличие и для других перестановок множества из нескольких букв, действующих на большем множестве $\{1, \ldots, n\}$).

Все эти вопросы были поставлены на моем московском семинаре в 1958 г. в порядке упрощения задачи из теории динамических систем об отображении, переставляющем блоки (задача о перекладывании отрезков). Об этой задаче позже шла речь в моей большой статье 1963 г. по гамильтоновым системам (УМН, т. 18, № 6). Современное состояние этой проблемы (особенно глубоко исследованной М. Концевичем и А. Зоричем) описано в недавней статье Зорича «How do the leaves of a closed 1-form wing around a surface?» в книге «Pseudoperiodic topology» (Eds. V. I. Arnold, M. E. Kontsevich, A. V. Zorich. Amer. Math. Soc., 1999).

Концевич недавно заметил, комментируя новое издание книги «Проблемы Арнольда», что перестановки трех блоков всегда оказываются эквивалентны вращениям. Задача 8 требует определить, насколько *часты* контрпримеры такой «эквивалентности» (существование таких контрпримеров мне было, конечно же, известно еще в 1950-е гг., когда я придумывал задачу о перекладывании отрезков).

9. Отображение $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$) называется *псевдокомплексным*, если оно *переводит комплексные подпространства в комплексные подпространства* (можно отдельно рассматривать случаи векторных, аффинных и проективных подпространств — все 3 случая интересны).

Вещественный диффеоморфизм $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ является псевдокомплексным отображением тогда и только тогда, когда либо он представляет собой комплексное проективное отображение, либо является композицией последнего с комплексным сопряжением (аналогичное верно и для других вариантов: векторного и аффинного).

Существуют ли другие псевдокомплексные гомеоморфизмы? *Другие псевдокомплексные биекции*?

Эти вопросы должны были бы быть исследованы Гильбертом как часть аксиоматического описания проективной геометрии, но, по-видимому, его школа не обратила внимания на эти основополагающие проблемы.

10. Чтобы сформулировать кватернионный аналог предыдущей задачи, надо различать левые подпространства и правые подпространства. Я бы предложил исследовать те отображения, которые переводят правые и левые подпространства в правые и левые подпространства (разрешая отображать левое на правое).

О вещественных гладких вариантах задач 9 и 10 можно прочитать в двух моих статьях в журнале «Функциональный анализ и его приложения». 2001. Т. 35, № 4, С. 1—7; Т. 36, № 1. С. 1—15 (первая статья называется «О комплексификации тетраэдра», а вторая — «О псевдокватернионной геометрии»).

11. Парадигма комлексификации и кватернионизации использовалась мною много раз (см., например, «Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts?» (Mathematics: Frontiers and Perspectives / Eds. V. Arnold, M. F. Atiyah, P. Lax, B. Mazur. Amer. Math. Soc., 2000. P. 403—416) и мои «Симплектификации и комплексификации...» в «The Arnoldfest» (Amer. Math. Soc., 1999. P. 23—27. (Fields Inst. Communications, 24))).

Например, сейчас уже доказано, что *комплексным вариантом тетраэдра является октаэдр*: ${}^{\mathbb{C}}A_3 = B_3$.

Теперь задачей является доказать мое старое предположение о том, что их кватернионным вариантом является икосаэдр:

$$^{\mathbb{H}}A_3 = H_3, \qquad ^{\mathbb{C}}B_3 = H_3.$$

Быть может, стоит начать с рассмотрения более простого плоского случая:

$$^{\mathbb{C}}A_2 = B_2, \qquad ^{\mathbb{H}}A_2 = H_2, \qquad ^{\mathbb{C}}B_2 = H_2,$$

связывающего группы симметрий треугольника, квадрата и пятиугольника.

Сложность этих утверждений в их нематематической природе: *задача скорее состоит в том, чтобы найти разумное определение* для неформальной операции кватернионизации, чем в доказательстве готовых математических утверждений.

12. *Каустикой периодической функции* $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ называется кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$ функций

$$G_{A,B}\colon S^1 \to \mathbb{R}, \qquad G_{A,B}(\varphi) = g(\varphi) + A\cos\varphi + B\sin\varphi,$$

состоящая из тех функций, которые не являются морсовскими:

$$\left\{(A,B) \in \mathbb{R}^2\colon \exists\varphi\colon G'_{A,B}(\varphi) = G''_{A,B}(\varphi) = 0\right\}.$$

Каустики общих периодических функций имеют много интересных свойств: например, *у каждой каустики по крайней мере четыре точки возврата* и *ее альтернированная длина* (альтернированная сумма длин ее интервалов между точками возврата) *равна нулю. Если у каустики ровно четыре точки возврата, то они образуют параллелограмм* (в том случае, когда точек возврата больше чем четыре, центр тяжести четных точек возврата совпадает с центром тяжести нечетных).

Задача заключается в том, чтобы заменить гладкую периодическую функцию на точное лагранжево подмногообразие фазового цилиндра T^*S^1. Подмногообразие, соответствующее функции,— это график ее дифференциала. Произвольное лагранжево подмногообразие не обязательно является сечением кокасательного расслоения, а график соответствующего «*многозначного потенциала*» не обязательно должен быть иммерсированной кривой: он может иметь точки возврата.

Интересно выяснить, что соответствует свойству каустик иметь четыре точки возврата для точных лагранжевых подмногообразий, и чем окажется *теорема Штурма—Гурвица о нулях рядов Фурье* (являющаяся инфинитезимальным аналогом теоремы о точках возврата каустик) *для таких новых «многозначных периодических функций»*.

Опыт предыдущих исследований показал, что следует расширить теорию Морса обычных функций до *теории пересечений лагранжевых многообразий в симплектической топологии* («Гипотезы Арнольда» 1965 г., обобщающие «Последнюю теорему Пуанкаре» и явившиеся отправным моментом для создания гомологий Флоера и многих других вещей в симплектической и контактной топологии).

Недавно Чеканов и Пушкарь использовали это обобщение для доказательства моей гипотезы 1993 г. *о существовании четырех точек возврата при любом выворачивании волнового фронта* (V. Arnold. Topological Invariants of Plane Curves and Caustics. Amer. Math. Soc., 1994. P. 60. (University Lecture Series, vol. 8)). Однако мне неясно, достаточно ли использовать их вариант контактных когомологий Чеканова для понимания ситуации с каустиками точных лагранжевых подмногообразий (т. е. лежандровых узлов, лежащих в многообразии 1-струй периодических функций).

13. Обсуждавшаяся выше теория каустик периодических функций и лагранжевых подмногообразий зависела от функций $x=\cos\varphi$ и $y=\sin\varphi$, определенных на окружности $x^2+y^2=1$. *Заменяя окружность на другую кривую*, например на алгебраическую кривую $C\colon f(x,y)=0$, а g — на функцию, являющуюся ограничением на C функции, определенной на плоскости, например многочлена $P(x,y)$, мы можем определить C-каустику (как кривую, состоящую из неморсовских ограничений функций вида $P+Ax+By$ на C).

Теперь задача состоит в том, чтобы *обобщить теоремы Штурма—Гурвица о рядах Фурье* (обобщить в том смысле, который обсуждался в задаче 12 и более детально в статье по астроидальной геометрии в «Успехах математических наук». 2001. Т. 35, вып. 6) *на случай C-каустик*, построенных по кривым C, являющимся обобщением окружности, используемой в задаче 12.

Такие каустики являются алгебраическими кривыми (того же рода, что и C). В случае задачи 12 они были, как и окружность, рациональными кривыми. Таким образом, каустики тригонометрических многочленов являются уникурсальными кривыми, а их римановы поверхности — сферами.

Кроме того, каждой периодической функции из задачи 12 и каждому P в данном случае можно сопоставить *однопараметрическое семейство «волновых фронтов»* — кривых, состоящих из тех точек плоскости $\{(A,B)\}$, для которых ограничение $(P+Ax+By)|_C$ имеет фиксированное критическое значение (которое является параметром семейства).

Эти фронты будут алгебраическими кривыми (того же рода, что и C), т. е. рациональными в случае тригонометрических многочленов, как в задаче 12.

Вопросы о точках возврата, альтернированных длинах и т. д., поставленные для C-каустик и C-фронтов алгебраической кривой C большего рода, становятся особенно интересными в комплексном случае, поскольку известно, например, что гладкие выпуклые кривые имеют четыре вещественных точки возврата (для большего количества точек возврата надо требовать некоторое обобщение выпуклости). Но даже в рациональном случае и в случае вырожденной эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x^2$ существуют интересные задачи, касающиеся точек возврата каустик и двойных точек вырожденной кривой. С. Натанзоном были опубликованы некоторые обобщения теоремы Штурма—Гурвица на случай больших родов. Однако я не смог извлечь из них хоть какие-нибудь полезные знания о C-каустиках и о C-фронтах для алгебраических кривых C более высокого рода.

14. Исследовать *триангуляции тора T^2, построенные по кубическому полю алгебраических чисел* (*с помощью многомерных цепных дробей*). Построение начинается с матрицы $A \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, имеющей три различных положительных собственных значения. Три соответствующие инвариантные плоскости делят $\mathbb{R}^3$ на 8 инвариантных октантов. В каждом открытом октанте содержится полугруппа его целых точек. Граница выпуклой оболочки этого множества (множества целых точек $\{\mathbb{Z}^3 \cap \text{октант}\}$) называется *парусом*. Парус инвариантен под действием A. Он является (бесконечной) многогранной поверхностью, грани которой — выпуклые компактные многоугольники. Дирихле и Цушиаши (Tohoku Math. J. 1983. Vol. 35. P. 607—639) доказали, что парус инвариантен под действием коммутативной подгруппы $\mathbb{Z}^2$ группы $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, состоящей из матриц с теми же инвариантными плоскостями, что и для A.

Тор, о котором идет речь в задаче 14, является факторпространством

$$T^2 = (\text{парус } A)/\mathbb{Z}^2.$$

Он разбивается на образы граней паруса при отображении факторизации. Образ каждой грани содержит некоторые «целые точки» (образы целых точек грани). Итак, мы сопоставили каждой матрице A геометрический объект: разбиение тора T^2 на «выпуклые многоугольники», содержащие «целые точки».

Задача 14 заключается в том, чтобы понять, *какие разбиения T^2* (*и какие множества «целых точек»*) *могут быть получены из различных матриц A* и что в них зависит только от кубического поля.

Простейший пример дает матрица «*кубического золотого сечения*»

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(обыкновенное золотое сечение $(\sqrt{5}+1)/2$ является сдвинутым на 1 собственным значением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

квадратичного золотого сечения).

Триангуляция тора, соответствующая матрице кубического золотого сечения, может быть описана как разбиение квадрата диагональю на два треугольника (без выделенных внутренних точек). Самые простые триангуляции были рассмотрены в статье Е. Коркиной в «Трудах Математического института им. В. А. Стеклова». 1995. Т. 209. С. 143—166.

Рассматривая одну за другой матрицы из $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, начиная с не очень больших, можно получить некоторое представление о том, *какими являются все возникающие триангуляции и множества отмеченных точек*. Можно также исследовать различные статистики для этих триангуляций: отношения между количествами треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т. д., статистики количества соседних граней вершины, числа сторон многоугольника из разбиения, чисел отмеченных точек на сторонах и на вершинах, ...

Было бы интересно *сравнить эти статистики с соответствующими статистиками для произвольно выбранного треугольного конуса* (с вершиной в начале координат).

Можно было бы даже сравнить результаты с аналогичными статистиками для границ выпуклых оболочек множеств, состоящих из целых точек, лежащих в телах, ограниченных большими гладкими поверхностями. Другим интересным объектом для сравнения являются разбиения плоскости на *области Вороного со случайно распределенными центрами областей* (область Вороного для дискретного множества центров, лежащих на евклидовой плоскости, состоит из тех точек плоскости, для которых данный центр является самым близким среди всех центров).

Изучая вышеописанные статистики, их следует сравнивать с распределениями «площадей областей», «периметров границ», «длин сторон», «чисел вершин», а особенно с их совместным распределением, так как последние отнюдь не являются независимыми.

Я бы даже предложил исследовать безразмерные характеристики, такие как отношение «площадь/(квадрат периметра)» и «число вершин многоугольных областей», чья корреляция также является интересной характеристикой разбиения.

Считая средние величины, я бы скорее стал рассматривать более стабильные *средние на единицу площади*, чем средние на одну область (где вклад маленьких областей слишком велик из-за их большого числа).

15. Сравнивая задачу 14 со случаем *обычной цепной дроби* (для которой «триангуляции тора с отмеченными точками» произвольны, так как любая конечная последовательность натуральных чисел является периодом некоторого квадратичного иррационального числа), я должен повторить одну старую интересную задачу о сравнении статистик элементов цепной дроби случайно выбранного иррационального числа и цепных дробей собственных значений случайно выбранной матрицы из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями.

Для начала рассмотрим целые точки (p,q), определяющие квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ с вещественными корнями и такие, что $p^2+q^2 \leqslant N$. Среди элементов из периодов цепных дробей решений этих уравнений рассмотрим долю числа единиц, числа двоек, и т. д. Предел доли элементов k при N стремящемся к бесконечности по определению является частотой элемента k для случайного квадратичного иррационального числа.

Частоты элементов периодов собственных значений случайно выбранных матриц можно определить аналогично, если рассматривать целочисленные матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых $ad-bc=1$, собственные значения вещественны и $a^2+b^2+c^2+d^2 \leqslant N$.

Ожидается, что эти две частоты совпадают, являясь в обоих случаях частотой элементов цепной дроби случайного вещественного числа.

Формула для последней

$$(\text{частота } k) = \ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)/\ln 2$$

была найдена Гауссом, а доказана в 1928 г. Р. Кузьминым, который использовал эргодическую теорему Биркгофа (утверждение было доказано для всех вещественных чисел кроме некоторого исключительного множества лебеговой меры нуль).

Однако еще в 1900 г. появились две статьи, в названиях которых упоминалась та же задача:

T. Brodén, Wahrscheinlichkeibs Bestimmungen bei der Grewöhnlichen Kettenbruchentwicklung Reeller Zahlen. Acad. Föhr, Vol. 57. Stockholm, 1900. P. 239—266;

A. Wiman. Über eine-Wahrscheinlichkeits Auffage bei Kettenbruchentwicklungen, Acad. Föhr, Vol. 57. Stockholm, 1900. P. 589—841.

К сожалению, я не проверил, содержали ли эти статьи теорему Кузьмина 1928 г., а значит, их прочтение и оценка с современной точки зрения также входит в задачи нашего семинара.

Теоремы Гаусса—Вимана—Кузьмина и их связь с *мерой*

$$\mu(A) = \int\limits_A \rho(x)\,dx, \qquad \rho = \frac{1}{1+x},$$

являющейся инвариантной для динамической системы $x \mapsto \{1/x\} = 1/x - [1/x]$, обсуждаются в брошюре В. И. Арнольда «Цепные дроби». М.: МЦНМО, 2001. С. 14—40. (Сер. «Библ. “Математическое просвещение”»).

В качестве другой модели, приводящей к статистике Гаусса—Кузьмина, я уже давно предлагал рассмотреть асимптотику распределения элементов цепных дробей для рациональных чисел p/q (при стремлении p и q к бесконечности). Эта гипотеза недавно доказана: М. О. Авдеева, В. А. Быковский. Решение задачи Арнольда о статистике Гаусса—Кузьмина. Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровское отделение. Препринт №8. Владивосток, 2002.

Статистики парусов случайных треугольных пирамид в $\mathbb{R}^3$ неизвестны, но М. Концевич и Ю. Сухов доказали мои гипотезы об их *существовании и универсальности* (независимость от пирамид): их статья находится в книге «Pseudoperiodic Topology» (Eds. V. I. Arnold, M. E. Kontsevich, A. V. Zorich. Amer. Math. Soc., 1999).

К сожалению, эти математические доказательства существования не отвечают на естественные «физические» вопросы, например, *чего больше*: *целых точек, лежащих на ребрах паруса, или целых точек на произвольном отрезке той же длины с концами в целых точках*? Какова пропорция между *количеством треугольников и четырехугольников* (или треугольников и пятиугольников), являющихся гранями паруса случайной пирамиды? Как распределено количество целых точек, лежащих на грани: больше их или меньше, чем на случайно выбранной плоской области той же площади? Распределены ли отношения «площадь/(квадрат периметра грани)» для граней паруса так же, как для случайного плоского многоугольника, или по-другому?

Все эти вопросы являются также проблемами и *экспериментальной математики*, поскольку было бы интересно получить эмпирические данные для, например, «псевдослучайных» конусов, порожденных тремя целыми векторами (a, b, c) нормы $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 < N$. Средняя статистика на множестве всех таких троек зависит от N, и эмпирические средние значения для N равных, например, 10 и 100 могли бы подсказать, существует ли предел при N стремящемся к бесконечности.

Эти эмпирические статистики можно сравнить с теми, которые были получены с помощью кубического поля алгебраических чисел (задача 14):

есть ли существенное различие между статистиками парусов кубических полей и парусов случайных пирамид?

Я упомянул бы здесь еще задачу о статистике длин отрезков, на которые делят отрезок или окружность единичной длины T точек (в дискретном варианте задачи — T вычетов по модулю m). Эти статистики и было бы интересно сравнить со статистиками «геометрических прогрессий Ферма—Эйлера» $\{a^t \pmod{m}\}$ или арифметических прогрессий $\{x+ta\}$, $t=1,\ldots,T$, или еще групп Эйлера $\{x\colon (x,m)=1 \pmod{m}\}$, обсуждающихся в брошюре: В. И. Арнольд. Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий. МЦНМО, 2003.

Оглавление

Приложения