

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2010

А. И. Буфетов, М. В. Житлухин, Н. Е. Козин

Диаграммы Юнга и их предельная форма

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 511.33
ББК 22.132
Б93

Буфетов А. И. и др.

Б93 Диаграммы Юнга и их предельная форма / А. И. Буфетов, М. В. Житлухин, Н. Е. Козин. — М.: МЦНМО, 2013. — 56 с.

ISBN 978-5-4439-0077-3

Брошюра посвящена асимптотическим свойствам диаграмм Юнга — картинок на клетчатой бумаге, изображающих разбиение натурального числа в сумму нескольких слагаемых. В ней доказывается, что типичная (в смысле меры Планшереля) диаграмма Юнга большого размера имеет форму, близкую к некоторой фиксированной.

Брошюра написана по материалам цикла лекций на Летней школе «Современная математика» в Дубне в 2010 г. Она доступна студентам младших курсов и школьникам старших классов.

ББК 22.132

ISBN 978-5-4439-0077-3

© Буфетов А. И., Житлухин М. В.,
Козин Н. Е., 2013.
© МЦНМО, 2013.

Предисловие

Пусть $p(N)$ — число способов разбить натуральное число N в сумму невозрастающих слагаемых. Эйлер, рассматривавший задачу о вычислении $p(N)$ для различных значений N , доказал замечательную формулу

$$\sum_{N=0}^{+\infty} p(N)t^N = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n}.$$

Действительно, переписав бесконечное произведение в правой части в виде произведения рядов и раскрыв скобки, получим

$$(1+t+t^2+\dots)(1+t^2+t^4+\dots)(1+t^3+t^6+\dots)\dots = \\ = 1+t+2t^2+\dots+p(N)t^N+\dots;$$

нетрудно заметить, что коэффициент $p(N)$ при t^N должен быть в точности равен числу всех возможных способов разбиения числа N в суммы положительных целых. Позднее Харди и Рамануджану удалось получить знаменитую асимптотическую формулу [8]

$$p(N) \sim \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}.$$

Кроме того, сами разбиения получили удобную и наглядную интерпретацию в виде диаграмм из клеток, которые и были названы диаграммами Юнга в честь Альфреда Юнга.¹

В 1977 году Вершик и Керов в СССР [2] и Логан и Шепп в США [14] одновременно и независимо обнаружили, что типичная (в смысле меры Планшереля) диаграмма Юнга большого размера имеет форму, близкую к некоторой фиксированной².

Вершик и Керов также доказали, что длина первой строки диаграммы Юнга имеет асимптотику $2\sqrt{N}$ (по отношению к мере Планшереля). Это позволило им получить решение знаменитой проблемы Улама о длине максимальной возрастающей подпоследовательности случайной перестановки.

Задача описания больших диаграмм Юнга тесно связана с задачей описания собственных значений случайных матриц большого размера. Замечательным образом распределение этих собственных значе-

¹Альфред Юнг (1873—1940) — английский математик, выпускник и впоследствии преподаватель Кембриджского университета. В 1900 году предложил идею представления разбиений чисел в виде диаграмм. С 1910 года был священником в деревне Бердбрук графства Эссекс.

²Вершиком были также получены предельные формы и для ряда других мер [1]).

ний имеет предельную форму — её описывает знаменитый *полукруговой закон Вигнера*. Согласно этому закону, с ростом N большая часть собственных значений матрицы размера N будет попадать в интервал $[-(2 + \varepsilon)\sqrt{N}, (2 + \varepsilon)\sqrt{N}]$, а формы соответствующих гистограмм будут приближаться к форме полукруга.

Перемасштабированное отклонение от $2\sqrt{N}$ длины первой строки диаграммы Юнга размера N имеет распределение, которое, как оказывается, совпадает с аналогичным распределением для собственных значений случайных матриц (см. работы Трейси и Видома [16], Байка, Дейфта и Йоханссона [10], Бородина, Окунькова и Ольшанского [11] и Йоханссона [13]).

Объяснение неожиданного сходства таких, казалось бы, совершенно различных задач лежит вне рамок данной брошюры (см. по этому поводу работу Окунькова [15]).

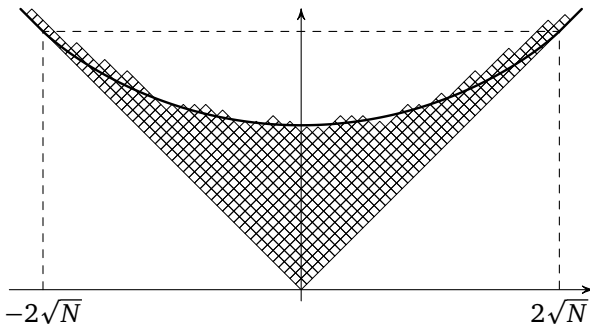
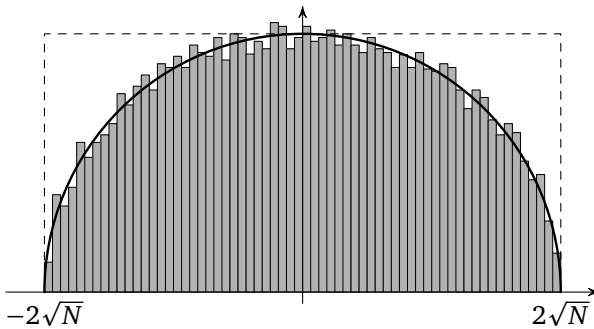


Диаграмма Юнга и ее предельная форма



Гистограмма собственных значений и распределение Вигнера

Брошюра представляет собой записки курса об асимптотических свойствах диаграмм Юнга на летней школе «Современная математика» в 2010 г.

В § 1 вводятся основные определения, касающиеся комбинаторики диаграмм Юнга, которые будут использоваться в дальнейшем. В частности, определяется вероятностная мера Планшереля и приводится формула крюков.

В § 2 показано, что формула крюков может быть приближена некоторым интегралом, называемым интегралом крюков.

В § 3 обсуждается экстремаль, определяющая предельную форму диаграмм.

В § 4 изучается интеграл крюков как функция отклонения от экстремали. Оказывается, что такое отклонение фактически является собольевской нормой порядка $1/2$ на прямой.

В § 5 сформулирована и доказана основная теорема Вершика—Керова—Логана—Шепша о предельной форме диаграмм Юнга.

В § 6 доказывается оценка на длину первой строки типичной диаграммы Юнга.

В § 7 последняя оценка применяется для решения проблемы Улама о среднем значении длин максимальных возрастающих подпоследовательностей перестановок из N элементов.

В приложении А, написанном В. А. Клепцыным и Г. А. Мерзоном, приводится набросок доказательства формулы крюков, основанного на методе отражений. Приложение Б, написанное Я. М. Сергиенко, содержит доказательство биективности RSK-соответствия между перестановками и парами таблиц Юнга одинаковой формы.

Мы глубоко благодарны Н. Ю. Медведю и Н. С. Устинову, указавшим на ряд недочетов и давшим ценные советы по улучшению текста, а также В. А. Клепцыну, вклад которого в подготовку данной брошюры невозможно переоценить.

§ 1. Диаграммы Юнга

Разбиением натурального числа принято называть его представление в виде суммы нескольких слагаемых. Расположим слагаемые в порядке убывания. Например,

$$11 = 5 + 3 + 1 + 1 + 1$$

или

$$11 = 6 + 4 + 1.$$

Если считать единицу за базовый «строительный элемент» натуральных чисел,

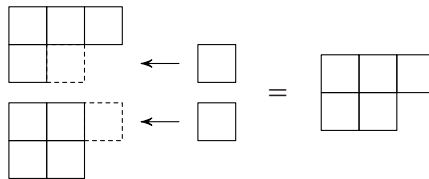
$$1 = \square,$$

то каждое число можно наглядно представить в виде кирпичиков-клеток единиц, объединенных вместе. *Диаграммы Юнга* дают способ графического представления разбиения:

$$10 = 6 + 3 + 1 = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & & & \\ \square & & & & & \end{array}$$

Идея такого представления очевидна из рисунка: число строк, состоящих ровно из одной клетки, есть число единиц в данном разбиении; число строк ровно из двух клеток есть число двоек в разбиении и т. д. Добавив требование, чтобы длина строк в каждой диаграмме не возрастала сверху вниз, получим однозначное представление каждого разбиения натурального числа N диаграммой Юнга. Далее, диаграмму λ , состоящую из N клеток, будем называть диаграммой *размера* N .

Понятно, что каждая диаграмма размера N может быть получена путем добавления к одной из диаграмм размера $N - 1$ дополнительной клетки справа в одну из строк. Как показывает следующий пример, таких «диаграмм-предшественниц» может оказаться несколько:



При этом добавлять клетки в строки, начиная со второй, можно только при условии, что над добавленной клеткой не оказывается пустого пространства. Теперь, если начать строить диаграммы, взяв за основу диаграмму размера один, то мы получим граф, начальные уровни которого

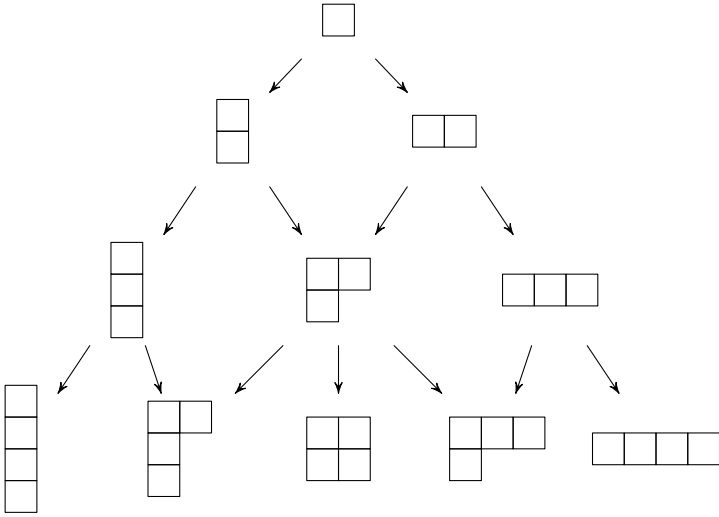


Рис. 1. Фрагмент графа Юнга до размера $N = 4$

изображены на рис. 1. Его принято называть *графом Юнга*. Легко заметить, что если продолжать построение графа, то среди получившихся диаграмм одного размера всегда будут присутствовать диаграммы, состоящие ровно из одной строки, соответствующие разбиению

$$N = N$$

и одного столбца, соответствующие разбиению

$$N = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{N \text{ раз}}.$$

Очевидно, что из корневой вершины графа в такие диаграммы всегда будет вести только один путь. Нас же будет интересовать вопрос, какую (примерно) форму имеют все диаграммы, в которые ведёт большинство путей (и существует ли вообще такая форма).

Чтобы сформулировать вопрос более точно, введем меру $\mu(\lambda)$ на множестве диаграмм данного размера N . Используя символ $\dim \lambda$ (*размерность*¹ диаграммы) для обозначения числа путей, ведущих в диа-

¹Использование обозначения \dim , как и термина «размерность», здесь обусловлено связью с теорией представлений. Число путей, ведущих в диаграмму λ , равно размерности соответствующего ей представления симметрической группы (группы перестановок N символов).

грамму λ , определим так называемую *меру Планшереля*:

$$\mu(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{N!}. \quad (1.1)$$

В §6 (см. лемму 9 и обсуждение после неё) мы установим, что мера Планшереля является вероятностной мерой на множестве всех диаграмм заданного размера: сумма мер всех диаграмм размера N будет всегда равняться единице.

Обратимся к построению диаграмм путем добавления клеток. Спускаясь по графу к выбранной диаграмме λ , будем последовательно нумеровать добавляемые клетки. Таким образом каждому пути, ведущему в данную диаграмму, мы сопоставим новый объект: диаграмму с пронумерованными клетками (рис. 2). Легко заметить, что в каждой строке и каждом столбце полученной диаграммы (при движении слева направо и сверху вниз соответственно) числа возрастают. Диаграмма с такой нумерацией клеток называется *таблицей Юнга*.

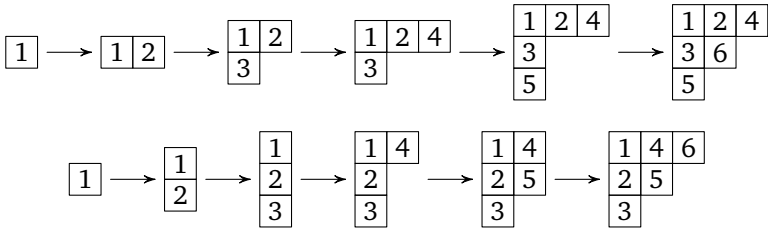


Рис. 2. Два различных пути построения диаграммы размера $N = 6$

Обратно, легко видеть, что любая нумерация, удовлетворяющая такому ограничению, соответствует некоторому пути в графе Юнга. Таким образом, число путей $\dim \lambda$, ведущих в диаграмму λ размера N , будет равно числу таблиц Юнга данной формы — то есть числу способов размещения чисел от 1 до N в клетках диаграммы λ так, чтобы выполнялось указанное правило возрастания номеров.

Последнее понятие, которое нам понадобится на начальном этапе — это понятие крюка. *Крюком клетки* \square в диаграмме λ является сама клетка \square вместе со всеми клетками, расположенными от нее справа в той же строке и снизу в том же столбце. *Длиной крюка* клетки \square называется число составляющих этот крюк клеток. В дальнейшем длину крюка клетки \square будем обозначать как $h(\square)$ (от англ. hook — крюк). На рис. 3 показан пример крюка одной из клеток диаграммы размера $N = 33$.

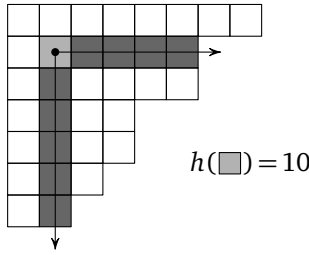


Рис. 3. Пример крюка длины $h = 10$

Оказывается, что размерность $\dim \lambda$ любой диаграммы λ размера N выражается через длины крюков следующей формулой:

$$\dim \lambda = \frac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}; \quad (1.2)$$

здесь в знаменателе стоит произведение длин крюков всех клеток диаграммы. Доказательство этой формулы, носящей имя Фрейма—Робинсона—Трелла, приводится в приложении А.

Сопоставляя (1.1) с (1.2), можно записать

$$\mu(\lambda) = \frac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h^2(\square)}. \quad (1.3)$$

В следующем параграфе мы рассмотрим геометрическое преобразование диаграммы Юнга и введем важное для дальнейшего анализа понятие интеграла крюков. Также мы обсудим, как можно описать форму произвольной диаграммы λ графиком соответствующей ей функции.

§ 2. Интеграл крюков

Зададимся вопросом: как можно описать форму произвольной диаграммы λ ? Несложно видеть, что достаточно задать положение самой правой клетки в каждой строке — или, что то же самое, отметить правые границы таких самых правых клеток. Введём теперь оси координат, взяв за начало координат левый верхний угол первой клетки и направив их вдоль левой (вниз) и верхней (направо) границ диаграммы соответственно: см. рис. 4. Кроме того, будем считать, что клетки диаграммы имеют сторону единичной длины.

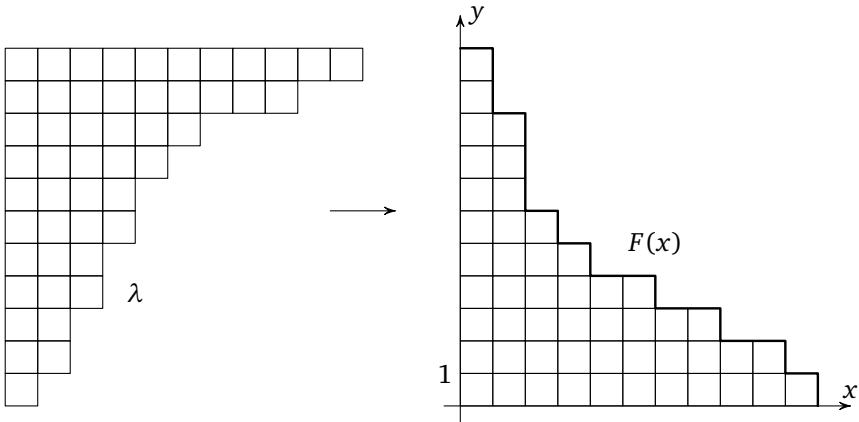


Рис. 4. Система координат и соответствующая диаграмме λ функция F

Тогда правая граница оказывается графиком кусочно-постоянной невозрастающей функции. Обозначим такую функцию символом F и отметим, что сама диаграмма оказывается областью под графиком этой функции.

Вернёмся к формуле (1.3) для меры Планшереля. Сначала перейдем от произведения по крюкам к сумме, для чего прологарифмируем все выражение

$$\ln \mu(\lambda) = \ln N! - 2 \sum_{\square \in \lambda} \ln h(\square). \quad (2.1)$$

Используя формулу Стирлинга

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right),$$

можно оценить логарифм меры так:

$$\ln \mu(\lambda) = \ln(\sqrt{2\pi N}(1 + O(N^{-1}))) + N \ln N - N - 2 \sum_{\square \in \lambda} \ln h(\square).$$

Заметив, что число слагаемых в последней сумме равно N , а также что

$$N \ln N = 2N \ln \sqrt{N},$$

после небольшой перегруппировки (в ходе которой из каждого из N слагаемых суммы, стоящей в правой части, вычитается $2 \ln \sqrt{N}$) приходим к формуле

$$\ln \mu(\lambda) = \ln(\sqrt{2\pi N}(1 + O(N^{-1}))) - N \left(1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} \right).$$

Разделим полученное выражение на $(-N)$:

$$-\frac{\ln \mu(\lambda)}{N} = \left(1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} \right) - \varepsilon(N), \quad (2.2)$$

где

$$\varepsilon(N) = \frac{1}{N} (\ln \sqrt{2\pi N} + \ln(1 + O(N^{-1}))) = O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Анализируя выражение, стоящее в скобках в (2.2),

$$1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}, \quad (2.3)$$

можно прийти к идее, что с ростом числа клеток N , а также при постепенном уменьшении их размера фигурирующая здесь сумма могла бы перейти в интеграл! Чтобы проделать этот важный шаг, нам надо, во-первых, расширить понятие крюка, определив его для произвольной точки внутри диаграммы; во-вторых, нам нужно найти подходящий способ нормировать размер диаграммы. Последнее можно сделать, например, путем приведения диаграмм к одинаковой площади.

Выполним такое изменение масштаба: пусть теперь клетки имеют длину стороны $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (в частности, как и было обещано, размеры клеток с ростом N стремятся к нулю). Тогда площадь такой перенормированной диаграммы Λ (то есть площадь области под графиком новой функции F) равна единице.

Для того чтобы ввести определение длины крюка, аналогичное тому, что мы дали в §1, условимся считать $F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) \leq y\}$. Тогда, обозначив длину крюка точки (x, y) как $h(x, y)$, по аналогии

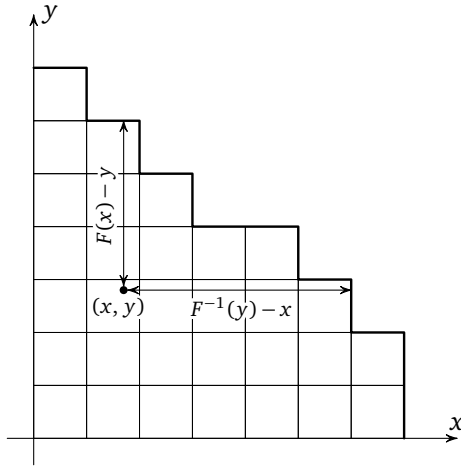


Рис. 5. Вычисление длины крюка для произвольной точки (x, y)

с определением крюка клетки мы можем положить (см. рис. 5)

$$h_F(x, y) = F(x) - y + F^{-1}(y) - x. \quad (2.4)$$

Тогда сумма в (2.3) переписывается как

$$\frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} = \frac{2}{N} \sum_{\substack{\square \in \Lambda, \\ (x,y) \text{ — центр } \square}} \ln h_F(x, y) = 2 \sum_{\substack{\square \in \Lambda, \\ (x,y) \text{ — центр } \square}} S(\square) \cdot \ln h_F(x, y), \quad (2.5)$$

где $S(\square) = \frac{1}{N}$ — площадь клетки \square . Это — интегральная сумма для интеграла крюков

$$\theta_F = 1 + 2 \iint_{\Lambda} \ln h(x, y) dx dy, \quad (2.6)$$

где интегрирование ведется по всем точкам области, лежащей под графиком функции $F(x)$, соответствующей диаграмме Λ . Поэтому можно ожидать, что с увеличением N сумма (2.5) будет всё лучше и лучше приближаться значением соответствующего интеграла.

Лемма 1 (о приближении интегралом крюков). *Справедлива формула*

$$\frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} - 2 \iint_{\Lambda} \ln h(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{\square \in \Lambda} c(h(\square)), \quad (2.7)$$

где

$$c(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)x^{2k}}; \quad (2.8)$$

в частности, разность из левой части формулы (2.7) положительна для любой диаграммы Λ .

Замечание 1. Если $x \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{6x^2} \leq c(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

Доказательство леммы 1. Пусть \square_{ij} — клетка диаграммы Юнга Λ (с длиной стороны $\frac{1}{\sqrt{N}}$). Индексация (i, j) соответствует клетке в i -й строке и j -м столбце. При расположении осей координат, как на рис. 5, нумерация строк ведется снизу вверх, а столбцов слева направо.

Считая, что $(x, y) \in \square_{ij}$ и x_i, y_j — координаты центра клетки, длину крюка произвольной точки можно выразить через длину крюка $h(\square_{ij})$ клетки, в которой она лежит:

$$h(x, y) = \frac{h(\square_{ij})}{\sqrt{N}} - (x - x_i) - (y - y_j).$$

Подставляя это выражение в интеграл крюков, имеем

$$2 \iint_{\Lambda} \ln h(x, y) dx dy = 2 \sum_{\square_{ij} \in \Lambda} \iint_{\square_{ij}} \ln \left(\frac{h(\square_{ij})}{\sqrt{N}} - (x - x_i) - (y - y_j) \right) dx dy. \quad (2.9)$$

После подстановки $x - x_i = \frac{u}{2\sqrt{N}}$, $y - y_j = \frac{v}{2\sqrt{N}}$ и переобозначения $\square_{ij} = \square$ запишем (2.9) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2N} \sum_{\square \in \Lambda} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \ln \left(\frac{h(\square)}{\sqrt{N}} - \frac{u}{2\sqrt{N}} - \frac{v}{2\sqrt{N}} \right) du dv = \\ & = \frac{1}{2N} \sum_{\square \in \Lambda} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \ln \left(\frac{h(\square)}{\sqrt{N}} \left(1 - \frac{u}{2h(\square)} - \frac{v}{2h(\square)} \right) \right) du dv = \\ & = \frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} + \sum_{\square \in \Lambda} \frac{1}{2N} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \ln \left(1 - \frac{u}{2h(\square)} - \frac{v}{2h(\square)} \right) du dv. \end{aligned}$$

Таким образом, разность между интегральной суммой и интегралом крюков в точности равна

$$\frac{1}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \ln \left(1 - \frac{u}{2h(\square)} - \frac{v}{2h(\square)} \right) du dv.$$

Найдем значение интеграла, отвечающее одной клетке $\square \in \Lambda$. Для простоты записи вместо $h(\square)$ будем писать h . Подынтегральная функция постоянна на прямых $u + v = \text{const}$, параллельных диагонали $u + v = 0$ квадрата $[-1, +1] \times [-1, +1]$. Сделав замену координат

$$\xi = \frac{u+v}{2}, \quad \eta = u - v,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \ln \left(1 - \frac{u}{2h} - \frac{v}{2h} \right) du dv &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-2(1-|\xi|)}^{2(1-|\xi|)} \ln \left(1 - \frac{\xi}{h} \right) d\eta d\xi = \\ &= 2 \int_{-1}^{+1} (1 - |\xi|) \ln \left(1 - \frac{\xi}{h} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Сгруппировав значения $\xi \in [0, +1]$ и $-\xi \in [0, -1]$, имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^{+1} (1 - |\xi|) \ln \left(1 - \frac{\xi}{h} \right) d\xi &= 2 \int_0^{+1} (1 - \xi) \left[\ln \left(1 - \frac{\xi}{h} \right) + \ln \left(1 + \frac{\xi}{h} \right) \right] d\xi = \\ &= 2 \int_0^1 (1 - \xi) \ln \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Наконец, разложим логарифм, стоящий под знаком интеграла, в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} -2 \int_0^{+1} (1 - \xi) \ln \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2} \right) d\xi &= -2 \int_0^{+1} \left[(1 - \xi) \cdot \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{kh^{2k}} \right) \right] d\xi = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+1} \frac{\xi^{2k} - \xi^{2k+1}}{kh^{2k}} d\xi = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \frac{1}{kh^{2k}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(2k+1)(2k+2)} \frac{1}{h^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)h^{2k}} = c(h), \end{aligned}$$

где перестановка суммы и интеграла законна в силу того, что подынтегральная функция положительна. \square

Проанализируем доказанную выше лемму. Помня о том, что сжатие диаграммы не влияет на значение интегральной суммы (см. (2.5)), перепишем выражение (2.2) для вероятностной меры μ в виде

$$-\frac{\ln \mu(\lambda)}{N} = 1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda_N} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} - \varepsilon(N),$$

где Λ_N — нормированная диаграмма λ_N . Теперь, применяя лемму 1 о приближении интеграла крюков, получим

$$-\frac{\ln \mu(\lambda)}{N} = 1 + 2 \iint_{\Lambda_N} \ln h(x, y) dx dy + \frac{1}{N} \sum_{\square \in \Lambda_N} c(h(\square)) - \varepsilon(N), \quad (2.10)$$

где последнее слагаемое стремится к нулю с ростом N .

Повернем нормированную диаграмму на угол $\pi/4$ радиан против часовой стрелки относительно начала координат и проведем равномерное сжатие диаграммы по каждой из осей в $\sqrt{2}$ раз (при таком преобразовании площадь диаграммы станет равной $1/2$, а длина диагонали клетки $1/N$). Легко видеть, что это преобразование осуществляется формулами

$$x = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, \quad y = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \quad (2.11)$$

где \bar{x}, \bar{y} — координаты нормированной диаграммы в старой системе координат. Повернутую диаграмму продлим за пределы конечного отрезка $[a, b]$, как показано на рис. 6, так, чтобы она совпала с функцией

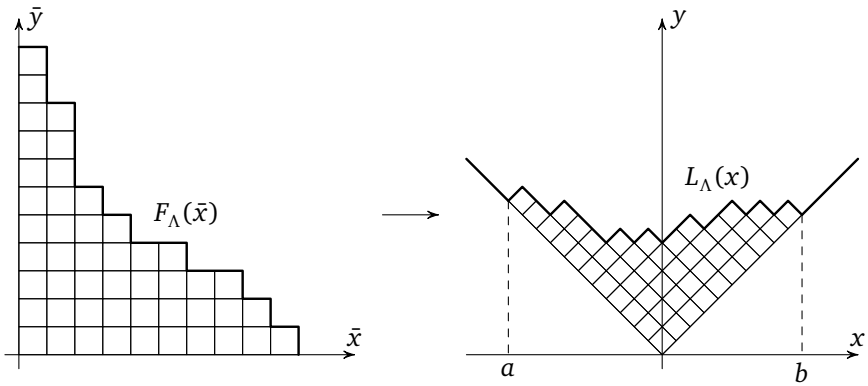


Рис. 6. Диаграмма Юнга после поворота и сжатия в $\sqrt{2}$ раз

$|x|$ вне $[a, b]$, и обозначим полученную функцию $L_\Lambda(x)$. Ясно, что $L_\Lambda(x)$ дифференцируема везде, за исключением конечного числа точек, соответствующих углам клеток диаграммы, причем $L'_\Lambda(x) = \pm 1$. При этом площадь диаграммы Λ будет определяться как интеграл разности $L_\Lambda(x)$ и модуля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (L_\Lambda(x) - |x|) dx = \int_a^b (L_\Lambda(x) - |x|) dx = \frac{1}{2}.$$

Как будет выглядеть интеграл крюков θ_L после такого преобразования? Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 2 (о замене координат в интеграле крюков). При преобразовании диаграммы Λ , осуществляемом формулами (2.11), соответ-

ствующий ей интеграл крюков θ_F переходит в интеграл $\tilde{\theta}_L$ следующего вида:

$$\tilde{\theta}_L = 1 + 2 \int \int_{t < s} \ln 2(s-t) \cdot (1 - L'_\Lambda(s))(1 + L'_\Lambda(t)) ds dt. \quad (2.12)$$

В дальнейшем нам будет удобно работать с интегралом крюков именно в форме (2.12) — в ней область интегрирования не зависит от формы диаграммы, а в зависимость подынтегрального выражения от формы границы входит производная (а не обратная функция, как в (2.6)).

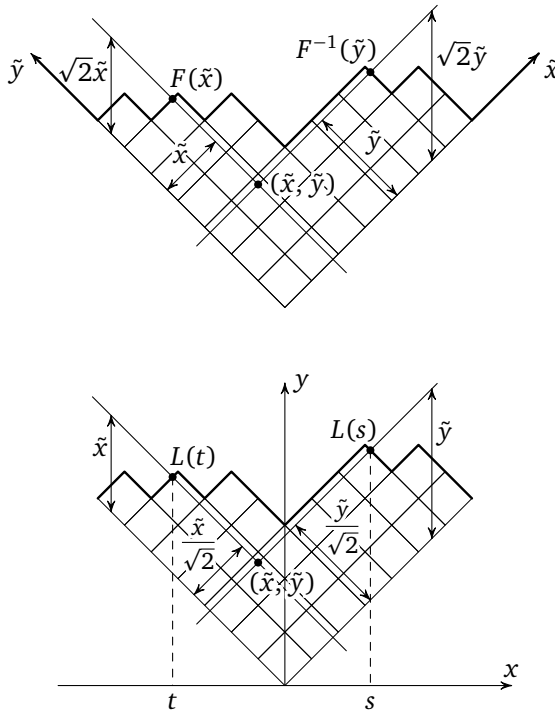


Рис. 7. Соотношения в различных системах координат до и после преобразования

Доказательство. Как видно из рис. 7, в новой системе координат уравнения прямых, проходящих через произвольную точку и имеющих угловые коэффициенты ± 1 , имеют вид

$$y(x) = \tilde{x} - x \quad \text{и} \quad y(x) = \tilde{y} + x,$$

где (\tilde{x}, \tilde{y}) — координаты этой точки в старой системе координат. Обозначив абсциссы пересечения первой и второй прямых с графиком $L(x)$ через t и s , получим:

$$L(t) = \tilde{x} - t \quad \text{и} \quad L(s) = \tilde{y} + s,$$

или

$$\tilde{x} = L(t) + t \quad \text{и} \quad \tilde{y} = L(s) - s. \quad (2.13)$$

Именно этой заменой мы и воспользуемся. Учитывая то, что якобиан такой замены равен

$$-(L'(t) + 1)(L'(s) - 1) = (1 - L'(s))(1 + L'(t)),$$

всё, что осталось сделать для доказательства леммы, — это показать, что

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2(s - t). \quad (2.14)$$

Действительно, оба звена ломаной $(t, L(t)) \text{—} (x, y) \text{—} (s, L(s))$ идут под углом 45° к оси абсцисс, поэтому длина этой ломаной в $\sqrt{2}$ раз больше разности абсцисс $s - t$. Наконец, при возвращении к исходной системе координат все расстояния увеличиваются еще в $\sqrt{2}$ раз, и мы приходим к заявленному выражению $2(s - t)$. \square

§3. Экстремаль интеграла крюков

Найденное в предыдущем параграфе выражение (2.12) для интеграла крюков $\tilde{\theta}_L$ является функционалом от функции $L(x)$, соответствующей диаграмме Λ . При этом мера Планшереля $\mu(\lambda)$ примерно равна $e^{-N\tilde{\theta}_L}$. Поэтому если существует предельная форма диаграммы, то стоит ожидать, что она будет являться экстремалью функционала $\tilde{\theta}$ — функцией, в которой он принимает наименьшее возможное значение.

Как будет видно из дальнейших рассуждений, это значение будет нулевым. Отметим, что искомая функция, очевидно, должна будет удовлетворять упомянутым в предыдущем параграфе свойствам функции $L(x)$, за исключением лишь требования равенства модуля производной единице.

Сформулируем задачу более точно. Будем искать такую функцию $\Omega(x)$, которая доставляет минимальное значение функционалу (2.12):

$$\tilde{\theta}_\Omega = \min_L \tilde{\theta}_L \quad (3.1)$$

при следующих ограничениях:

- за пределами некоторого отрезка экстремаль $\Omega(x)$ должна совпадать с функцией $|x|$;
- площадь области между графиками функций $\Omega(x)$ и $|x|$ должна быть равна площади нормированной сжатой диаграммы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega(x) - |x|) dx = \frac{1}{2}; \quad (3.2)$$

- $\Omega(x) \geq |x|$ для любого значения аргумента x .

Последнее ограничение налагается, поскольку график функции $L_\Lambda(x)$ границы любой диаграммы не может опускаться ниже биссектрис первой и второй четвертей.

Такая функция $\Omega(x)$ была найдена в 1977 г. независимо Вершиком и Керовым в СССР [2], а также Логаном и Шеппом в США [14] и имеет следующий вид:

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) & \text{при } |x| < 1; \\ |x| & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

На рис. 8 показан график этой экстремали. Стоит отметить четность функции $\Omega(x)$ (хотя этого и следовало ожидать из симметрии меры Планшереля), а также непрерывность ее производной. Действительно, $\Omega'(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$ на интервале $(-1; 1)$, а на концах интервала значения этой функции равны ± 1 .

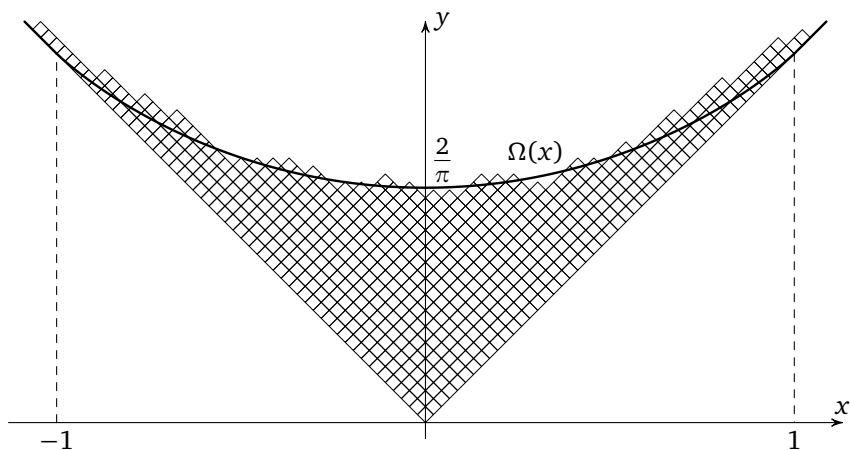


Рис. 8. Экстремаль $\Omega(x)$ и граница диаграммы Юнга

Обозначим символом $p(N)$ число всех диаграмм Юнга размера N . Тогда, обращаясь к асимптотической формуле Харди—Рамануджана¹

$$p(N) \sim \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}, \quad (3.4)$$

устанавливающей, что число диаграмм растет субэкспоненциально, можно заключить, что при достаточно больших значениях N будет выполняться неравенство

$$\max \mu(\lambda_N) > 4N\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}(1 + o(1)),$$

где максимум берется по всем диаграммам размера N . Из полученного неравенства заключаем, что

$$0 < -\frac{\ln \max \mu(\lambda_N)}{N} < \frac{1}{N} \left(-\ln(4N\sqrt{3}) + \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N} \right) + o(1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (3.5)$$

Если в точке Ω действительно достигается минимум функционала $\tilde{\theta}$, то из (3.5) следует, что $\tilde{\theta}_\Omega \leq 0$.

Чтобы исключить (маловероятную) возможность $\tilde{\theta}_\Omega < 0$, можно применить следующее рассуждение. Отметим, что функционал $\tilde{\theta}$ непрерывен (в подходящем смысле), а график Ω может быть сколь угодно хорошо приближен графиками, соответствующими некоторым

¹Набросок основных идей доказательства формулы Харди—Рамануджана можно найти в книге [8].

диаграммам Юнга $\lambda_{\Omega, N}$. Тогда $-\frac{1}{N} \ln \mu_N(\lambda_{\Omega, N}) \geq -\frac{1}{N} \ln 1 = 0$, поэтому $\tilde{\theta}_{\lambda_{\Omega, N}} \geq 0 + o(1)$ (при $N \rightarrow \infty$). Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем, что $\tilde{\theta}_{\Omega} \geq 0$.

Мы строго обоснуем переходы (непрерывность $\tilde{\theta}_{\lambda}$ как функционала от λ и приближаемость Ω диаграммами Юнга) в проведённом только что рассуждении чуть позже, в лемме 5. Пока же проверим, что $\Omega(x)$ действительно удовлетворяет заявленным ограничениям, а также условию (3.1). Выполнение первого и третьего ограничений автоматически следует из самого определения (3.3). Проверим выполнение ограничения на площадь.

Подставляя в интеграл (3.2) выражение для $\Omega(x)$, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega(x) - |x|) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} (x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) dx - \int_{-1}^{+1} |x| dx. \quad (3.6)$$

Первый интеграл в правой части разбивается на два интеграла, каждый из которых вычислим отдельно. Прежде всего,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} (x \arcsin x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \arcsin x d(x^2) = \\ &= \frac{x^2 \arcsin x}{\pi} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для второго же интеграла получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

Наконец, очевидно, что

$$\int_{-1}^{+1} |x| dx = 1.$$

Подставляя значения интегралов обратно в (3.6), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega(x) - |x|) dx = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2},$$

в чем мы и желали убедиться.

§ 4. Экстремальное свойство функции Ω

На интеграл крюков (2.12) можно смотреть как на своеобразный квадратный трехчлен на (бесконечномерном!) пространстве функций. Это позволит нам доказать свойство экстремальности функции Ω .

В предыдущем параграфе мы определили функцию Ω , являющуюся предположительно экстремалью нашего функционала. Так что естественно теперь «сдвинуть начало координат» и рассмотреть интеграл крюков как функцию от отклонения $f(x) = L(x) - \Omega(x)$.

Лемма 3. *Интеграл крюков функции $L(x)$, являющейся границей диаграммы Юнга, может быть представлен в следующем виде:*

$$\tilde{\theta}_L = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln 2|s-t| \cdot f'(s)f'(t) ds dt + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcch} |s| ds, \quad (4.1)$$

где $f(x) = L(x) - \Omega(x)$.

Напомним, что $\operatorname{arcch} s = \ln(s + \sqrt{s^2 - 1})$ — гиперболический арккосинус.

Доказательство. Зафиксируем числа a и b такие, что $f(s) = 0$ вне интервала (a, b) , причем $a < -1 < 1 < b$. Тогда, подставляя $L(x) = f(x) + \Omega(x)$ в выражение (2.12) для $\tilde{\theta}_L$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_L &= 1 + 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (1-L'(s))(1+L'(t)) ds dt = \\ &= 1 + 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (-f'(s) + (1-\Omega'(s)))(f'(t) + (1+\Omega'(t))) ds dt. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_L &= 1 - 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot f'(s)f'(t) ds dt + \\ &\quad + 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (1-\Omega'(s))f'(t) ds dt - \\ &\quad - 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (1+\Omega'(t))f'(s) ds dt + \\ &\quad + 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (1-\Omega'(s))(1+\Omega'(t)) ds dt. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Отметим, что для всех четырех интегралов их подинтегральные выражения отличны от нуля только на компактных областях:

$$\begin{aligned} a \leq t \leq s \leq b &\quad \text{для} \quad \ln 2(s-t) \cdot f'(s)f'(t); \\ a \leq t \leq s \leq +1 &\quad \text{для} \quad \ln 2(s-t) \cdot (1-\Omega'(s))f'(t); \\ -1 \leq t \leq s \leq b &\quad \text{для} \quad \ln 2(s-t) \cdot (1+\Omega'(t))f'(s); \\ -1 \leq t \leq s \leq +1 &\quad \text{для} \quad \ln 2(s-t) \cdot (1-\Omega'(s))(1+\Omega'(t)). \end{aligned}$$

При подходе к прямой $s = t$ возникающие особенности во всех четырех интегралах имеют одинаковый характер и являются логарифмическими. Поэтому для всех них имеет место абсолютная сходимость.

Далее преобразуем разность второго и третьего интегралов следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (1 - \Omega'(s)) f'(t) ds dt - 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot (1 + \Omega'(t)) f'(s) ds dt = \\
 & = 2 \int_a^b f'(\tau) \left[\int_{\tau}^{+1} \ln 2(s-\tau) \cdot (1 - \Omega'(s)) ds \right] d\tau - \\
 & \qquad \qquad \qquad - 2 \int_a^b f'(\tau) \left[\int_{-1}^{\tau} \ln 2(\tau-t) \cdot (1 + \Omega'(t)) dt \right] d\tau = \\
 & = 2 \int_a^b f'(\tau) \left[- \int_{-1}^{\tau} \ln 2(\tau-t) \cdot (1 + \Omega'(t)) dt + \int_{\tau}^{+1} \ln 2(t-\tau) \cdot (1 - \Omega'(t)) dt \right] d\tau.
 \end{aligned}$$

Обозначив функцию в квадратных скобках через $F(\tau)$ и заметив, что вместе первое и последнее слагаемые в (4.2) есть не что иное, как $\tilde{\theta}_{\Omega}$, получаем

$$\tilde{\theta}_L = \tilde{\theta}_{\Omega} - 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot f'(s) f'(t) ds dt + 2 \int_a^b f'(s) F(s) ds;$$

проинтегрировав последний интеграл по частям, заключаем, что

$$\tilde{\theta}_L = \tilde{\theta}_{\Omega} - 2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot f'(s) f'(t) ds dt - 2 \int_a^b f(s) F'(s) ds,$$

то есть функционал $\tilde{\theta}_L$ имеет вид «квадратного трехчлена» на бесконечномерном пространстве функций. Кроме того, очевидно, что

$$2 \iint_{s>t} \ln 2(s-t) \cdot f'(s) f'(t) ds dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln 2|s-t| \cdot f'(s) f'(t) ds dt.$$

Осталось показать, что

$$-F'(s) = \begin{cases} 2 \operatorname{arcch} |s|, & |s| > 1; \\ 0, & |s| \leq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Учитывая исходное выражение для $F(s)$, содержащее интегралы, последнее равенство не может быть установлено сразу непосредственным дифференцированием. Причиной является тот факт, что подынтегральные выражения в определении $F(s)$ содержат логарифм и поэтому

при дифференцировании возникает особенность $1/(s-t)$, препятствующая дальнейшему интегрированию. Поэтому преобразуем подынтегральное выражение, сделав такую логарифмическую особенность неподвижной:

$$\begin{aligned} F(s) &= - \int_{-1}^s \ln 2(s-t) \cdot (1 + \Omega'(t)) dt + \int_s^{+1} \ln 2(t-s) \cdot (1 - \Omega'(t)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \ln 2|\xi| \cdot (-\Omega'(s+\xi) - 1) d\xi + \int_0^{+\infty} \ln 2|\xi| \cdot (-\Omega'(s+\xi) + 1) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln 2|\xi| \cdot (\operatorname{sgn} \xi - \Omega'(s+\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали замену $\xi = t - s$ и тот факт, что $\Omega'(t) = 1$ при $t \geq +1$ и $\Omega'(t) = -1$ при $t \leq -1$. После такого преобразования особенность будет возникать уже только в фиксированной точке $\xi = 0$, тем самым позволяя внести производные под знак интеграла:

$$-F'(s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln 2|\xi| \cdot (\operatorname{sgn} |\xi| - \Omega'(s+\xi))'_t d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln 2|\xi| \cdot \Omega''(s+\xi) d\xi.$$

Как было замечено в § 3, $\Omega'(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$ на интервале $(-1; +1)$. Вне этого интервала $\Omega''(x) = 0$ и тем самым получаем

$$-F'(s) = \int_{s-1}^{s+1} \ln 2|\xi| \cdot \frac{2}{\pi \sqrt{1-(s+\xi)^2}} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln 2|s-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

сводя проверку условия (4.3) к проверке условия

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln 2|s-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 2 \operatorname{arcch} |s|, & |s| > 1; \\ 0, & |s| \leq 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Прежде всего заметим, что, положив $s = 0$, для интеграла в левой части получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln 2|t|}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln 2}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln |t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} (\ln 2 \cdot \arcsin t \Big|_{-1}^{+1} - \pi \ln 2) = 0, \end{aligned}$$

где мы использовали известный (см., например, [4, 863.41]) интеграл

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln |t| dt}{\sqrt{1-t^2}} = \ln 2.$$

Таким образом, обе функции в (4.4) совпадают при $s=0$. Дальнейшая проверка равенства их производных покажет, что обе функции совпадают на всем интервале. Действительно, дифференцируя (4.4) по переменной s , приходим к проверке условия

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(s-t)\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \pm \frac{2}{\sqrt{s^2-1}}, & \pm s > 1; \\ 0, & |s| \leq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

После замены $t = -\cos u$ интеграл в левой части упрощается до

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(s-t)\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{du}{s + \cos u},$$

где, сделав тригонометрическую подстановку

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = v, \quad \cos u = \frac{1-v^2}{1+v^2}, \quad du = \frac{2dv}{1+v^2},$$

получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{du}{s + \cos u} = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(s-1)v^2 + (s+1)}. \quad (4.6)$$

При $\pm s > 1$ последний интеграл вычисляется как

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(s-1)v^2 + (s+1)} &= \frac{4}{\pi(s-1)} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^2 + \frac{s+1}{s-1}} = \\ &= \frac{4}{\pi(s-1)} \sqrt{\frac{s-1}{s+1}} \cdot \left[\operatorname{arctg} \left(v \cdot \sqrt{\frac{s-1}{s+1}} \right) \right] \Big|_{v=0}^{v=+\infty} = \\ &= \pm \frac{4}{\pi\sqrt{s^2-1}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pm \frac{2}{\sqrt{s^2-1}}. \end{aligned}$$

В случае же когда $|s| < 1$, интеграл (4.6) берется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(s-1)v^2 + (s+1)} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+s) - (1-s)v^2} = \\ &= \frac{4}{\pi\sqrt{1-s^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+s} + v\sqrt{1-s}}{\sqrt{1+s} - v\sqrt{1-s}} \right| \Big|_{v=0}^{v=+\infty} = \frac{4}{\pi\sqrt{1-s^2}} (\ln |-1| - \ln |1|) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, рассматривая интеграл (4.6) как функцию от переменной s , можно увидеть, что такая функция является непрерывной слева и справа в точках $s = +1$ и $s = -1$ соответственно. Последнее наблюдение устанавливает справедливость (4.5) и, в свою очередь, (4.3), тем самым завершая доказательство леммы. \square

Можно заметить, что в выражении (4.1) присутствует нетривиальный линейный член,

$$4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcch} |s| ds.$$

Это, однако, не противоречит тому, что Ω является минимумом нашего функционала: так как $L(x) \geq |x|$, значение этого линейного члена всегда неотрицательно.

Для доказательства того, что на траектории Ω действительно достигается минимум интеграла крюков, остается разобраться с квадратичным членом. Оказывается, что квадратичная часть такого представления интеграла крюков с точностью до константы ($= 1/2$) есть не что иное, как соболевская норма отклонения $f(x)$ на соответствующем функциональном пространстве.

Лемма 4. Для любой кусочно непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ с компактным носителем¹ выполнено равенство

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln 2|s-t| \cdot f'(s)f'(t) ds dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right)^2 ds dt. \quad (4.7)$$

В частности, левая часть всегда неотрицательна.

Доказательство. Пусть функция f равна нулю вне отрезка $[-a, +a]$. Разобьем \mathbb{R}^2 на три области, как показано на рис. 9, и перепишем

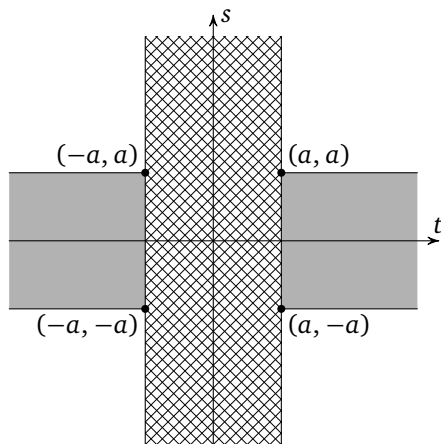


Рис. 9.

¹Напомним, что функция с компактным носителем на прямой есть, по определению, функция, обращающаяся в ноль вне некоторого отрезка.

интеграл в правой части (4.7):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \\ & = \int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt + \int_{+a}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt + \\ & \quad + \int_{-\infty}^{-a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (4.8):

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \\ & = \int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+t} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt + \int_{-a}^{+a} \int_t^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt. \end{aligned}$$

Интегралы в правой части берутся по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+t} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds = - \int_{-\infty}^{+t} (f(s) - f(t))^2 d \left(\frac{1}{s - t} \right) = \\ & = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f(s) - f(t))^2}{s - t} \Big|_{s=-\infty}^{s=t-\varepsilon} + 2 \int_{-\infty}^t \frac{(f(s) - f(t))f'(s)}{s - t} ds = \\ & = 2 \int_{-\infty}^t \frac{(f(s) - f(t))f'(s)}{s - t} ds, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем фактом, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f(t - \varepsilon) - f(t))^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f'(t))^2 \cdot \varepsilon = 0$$

в силу существования левой производной $f(x)$. Аналогично для второго интеграла получаем

$$\int_t^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds = 2 \int_t^{+\infty} \frac{(f(s) - f(t))f'(s)}{s - t} ds.$$

Тогда, учитывая, что $f'(x) = 0$ вне отрезка $[-a, +a]$, имеем:

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \frac{(f(s) - f(t))f'(s)}{s - t} ds dt. \quad (4.9)$$

В силу того, что здесь интегрирование ведется по прямоугольной области, мы можем поменять порядок интегрирования и еще раз воспользоваться интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \frac{(f(s) - f(t))f'(s)}{s - t} ds dt = \\
 & = -2 \int_{-a}^{+a} (f(s) - f(t))f'(s) \ln |s - t| \Big|_{t=-a}^{t=+a} ds - 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} f'(s)f'(t) \ln |s - t| dt ds = \\
 & = 2 \int_{-a}^{+a} f(s)f'(s) \ln \frac{a+s}{a-s} ds - 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} f'(s)f'(t) \ln |s - t| dt ds. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Рассматривая второе слагаемое в (4.8), имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{+a}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \int_{-a}^{+a} \int_{+a}^{+\infty} \left(\frac{f(s)}{s - t} \right)^2 dt ds = \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(s)}{a - s} ds = \\
 & = -f^2(s) \ln(a - s) \Big|_{s=-a}^{s=+a} + 2 \int_{-a}^{+a} f(s)f'(s) \ln(a - s) ds = \\
 & = 2 \int_{-a}^{+a} f(s)f'(s) \ln(a - s) ds. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Аналогично для третьего слагаемого в (4.8) получаем

$$\int_{-\infty}^{-a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = -2 \int_{-a}^{+a} f(s)f'(s) \ln(a + s) ds. \quad (4.12)$$

Сопоставляя (4.8)—(4.12), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = -2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} f'(s)f'(t) \ln |s - t| ds dt. \quad (4.13)$$

Очевидно, в силу ограниченности носителя $f(x)$ в интеграле справа конечные пределы могут быть заменены бесконечными. Наконец, нехватка множителя 2 под логарифмом в правой части (4.13) компенсируется тем фактом, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s)f'(t) \ln 2|s - t| ds dt = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s)f'(t) \ln 2 ds dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s)f'(t) \ln |s - t| ds dt,
 \end{aligned}$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s)f'(t) \ln 2 \, ds \, dt = \ln 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) \, ds \right) f'(t) \, dt = 0$$

в силу того, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) \, ds = \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) - \lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = 0 - 0 = 0.$$

Лемма доказана. \square

Это утверждение позволяет заключить, что на Ω действительно достигается минимум интеграла крюков.

Более того, эта лемма позволит нам оценивать близость к Ω функций, на которых интеграл крюков принимает малые значения — что, как мы увидим в следующем параграфе, является одним из ключевых шагов доказательства теоремы Вершика—Керова—Логана—Шеппа.

А также мы теперь можем реализовать намеченный в § 3 план доказательства неравенства $\tilde{\theta}_\Omega \geq 0$.

Лемма 5. *Справедливо неравенство $\tilde{\theta}_\Omega \geq 0$.*

Доказательство. Сначала построим последовательность диаграмм Юнга $\lambda_{\Omega, N}$, приближающих Ω — таких, чтобы функция $f = L_{\lambda_{\Omega, N}} - \Omega$ нигде не превосходила бы $\frac{1}{\sqrt{N}}$ и обращалась бы в ноль вне отрезка $\left[-1 - \frac{1}{\sqrt{N}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right]$. Для этого наложим на график функции Ω сетку с шагом $\frac{1}{2\sqrt{N}}$, выберем все клетки, оказавшиеся строго под этим графиком, и будем добавлять по одной клетке, которые график пересекает, пока не получится диаграмма Юнга ровно из N клеток.

Оценим теперь разницу $\tilde{\theta}_\Omega - \tilde{\theta}_{\lambda_{\Omega, N}}$:

$$|\tilde{\theta}_\Omega - \tilde{\theta}_{\lambda_{\Omega, N}}| = \iint \left| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right| dt \, ds + 4 \int f(s) \operatorname{arcch} |s| \, ds.$$

Второе слагаемое не превосходит $\frac{1}{N}$ в силу оценки на $|f|$. Чтобы оценить первое, разобьём область интегрирования две части: $|t - s| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$ и $|t - s| < \frac{1}{\sqrt{N}}$. Для интеграла по первой области воспользуемся оценкой $|f| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$, а для интеграла по второй области — неравен-

ством $\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| \leq 2$:

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}_\Omega - \tilde{\theta}_{\lambda_{\Omega, N}}| &= \iint \left| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right| dt ds + O\left(\frac{1}{N}\right) \leq \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 \ln 2\sqrt{N} + 4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) = O\left(\frac{\ln \sqrt{N}}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $-\frac{\ln \mu(\lambda_{\Omega, N})}{N} = \tilde{\theta}_\Omega + o(1)$, получаем, что $\tilde{\theta}_\Omega = -\frac{\ln \mu(\lambda_{\Omega, N})}{N} + o(1)$. Так как левая часть не зависит от N , переходя к пределу по N , получаем искомое неравенство. \square

§ 5. Существенные диаграммы Юнга и теорема о предельной форме

Далее мы покажем, что типичная диаграмма Юнга большого размера имеет форму, близкую к экстремали Ω .

Для этого мы введем класс *существенных* диаграмм — диаграмм, значение интеграла крюков на которых не слишком сильно отклоняется от минимально возможного. Окажется (см. теорему 1), что, с одной стороны, все существенные диаграммы близки по форме к Ω , а с другой стороны, мера класса существенных диаграмм стремится к 1 с ростом N .

Отметим, что в класс существенных диаграмм заведомо не могут входить все диаграммы Юнга: например, для любого N есть диаграмма из одного столбца, форма которой очень далека от Ω .

Так как предельная форма определяется видом диаграмм с наибольшим числом ведущих в них путей, с помощью заданной вероятностной меры мы бы хотели ввести критерий, позволяющий для заданного размера N отличать такие диаграммы от остальных. Безусловно, диаграммы с максимально возможным числом путей будут входить в предполагаемый класс, но не только они.

Вспомним (см., например, (2.10)), что интегралом крюков мы аппроксимируем не саму вероятностную меру, а ее логарифм

$$-\frac{\ln \mu(\lambda_N)}{N} \sim \tilde{\theta}_{\lambda_N} + \frac{1}{N} \sum_{\square \in \lambda_N} c(h(\square)),$$

где значение суммы в правой части всегда положительно. Так как вероятностная мера диаграмм, сильно отклоняющихся от предельной формы, должна становиться ничтожно малой, естественно предположить, что значения соответствующих им интегралов крюков $\tilde{\theta}$ должны возрастать. Напротив, для предполагаемого класса асимптотически стабильных диаграмм соответствующие интегралы крюков будут ограничены сверху. Указанием этого граничного значения мы и введем критерий такого класса диаграмм Юнга. А именно, диаграмму Юнга Λ размера N назовем *существенной*, если ее интеграл крюков (2.6) удовлетворяет неравенству

$$\tilde{\theta} < \frac{2\pi}{\sqrt{6N}}. \tag{5.1}$$

Такой непростой вид для верхней границы обуславливается формулой Харди—Рамануджана. Ее полезность будет оправдана нижеследующей леммой. Множество же всех существенных диаграмм размера N далее

будем обозначать символом M_N :

$$M_N = \left\{ \Lambda \mid \tilde{\theta}_\Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{6N}} \right\}.$$

Лемма 6. При росте N мера Планшереля класса существенных диаграмм стремится к 1.

Доказательство. Учитывая полученное ранее представление (2.2) меры Планшереля через интегральную сумму, а также связь последней с интегралами крюков, имеем:

$$\ln \mu(\Lambda) = -N \cdot \tilde{\theta}_\Lambda - \sum_{\square \in \Lambda} c(h(\square)) + \ln \sqrt{2\pi N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (5.2)$$

Вспоминая ряд (2.8) для $c(x)$, легко увидеть, что при достаточно больших значениях N разность

$$\ln \sqrt{2\pi N} - \sum_{\square \in \Lambda} c(h(\square))$$

будет отрицательной. Поэтому в (5.2) можно смело ограничить $\ln \mu(\Lambda)$ сверху интегралом крюков:

$$\ln \mu(\Lambda) \leq -N \cdot \tilde{\theta}_\Lambda.$$

Потенцируя, получаем

$$\mu(\Lambda) \leq e^{-N \cdot \tilde{\theta}_\Lambda}.$$

Рассмотрим диаграмму Λ размера N , не являющуюся существенной, то есть диаграмму, которая лежит в дополнении \overline{M}_N . Тогда для такой диаграммы

$$\mu(\Lambda) \leq e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}},$$

а с учетом формулы Харди—Рамануджана (3.4) мера всего множества \overline{M}_N удовлетворяет неравенству

$$\mu(\overline{M}_N) \leq p(N) \cdot e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}} = \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}} = \frac{1}{4N\sqrt{3}}$$

и является бесконечно малой величиной при $N \rightarrow \infty$. Доказательство завершено. \square

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему о предельной форме диаграмм Юнга.

Теорема 1 (Вершик, Керов [2], [3]; Логан, Шепп [14]). Если диаграмма Λ_N существенная, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |L_{\Lambda_N}(x) - \Omega(x)| < C \cdot N^{-\frac{1}{6}}, \quad (5.3)$$

где C — константа, не зависящая от N .

Доказательство. Как и ранее, отклонение функции $L(s)$ от экстремали $\Omega(x)$ будем обозначать через $f(x)$, то есть $f(x) = L(x) - \Omega(x)$.

Зафиксируем такое $a > 0$, чтобы носитель $f(x)$ полностью лежал на отрезке $[-a, +a]$, то есть $f(x) = 0$ вне этого отрезка. Это всегда можно сделать, поскольку каждая диаграмма Юнга имеет конечные размеры и соответствующая ей функция для достаточно больших значений аргумента будет совпадать с модулем $|x|$. С другой стороны, нельзя сразу утверждать, что значения a будут ограничены сверху для всех диаграмм всех размеров N . Тем не менее, можно показать, что для существенных диаграмм такая граница существует. Этот результат мы сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 7. *Существует положительная константа $a > 0$, такая, что для любой существенной диаграммы Λ_N размера N , не зависящего от a , выполнено*

$$L_{\Lambda}(x) - \Omega(x) = 0$$

вне отрезка $[-a, +a]$.

Доказательство. Действительно, согласно (4.1) и лемме 4, величина $\tilde{\theta}_{\Lambda}$ оценивается снизу интегралом

$$\int_{|x|>1} f(x) \operatorname{arcch} |x| dx,$$

где в пределах своего носителя $f(x) > \frac{1}{\sqrt{N}}$, поскольку для $|x| > 1$ если график функции диаграммы и отклоняется от экстремали, то он должен отклоняться от нее по крайней мере на размер диагонали клетки. Но тогда, если носитель $f(x)$ лежит в отрезке $[-a, +a]$, где значение a выбрано минимально возможным, то

$$\int_{|x|>1} f(x) \operatorname{arcch} |x| dx \geq \int_1^a \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arcch}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{N}} (-\sqrt{a^2 - 1} + a \cdot \operatorname{arcch}(a)).$$

Выражение, стоящее в скобках, является возрастающей функцией от a при $a > 1$. Поэтому, вспоминая критерий (5.1) для существенных диаграмм, достаточно взять такое значение a , для которого будет выполняться

$$-\sqrt{a^2 - 1} + a \cdot \operatorname{arcch}(a) > \frac{2\pi}{\sqrt{6}},$$

тем самым гарантируя, что диаграмма, отклоняющаяся от предельной формы вне отрезка $[-a, +a]$, уже не является существенной. Лемма доказана. \square

Зафиксировав a , преобразуем соболевскую норму для отклонения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\theta}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^{+a} + \int_{+a}^{+\infty} \right) \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{s=-\infty}^{s=-a} + \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds - \frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{s=+a}^{s=+\infty} \right] dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f^2(t)}{a + t} + \frac{f^2(t)}{a - t} + \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds \right] dt = \\
 &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt.
 \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования во втором интеграле и продолжая аналогичные рассуждения относительно переменной t , получаем, что последнее выражение равно

$$\begin{aligned}
 &2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^{+a} + \int_{+a}^{+\infty} \right) \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 dt ds = \\
 &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \left[\frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{t=-\infty}^{t=-a} + \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 dt + \frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{t=+a}^{t=+\infty} \right] ds = \\
 &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \left[\frac{f^2(s)}{a + s} + \frac{f^2(s)}{a - s} + \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 dt \right] ds = \\
 &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(s)}{a^2 - s^2} ds + \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt.
 \end{aligned}$$

То есть мы пришли к тому, что

$$\|f\|_{\theta}^2 = 4a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt. \quad (5.4)$$

Но первый интеграл в правой части есть не что иное, как квадрат L^2 -нормы:

$$\left\| \frac{f(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt.$$

Тогда, учитывая, что двойной интеграл в (5.4) неотрицателен и что рассматриваемая диаграмма Юнга — существенная, получаем, что

$$\left\| \frac{f(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right\|_2^2 \leq \frac{1}{4a} \|f\|_\theta^2 < \frac{1}{4a} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{6N}},$$

откуда немедленно следует

$$\|f\|_2^2 < \frac{\pi a}{2\sqrt{6N}}. \quad (5.5)$$

Анализируя выражение для экстремали (3.3), легко убедиться, что ее производная ограничена: $\Omega'(x) \leq 1$. Так как функция $L(x)$ имеет зубчатый вид, очевидно неравенство $|L'(x)| \leq 1$. Таким образом, производная отклонения будет также ограниченной функцией:

$$|f'(x)| = |L'(x) - \Omega'(x)| \leq 1 + 1 = 2.$$

Тогда если наибольшее значение $|f(x)|$ достигается в точке x_0 и равно M , то в силу непрерывности $f(x)$ и компактности ее носителя

$$|f(x)| \geq M - 2|x - x_0|,$$

причем для всех x . Мы же проинтегрируем квадрат этого неравенства на отрезке $\left[x_0, x_0 + \frac{M}{2} \right]$:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \frac{M}{2}} f^2(x) dx \geq \int_0^{\frac{M}{2}} (M - 2u)^2 du = \left[M^2 u - 2Mu^2 + \frac{4}{3}u^3 \right] \Big|_0^{\frac{M}{2}} = \frac{M^3}{6}.$$

Так как M и есть значение искомой L_∞ -нормы, то с учетом (5.5) получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty^3 = M^3 &\leq 6 \int_{x_0}^{x_0 + \frac{M}{2}} f^2(x) dx \leq 6 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = 6\|f\|_2^2; \\ \|f\|_\infty^3 &\leq 6\|f\|_2^2 < \frac{3\pi a}{\sqrt{6N}}; \\ \|f\|_\infty &< \sqrt[3]{\sqrt{\frac{3}{2}} \pi a \cdot \frac{1}{N^{\frac{1}{6}}}}; \\ \|f\|_\infty &< C \cdot N^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

§ 6. Оценка длины первой строки

Доказав теорему о предельной форме диаграммы Юнга, перейдем теперь к другой задаче — оценке длины первой строки. Отметим, что нижняя оценка на длину первой строки следует, по существу, из доказанной нами теоремы о предельной форме. Но никакой верхней оценки теорема о предельной форме не дает (диаграмма, близкая к Ω , может, вообще говоря, иметь сколь угодно длинную первую строку).

Предварительно введем следующие обозначения. Если диаграмма λ' получается из диаграммы λ добавлением одной клетки, то будем писать

$$\lambda' \searrow \lambda.$$

И наоборот, если диаграмма λ'' получается из λ удалением одной клетки, то пишем

$$\lambda'' \nearrow \lambda.$$

Легко заметить что при таком обозначении стрелки \nearrow и \searrow будут соответствовать перемещениям в графе Юнга между ярусами по соответствующим путям вверх и вниз. Кроме этого, будем обозначать размер диаграммы λ символом $|\lambda|$, то есть

$$|\lambda| = |\lambda_N| = N.$$

Наконец, обозначим символом \mathscr{Y} множество всех диаграмм Юнга, а символом \mathscr{Y}_N — его подмножество диаграмм размера N .

Первый результат, который мы получим, устанавливает связь между числом путей, ведущих в произвольную диаграмму λ_N , и числом путей в диаграммы, получающиеся из λ_N добавлением клетки. Оказывается, что сумма всех путей в диаграммы $\lambda'_{N+1} \searrow \lambda_N$ в точности равняется произведению размера $N + 1$ на число путей, ведущих в λ_N . Сформулируем это важное свойство в виде отдельной леммы.

Лемма 8.

$$\sum_{\lambda' \searrow \lambda} \dim \lambda' = (|\lambda| + 1) \cdot \dim \lambda.$$

Доказательство. Рассмотрим линейное пространство $L_2(\mathscr{Y})$, состоящее из всевозможных конечных линейных комбинаций диаграмм Юнга с вещественными коэффициентами. Для произвольных $\lambda', \lambda'' \in \mathscr{Y}$ введем на пространстве $L_2(\mathscr{Y})$ скалярное произведение по формуле

$$\langle \lambda', \lambda'' \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda' = \lambda''; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При таком скалярном произведении базис $L_2(\mathscr{Y})$, составленный из всех диаграмм $\lambda \in \mathscr{Y}$, будет являться ортогональным. Теперь введем линейные операторы U и D , заданные своими значениями на элементах базиса:

$$D\lambda = \sum_{\lambda' \searrow \lambda} \lambda', \quad U\lambda = \sum_{\lambda'' \nearrow \lambda} \lambda''.$$

Отметим, что операторы U и D — сопряженные. Действительно, для любых $\lambda', \lambda'' \in \mathscr{Y}$ имеет место

$$\langle D\lambda', \lambda'' \rangle = \langle \lambda', U\lambda'' \rangle.$$

В этом легко убедиться, проверив это свойство на элементах базиса. Кроме того, справедливо равенство

$$U(D(\lambda)) - D(U(\lambda)) = \lambda, \tag{6.1}$$

то есть $UD - DU = I$ — тождественное преобразование. Справедливость равенства (6.1) следует из того наблюдения, что получить произвольную диаграмму из самой себя последовательным удалением, а затем добавлением клетки можно столькими способами, сколько существует локальных максимумов у графика функции, соответствующей этой диаграмме. Действительно, каждый такой локальный максимум будет соответствовать углу клетки, которую возможно удалить. Получить же диаграмму саму из себя последовательным добавлением и удалением клетки можно столькими способами, сколько существует локальных минимумов (см. рис. 10). Но в то же время очевидно, что для любой диаграммы число локальных максимумов соответствующей ей функции всегда будет на единицу меньше числа локальных минимумов. Это значит, что коэффициент при элементе λ в выражении $UD(\lambda)$ окажется на единицу большим, чем в выражении $DU(\lambda)$. В то же время все «лишние» возникшие диаграммы, отличные от λ , сократятся, поскольку для

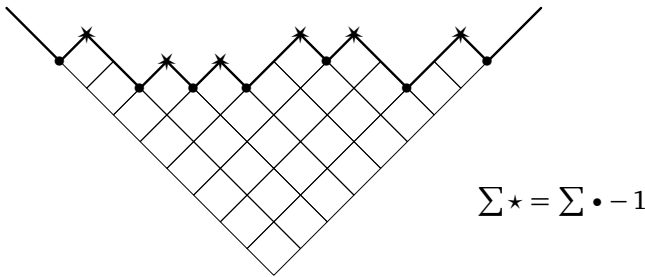


Рис. 10. Соотношение числа локальных минимумов и максимумов

таких диаграмм порядок добавления/удаления двух соответствующих клеток не будет иметь значения.

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что если диаграмма λ имеет размер N , то число ведущих в нее путей

$$\dim \lambda = \langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle = \langle \lambda_0, U^N \lambda \rangle, \quad (6.2)$$

где λ_0 — диаграмма без клеток. Тогда, используя (6.1) и (6.2), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda' \searrow \lambda} \dim \lambda' &= \left\langle D^{N+1} \lambda_0, \sum_{\lambda' \searrow \lambda} \lambda' \right\rangle = \langle D^{N+1} \lambda_0, D \lambda \rangle = \langle UD^{N+1} \lambda_0, \lambda \rangle = \\ &= \langle (I + DU) D^N \lambda_0, \lambda \rangle = \langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle + \langle DUD^N \lambda_0, \lambda \rangle = \\ &= 2 \langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle + \langle D^2 UD^{N-1} \lambda_0, \lambda \rangle = \\ &\quad \dots \\ &= (N + 1) \langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle + \langle D^{N+1} U \lambda_0, \lambda \rangle = (N + 1) \dim \lambda, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы полагаем $U \lambda_0 = 0$. Лемма доказана. \square

Следующим этапом введем на множестве диаграмм \mathscr{Y} функцию

$$p(\lambda', \lambda'') = \begin{cases} \frac{\dim \lambda''}{|\lambda''| \dim \lambda'}, & \text{если } \lambda'' \searrow \lambda'; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Легко убедиться, что из доказанной леммы следует равенство

$$\sum_{\lambda' \in \mathscr{Y}} p(\lambda, \lambda') = \sum_{\lambda' \searrow \lambda} p(\lambda, \lambda') = 1,$$

и поэтому функции $p(\lambda, \cdot)$ задают марковскую меру на пространстве \mathscr{Y} .

Поясним сказанное более подробно. Марковская цепь — это случайный процесс со множеством состояний и заданными на них вероятностями перехода (см. [7]). При этом для каждого состояния ξ_i вероятность перехода в состояние ξ_j определяется функцией $p(\xi_i, \xi_j)$. Тем самым можно рассматривать марковскую цепь как пару объектов: множество состояний и семейство функций — марковских вероятностных мер $p(\xi_i, \cdot)$.

В нашем же случае роль состояний будут играть все диаграммы Юнга, так что переход из диаграммы λ' в диаграмму λ'' будет определяться в соответствии с заданной нами вероятностью (6.3). Так как согласно формуле мы имеем ненулевую вероятность перехода только в диаграммы, получающиеся из текущей добавлением одной клетки, то все возможные перемещения по состояниям/диаграммам будут в точности соответствовать путям в графе Юнга при движении сверху вниз.

Невероятным образом оказывается, что мера Планшереля может быть задана в терминах переходных вероятностей $p(\lambda', \lambda'')$! Этот замечательный результат формулируется следующей леммой.

Лемма 9. Семейство переходных вероятностей $p(\lambda, \cdot)$ порождает меру Планшереля на множестве всех диаграмм Юнга. А именно, для любой диаграммы λ , состоящей из $N + 1$ клеток, справедливо равенство

$$\mu^{(N+1)}(\lambda) = \sum_{\lambda' \nearrow \lambda} \mu^{(N)}(\lambda') \cdot p(\lambda', \lambda), \quad (6.4)$$

где $\mu^{(N)}$ — мера Планшереля на множестве диаграмм размера N .

Доказательство. Действительно, прямая подстановка выражений (1.1) для меры Планшереля и (6.3) для вероятности перехода $p(\lambda', \lambda)$ показывает, что

$$\sum_{\lambda' \nearrow \lambda} \mu^{(N)}(\lambda') \cdot p(\lambda', \lambda) = \sum_{\lambda' \nearrow \lambda} \frac{\dim \lambda' \cdot \dim \lambda}{n! \cdot (n+1)} = \frac{(\dim \lambda)^2}{(n+1)!} = \mu^{(N+1)}(\lambda).$$

□

Доказанная лемма означает следующее. Положим меру Планшереля равной единице только для одной диаграммы λ_1 , состоящей из одной клетки:

$$\mu(\lambda_1) = 1,$$

и зададим вероятности перехода (6.3). Тогда формула (6.4) будет определять меру Планшереля на всем множестве диаграмм \mathcal{Y} . Действительно, мера Планшереля для каждой диаграммы размера $N + 1$ будет итерационно выражаться через меры Планшереля предшествующих ей диаграмм размера N (рис. 11). Более того, формула (6.4) непосредственно показывает, что мера Планшереля, определенная на множестве диаграмм одного размера, является вероятностной мерой, то есть в этом случае сумма всех мер оказывается равной единице. В самом деле, предполагая, что равенство

$$\sum_{|\lambda'|=N} \mu(\lambda') = 1$$

верно для размера N , по индукции получаем, что

$$\sum_{|\lambda|=N+1} \mu(\lambda) = \sum_{|\lambda'|=N} \left[\mu(\lambda') \sum_{|\lambda|=N+1} p(\lambda', \lambda) \right] = \sum_{|\lambda'|=N} (\mu(\lambda') \cdot 1) = 1.$$

Таким образом, мы установили известную формулу Бернсайда:

$$\sum_{|\lambda|=N} \dim^2 \lambda = N!,$$

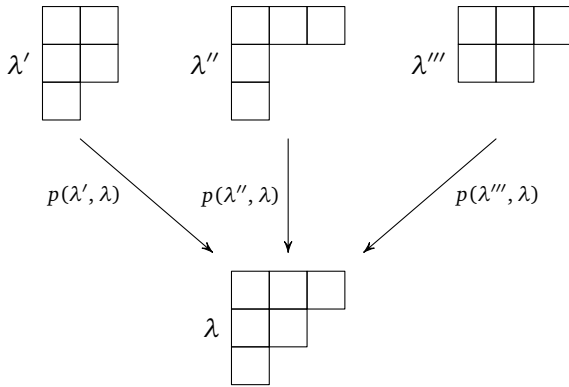


Рис. 11. Марковское свойство для меры Планшереля

которая на языке теории представлений утверждает, что сумма квадратов размерностей неприводимого представления симметрической группы равна порядку группы.

Обозначим символом $r_1(\lambda_N)$ длину первой строки диаграммы λ_N . Следующая теорема устанавливает асимптотику среднего значения $r_1(\lambda_N)$ диаграмм одного размера.

Напомним, что математическое ожидание $\mathbb{E}[r_1(\lambda_N)]$ длины первой строки диаграмм размера N относительно меры Планшереля μ — это, по определению,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_N} \mu(\lambda) \cdot r_1(\lambda).$$

Теорема 2. Для математического ожидания $\mathbb{E}[r_1(\lambda_N)]$ длины первой строки диаграмм размера N относительно меры Планшереля справедливо неравенство

$$\mathbb{E}[r_1(\lambda_N)] < 2\sqrt{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь в графе Юнга, начинающийся с самой верхней одноклеточной диаграммы $\lambda(1)$. Очевидно, любой такой путь длины N можно однозначно записать в виде последовательности¹

$$(\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \dots, \lambda(N-1), \lambda(N)). \quad (6.5)$$

¹При таком обозначении $\lambda(k)$ получается, что индекс k играет двойную роль, соответствуя и номеру диаграммы в последовательности, и ее размеру.

Какова будет длина первой строки конечной диаграммы $\lambda(N)$? Нетрудно заметить, что она будет в точности равняться числу таких переходов

$$\dots, \lambda(k-1), \lambda(k), \dots,$$

что диаграмма $\lambda(k)$ получается из $\lambda(k-1)$ добавлением клетки именно в первую строку. Таким образом, каждой последовательности (6.5) можно поставить в соответствие двоичную последовательность из нулей и единиц

$$(\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \dots, \lambda(N-1), \lambda(N)) \mapsto (1, 0, 1, \dots, 0, 1),$$

где 1 на k -м месте будет означать, что диаграмма $\lambda(k)$ получена из предыдущей диаграммы добавлением клетки в первую строку, а 0 — добавлением клетки в любую другую строку. Но тогда среднее значение длины первой строки диаграмм размера N будет определяться как среднее значение суммы элементов всех двоичных последовательностей длины N , соответствующих путям в графе Юнга.

Если теперь обозначить символом p_k вероятность того, что в бинарной последовательности на k -м месте будет стоять единица, то среднее значение длины первой строки можно будет записать как

$$\mathbb{E}[r_1(\lambda_N)] = \mathbb{E}[r_1(\lambda(N))] = 1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N. \quad (6.6)$$

С другой стороны, вероятность p_k можно вычислить как

$$p_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} \mu^{(k-1)}(\lambda) \cdot p(\lambda, \tilde{\lambda}),$$

где $\tilde{\lambda}$ — единственная диаграмма, получающаяся из λ добавлением клетки в первую строку. Но тогда

$$p_k^2 \leq \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} (\mu^{(k-1)}(\lambda))^2 p(\lambda, \tilde{\lambda})^2 \leq \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} \mu^{(k-1)}(\lambda) p(\lambda, \tilde{\lambda})^2 = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} \frac{\mu^{(k)}(\tilde{\lambda})}{k} < \frac{1}{k},$$

где мы использовали тот факт, что

$$p^2(\lambda, \tilde{\lambda}) = \frac{\mu^{(k)}(\tilde{\lambda})}{k \cdot \mu^{(k-1)}(\lambda)},$$

немедленно следующий из определения меры Планшереля (1.1) и формулы для переходных вероятностей (6.3). Таким образом, оказывается, что $p_k < 1/\sqrt{k}$, и поэтому, согласно (6.6), получаем, что

$$\mathbb{E}[r_1(\lambda_N)] < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} < 2\sqrt{N},$$

где последнее неравенство легко доказывается по индукции.

Теорема доказана. \square

Очевидно, что в силу симметричности диаграмм в графе Юнга среднее значение длины первой строки будет в свою очередь равно и среднему значению длины первого столбца. Таким образом, доказанная теорема дает верхнюю оценку этих средних, взятых по всем диаграммам Юнга размера N . Возможно ли сформулировать подобный результат для нижней оценки?

Оказывается, да. Заметим, что если $\frac{r_1(\lambda)}{2\sqrt{N}} \leq b < 1$, то $L_\lambda(b) = b \neq \Omega(b)$, и потому отклонение $|(L_\lambda - \Omega)(b)|$ оценено снизу не зависящей от N положительной константой $|b - \Omega(b)|$. Но мы уже доказали ранее, что для существенных диаграмм такое невозможно. Поэтому мы можем заключить, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_1(\lambda_N)}{2\sqrt{N}} \geq 1$, где λ_N пробегает множество *существенных* диаграмм размера N .

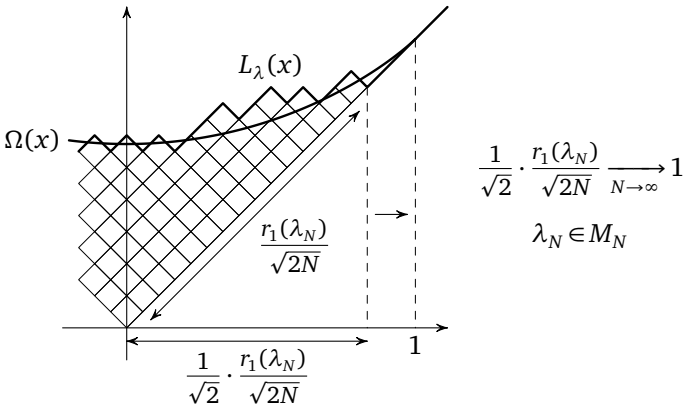


Рис. 12. Соотношение длины первой строки и графиков функций

Таким образом, мы доказали утверждение, которое на языке теории вероятностей можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Длина первой строки случайной диаграммы большого размера N с близкой к 1 вероятностью будет близка к $2\sqrt{N}$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\{|r_1(\lambda_N) - 2\sqrt{N}| < \varepsilon\sqrt{N}\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1. \quad (6.7)$$

Как оказалось, именно свойство (6.7) стало главным звеном в решении знаменитой проблемы Улама, которой и посвящен следующий (и последний) параграф.

§7. Решение Вершика—Керова проблемы Улама

Начнем с примера и рассмотрим произвольную перестановку σ из 8 символов

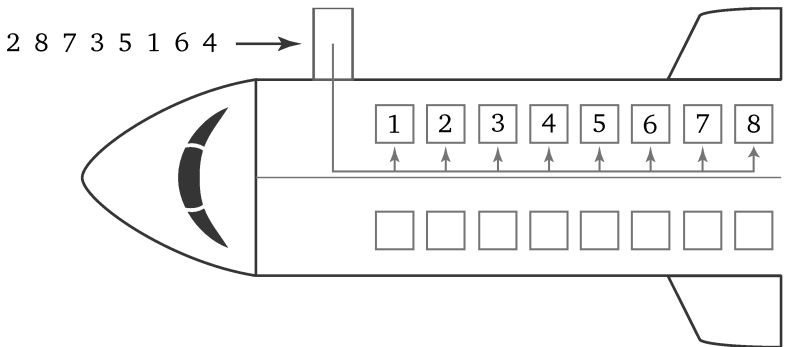
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

которая означает, что $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 6$ и так далее. Последовательность из восьми чисел второй строки, которой определяется σ , содержит внутри себя подпоследовательности, например

$$(4 \ 6 \ \underline{1} \ 5 \ \underline{3} \ \underline{7} \ \underline{8} \ 2), \quad (4 \ \underline{6} \ 1 \ 5 \ 3 \ \underline{7} \ \underline{8} \ 2)$$

Обе выбранные в качестве примера подпоследовательности являются возрастающими и имеют длину, равную четырем. Причем очевидно, что для перестановки σ возрастающих подпоследовательностей большей длины не существует. Но какой смысл могут нести такие монотонные подпоследовательности?

Рассмотрим следующую модель посадки пассажиров на борт самолета. Предположим, что нумерация мест начинается со входа и пассажиры с соответствующими билетами заходят в самолет в порядке, определенном перестановкой σ . Пусть каждый пассажир при посадке на свое место, чтобы положить свой багаж на полку, вынужден задерживать в проходе идущих за ним пассажиров на время t . Какова будет задержка по времени всей посадки?



В нашем случае первым будет идти пассажир с местом 4. Подойдя к своему месту, он будет вынужден задержать следующего за ним пассажира с местом 6 на время t . Идущий следом пассажир с местом 1 не будет задержан, поскольку его место находится ближе ко входу. С другой стороны, хотя он и задержит идущего за ним пассажира с местом 5,

мы будем считать, что эта задержка совпадет по времени с той, которую мы уже учли.

После первой задержки, идущие следом пассажиры 5 и 3, очевидно, без помех подходят к своим местам и начинают устраивать свой багаж. Очередь останавливается за пассажиром 3, тем самым увеличивая задержку до времени $2t$.

Наконец, после второй задержки пассажир 7, подойдя к своему месту, остановит пассажира 8, в то время как идущий последним пассажир 2 займет свое место без препятствий. Таким образом, мы получаем общую задержку по времени, равную $3t$.

Если теперь мы воспроизведем номера пассажиров, следующих за теми, кто инициировал задержки, то мы получим последовательность

$$(4\ 6\ 7\ 8),$$

в которую мы условно добавили пассажира, идущего первым. Но, как оказалось, получившаяся последовательность — одна из максимальных возрастающих подпоследовательностей, соответствующих перестановке σ . Такое совпадение не случайно, и, приняв во внимание использовавшуюся идею, можно легко убедиться в том, что время задержки при любом заданном порядке пассажиров будет всегда на единицу меньше длины максимальной возрастающей подпоследовательности, соответствующей перестановке σ . Далее будем обозначать длину такой максимальной подпоследовательности как $\mathcal{L}(\sigma)$.

В 1961 году Улам поставил вопрос, который можно сформулировать следующим образом.

Как быстро будет расти среднее значение длин максимальных возрастающих подпоследовательностей перестановок из N элементов?

При этом на основе экспериментальных данных была высказана гипотеза, что это значение будет соответствовать росту $2\sqrt{N}$. Решение же этого вопроса оказалось прямым следствием полученной Вершиком и Керовым верхней оценки для длины первой строки, результата, сформулированного в виде теоремы в предыдущем параграфе. Оказывается, существует связь между максимальными длинами возрастающих последовательностей и диаграммами Юнга размера N , отвечающим перестановкам из N символов. А именно, каждая перестановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

на самом деле задает порядок построения одной из диаграмм Юнга размера N , то есть соответствует уникальному пути в графе Юнга. Такой алгоритм построения, называемый алгоритмом Робинсона—Шен-

стеда—Кнута (RSK), можно неформально описать следующим образом (см. также книгу [5]).

Таблица Юнга из N клеток строится из пустой таблицы путем добавления новых клеток с номерами. При этом пошагово рассматриваются все числа a_i заданной перестановки, которые добавляются в качестве клеток с соответствующими номерами справа в первую строку таблицы. Если в строке обнаруживаются клетки с номерами, большими текущего номера a_i , то выбирается клетка с наименьшим таким номером. В нее записывается значение a_i , а предыдущее значение добавляется справа как клетка к следующей строке. Если же и в следующей строке оказываются клетки с большими номерами, то данный процесс повторяется.

Таким образом, каждая перестановка σ будет определять по крайней мере одну из таблиц Юнга заданной формы. Тем не менее, вспоминая, что число элементов симметрической группы равно $n!$, а число заполнений таблицы заданной формы из-за ограничений на возрастание номеров по строкам и столбцам всегда будет меньшим¹, легко увидеть, что такое соотношение не будет взаимно однозначным. В частности, нескольким различным перестановкам может соответствовать одна и та же таблица Юнга.

Оказывается, для взаимной однозначности каждой перестановке σ нужно поставить в соответствие не только таблицу T_1 , которую она определяет, но и таблицу T_2 порядка появления новых клеток. Такое взаимно однозначное соответствие между перестановками σ и парами таблиц Юнга (T_1, T_2) называют *RSK-соответствием*. При этом обе таблицы T_1 и T_2 будут иметь одинаковую форму, которую мы обозначим символом T_σ . Доказательство взаимной однозначности RSK-соответствия можно найти в приложении Б.

Так как RSK-соответствие взаимно однозначно, при соответствии $\sigma \mapsto T_\sigma$ в каждую диаграмму Юнга λ переходит ровно $(\dim \lambda)^2$ перестановок. Другими словами, RSK-соответствие переводит равномерную меру на перестановках в меру Планшереля на диаграммах Юнга!

Наконец, следующая теорема объясняет, как извлечь ответ на вопроса Улама из результатов предыдущего параграфа.

Теорема 4 (Шенстед, 1961). *Длина $\mathcal{L}(\sigma)$ максимальной возрастающей последовательности перестановки σ определяется длиной первой строки $r_1(T_\sigma)$ соответствующей ей по RSK диаграмме Юнга T_σ .*

(Изучив приложение Б, читатель может попробовать доказать эту теорему самостоятельно. Подробное же доказательство можно найти в книге [5].)

¹Естественно, за исключением явно вырожденных случаев $n=0$ и $n=1$.

Действительно, применяя RSK-соответствие к утверждению теоремы 3, мы получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\{|\mathcal{L}(\sigma) - 2\sqrt{N}| < \varepsilon\sqrt{N}\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1,$$

то есть длина максимальной возрастающей подпоследовательности перестановки большой длины N с близкой к 1 вероятностью будет близка к $2\sqrt{N}$.

Приложение А

Формула крюков

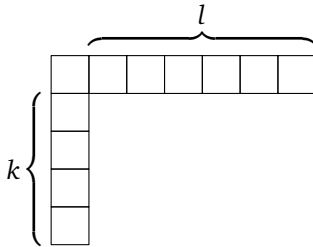
(В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон)

Напомним, что *размерностью* диаграммы Юнга λ называется количество стандартных таблиц формы λ или, что то же самое, количество путей в вершину λ в графе Юнга. В данном разделе будет объяснено, как при помощи метода отражений получить некоторую мультипликативную формулу для размерности произвольной диаграммы.

Впервые метод отражений для решения этой задачи был применен Д. Зильбергером в заметке [18], сам метод отражений восходит к статье Д. Андрэ [9]. Существует и множество других доказательств формулы крюков. Доступное изложение на русском языке одного из них можно найти в статье [6].

Второй автор благодарен М. А. Берштейну за полезные обсуждения.

А.1. У этой задачи есть как минимум один хорошо известный частный случай. А именно, посмотрим на диаграмму Юнга в виде уголка с «плечами» k и l .

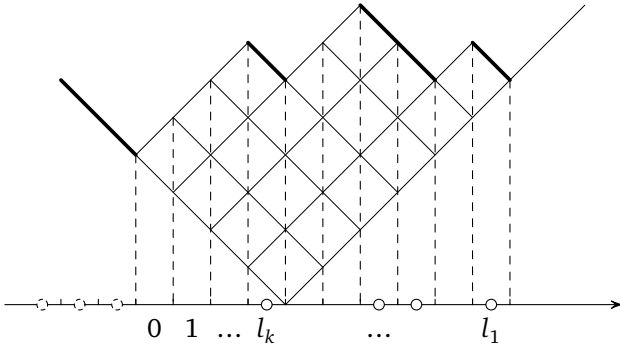


Нетрудно понять, что размерность такой диаграммы есть число путей из точки $(0, 0)$ в точку (k, l) , в которых каждый шаг является сдвигом на 1 по одной из координат. С другой стороны, количество таких путей дается биномиальным коэффициентом $\binom{k+l}{k}$, для которого есть явная формула: $\binom{k+l}{k} = \frac{(k+l)!}{k!l!}$.

Формулу для размерности произвольной диаграммы, которую мы получим, можно рассматривать как некое обобщение приведенного выше утверждения о биномиальных коэффициентах.

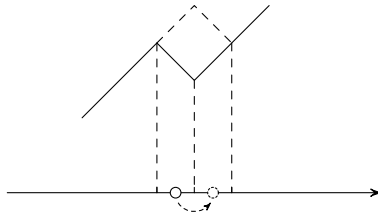
А.2. Диаграмма Юнга задается формой своей границы, т. е. последовательностью вертикальных и горизонтальных отрезков. Вместо последовательности отрезков рассмотрим последовательность пронумерованных ячеек: в ячейки, соответствующие вертикальным отрезкам,

поместим по шарик, остальные ячейки оставим пустыми.



Другими словами, каждой строке диаграммы поставим в соответствие по шарик, находящемуся в ячейке с номером $l_i := \lambda_i + k - i$.

Добавлению к диаграмме клетки соответствует перемещение одного из шариков на одну ячейку вправо (и эта ячейка должна быть свободна).



Поэтому задачу нахождения размерности диаграммы λ можно переформулировать следующим образом.

В клетках с номерами $0, 1, \dots, k - 1$ находится по шарик. За ход разрешается сдвинуть один из шариков на клетку вперед, если эта клетка свободна. Сколькими способами можно перевести шарики в клетки l_k, l_{k-1}, \dots, l_1 ?

Это уже довольно близко к задаче, которую мы можем решить. А именно, если бы разрешалось сдвигать шарики в уже занятые клетки, то ответ давался бы мультиномиальным коэффициентом

$$\binom{N}{l_1 - (k - 1), l_2 - (k - 2), \dots, l_k} = \frac{N!}{(l_1 - k + 1)! (l_2 - k + 2)! \dots l_k!}$$

(считаем, что шарики пронумерованы и каждый шарик в конце должен оказаться на своем месте; N — общее количество клеток диаграммы). Остается учесть то, что шарикам запрещено занимать одну клетку. Сделать это можно при помощи *метода отражений*.

А.3. Проще всего разобраться в том, как работает метод отражений, на примере двух шариков (т. е. диаграмм из двух строк).

Пусть при движении два шарика в какой-то момент оказались в одной клетке. Поменяем в *первый такой момент* местами их номера. Тогда в конце пути шарики все равно окажутся в клетках l_1 и l_2 , но каждый попадет в «чужую» клетку. И наоборот, если в конце пути шарики оказались в нужных клетках но в неправильном порядке, то в какой-то момент их пути обязательно пересеклись.

Значит, среди $\binom{N}{l_1-1, l_2}$ путей есть ровно $\binom{N}{l_1, l_2-1}$ «незаконных», а искомая размерность есть

$$\binom{N}{l_1-1, l_2} - \binom{N}{l_1, l_2-1}.$$

Можно заметить, кстати, что размерность диаграммы Юнга, представляющей собой прямоугольник $2 \times n$, есть n -е число Каталана c_n . А мы, таким образом, только что доказали известную формулу для чисел Каталана¹

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

А.4. Оказывается, подобная формула есть для любого количества шариков. А именно, нужно взять всевозможные перестановки конечных положений шариков и просуммировать соответствующие количества путей, беря каждое слагаемое со знаком соответствующей перестановки. (Доказательство этого утверждения оставляется читателям в качестве упражнения.)

Предложение. Для произвольной диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

$$\dim \lambda = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \binom{N}{l_1 - (\sigma(k) - 1), \dots, l_k - (\sigma(1) - 1)},$$

где $l_i = \lambda_i + k - i - 1$.

(Указание: чтобы доказать, что все «незаконные» пути в правой части сокращаются, рассмотрите первый момент, в который два шарика оказались в одной ячейке.)

А.5. Последняя формула наводит на мысли об определителе. И действительно, нетрудно понять, что

$$\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \binom{N}{l_1 - \sigma(k) + 1, \dots, l_k - \sigma(1) + 1} = N! \det \left(\frac{1}{(l_{k-j+1} + 1 - i)!} \right).$$

¹Существует много способов определить числа Каталана. Например, как число способов разбить выпуклый $(n+2)$ -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями или как число путей на квадратной решетке из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , не опускающихся ниже диагонали $y = x$.

Чтобы сделать элементы матрицы целочисленными, вынесем общий знаменатель $l_i!$ каждого из столбцов за скобки. Получим, что

$$\dim \lambda = \frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!} \cdot \det V'_l,$$

где

$$V'_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{l_k!}{(l_k-1)!} & \frac{l_{k-1}!}{(l_{k-1}-1)!} & \dots & \frac{l_1!}{(l_1-1)!} \\ \frac{l_k!}{(l_k-2)!} & \frac{l_{k-1}!}{(l_{k-1}-2)!} & \dots & \frac{l_1!}{(l_1-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{l_k!}{(l_k-k+1)!} & \frac{l_{k-1}!}{(l_{k-1}-k+1)!} & \dots & \frac{l_1!}{(l_1-k+1)!} \end{pmatrix},$$

или, что то же самое,

$$V'_l = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ l_k & \dots & l_1 \\ l_k(l_k-1) & \dots & l_1(l_1-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_k(l_k-1)\dots(l_k-k+2) & \dots & l_1(l_1-1)\dots(l_1-k+2) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что преобразованиями строк, которые не меняют определителя, можно превратить эту матрицу в *матрицу Вандермонда*

$$V_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ l_k & l_{k-1} & \dots & l_1 \\ l_k^2 & l_{k-1}^2 & \dots & l_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_k^{k-1} & l_{k-1}^{k-1} & \dots & l_1^{k-1} \end{pmatrix},$$

определитель которой хорошо известен¹: $\det V_l = \prod_{i < j} (l_i - l_j)$.

¹Впрочем, можно и не делать никаких преобразований строк, а просто заметить, что вычисление определителя матрицы Вандермонда без изменений проходит и для матрицы V'_l . Действительно, $\det V'_l$ обращается в ноль при $l_i = l_j$, а потому многочлен $\det V'_l$ делится на многочлен $\prod_{i < j} (l_i - l_j)$; но так как степени этих многочленов равны, они отличаются только умножением на константу. А чтобы убедиться, что эта константа равна единице, можно сравнить коэффициент при каком-то одном мономе (например, при $l_1^{k-1} l_2^{k-2} \dots l_{k-1}$).

А.6. Таким образом, мы получили следующую формулу.

Теорема (формула Фробениуса—Юнга). *Размерность произвольной диаграммы Юнга с длинами строк $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ может быть найдена по формуле*

$$\dim \lambda = N! \cdot \frac{\prod_{i < j} (l_i - l_j)}{l_1! \dots l_k!},$$

где N — количество клеток диаграммы, а $l_i = \lambda_i + k - i$.

Это уже фактически и есть нужная нам формула, но обычно ее записывают несколько в другом виде.

Теорема (формула крюков). *Размерность диаграммы Юнга λ может быть найдена по формуле*

$$\dim \lambda = \frac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)},$$

где N — количество клеток диаграммы, а $h(\square)$ — длина крюка данной клетки.

Доказательство. Посмотрим на произведение длин крюков клеток i -й строки. В этом произведении самый большой из сомножителей равен в точности числу l_i , а соседние сомножители обычно отличаются на 1 — но в тех местах, где кончается одна из строк ниже, возникают «дырки». Отсюда видно (проверьте!), что произведение длин крюков i -й строки есть

$$\frac{l_i!}{\prod_{j: i < j} (l_i - l_j)},$$

и формула превращается в доказанную в предыдущей теореме. □

Приложение Б RSK-соответствие

(Я. М. Сергиенко)

Докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между перестановками g множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и упорядоченными парами таблиц Юнга (S, T) одинаковой формы из n клеток¹.

Предъявим это соответствие. Мы построим пару (S, T) из перестановки g , которую мы рассмотрим в виде

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Таблица S будет построена из пустой таблицы за n шагов. На k -м шаге будет происходить «вставка» числа a_k в первую строку.

Операция «вставка числа a в строку l » происходит следующим образом. Если a больше всех чисел l -й строки, то добавим a в конец l -й строки (мы предполагаем, что числа, равного a , в этой строке нет). Иначе из всех чисел l -й строки, больших a , выберем наименьшее число b и поставим вместо него a . Затем проведем вставку числа b в следующую строку.

Алгоритм остановится, так как число строк конечно. Тогда в результате k -го шага к одной из строк таблицы добавится одна клетка, а количеству чисел таблицы добавится a_k , но числа будут переставлены.

Докажем по индукции по номеру шага, что для всех таблиц построения выполнены два свойства:

1. При движении сверху вниз длины строк не возрастают.

2. При движении сверху вниз и слева направо числа в клетках таблицы возрастают.

База для пустой таблицы очевидна. Переход докажем следующим образом. Из предположения индукции (то есть свойств 1 и 2) следуют два вспомогательных утверждения:

3. Если число некоторой строки больше всех чисел следующей, то эти строки не могут иметь одинаковую длину.

4. Наименьшее из чисел следующей строки, больших числа в клетке a , находится ниже и левее a .

С помощью этих утверждений можно доказать, что свойства 1 и 2 сохраняются после операции «вставка в первую строку» (и всех следующих из нее операций), и, следовательно, после каждого шага.

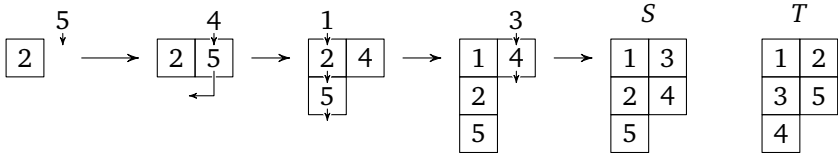
¹Доказательство в целом следует книге [12].

После последнего шага S является таблицей Юнга, так как числа в ней являются последовательными натуральными (из определения перестановки) и выполняются свойства 1 и 2.

В каждую клетку таблицы T , имеющей форму S , запишем номер шага, на котором соответствующая ей клетка добавилась к таблице S (на числа в клетках мы не обращаем внимания). Как известно, T также является таблицей Юнга.

Осталось доказать, что любой упорядоченной паре таблиц (S, T) одинаковой формы соответствует ровно одна перестановка g .

Заметим, что если b — наименьшее из всех чисел строки, большее a , то после замены b на a число a будет наибольшим из чисел строки, меньших b . Поэтому операция «вставка» обратима. Следовательно, зная результат k -го шага и позицию клетки, добавлением которой он закончился, можно восстановить исходное расположение чисел и добавленное число a_k . Так, начиная с таблицы S и получая позиции добавленных клеток из таблицы T , мы однозначно восстановим перестановку g .



Литература

- [1] *Вершик А. М.* Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации // Функци. анализ и его прил. 1996. Т. 30, вып. 2. С. 19—39.
- [2] *Вершик А. М., Керов С. В.* Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга // Доклады Академии Наук СССР. 1977. Т. 223, вып. 6. С. 1024—1027.
- [3] *Вершик А. М., Керов С. В.* Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы // Функци. анализ и его прил. 1985. Т. 19, вып. 1. С. 25—36.
- [4] *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973.
- [5] *Кнут Д.* Искусство программирования. Т. 3. Сортировка и поиск. М.: Вильямс, 2007.
- [6] *Спивак А. В.* Формула крюков // Квант. 2009. № 3. С. 44—47.
- [7] *Ширяев А. Н.* Вероятность — 2. М.: МЦМНО, 2007.
- [8] *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
- [9] *André D.* Solution directe du problème résolu par M. Bertrand // C. R. Acad. Sci. Paris. 1887. V. 105. P. 436—437.
- [10] *Baik J., Deift P., Johansson K.* On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12, № 4. P. 1119—1178.
- [11] *Borodin A., Okounkov A., Olshanski G.* Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups // J. Amer. Math. Soc. 2000. V. 13, № 3. P. 481—515.
- [12] *Cameron P. J.* Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms. New York: Cambridge University Press, 1994.
- [13] *Johansson K.* Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure // Ann. of Math. 2001. V. 153, № 2. P. 259—296.
- [14] *Logan B. F., Shepp L. A.* A variational problem for random Young tableaux // Adv. Math. 1977. V. 26. P. 206—222.
- [15] *Okounkov A.* Random matrices and random permutations // Internat. Math. Res. Notices. 2000. № 20. P. 1043—1095.
- [16] *Tracy C. A., Widom H.* Level-spacing distributions and the Airy kernel // Commun. Math. Phys. 1994. V. 161, № 2. P. 151—174.

- [17] *Wigner E.* On the distribution of the roots of certain symmetric matrices // *Ann. of Math.* 1958. V. 67. P. 325—328.
- [18] *Zeilberger D.* André's reflection proof generalized to the many-candidate ballot problem // *Discrete Math.* 1983. V. 44. P. 325—326.

Оглавление

Предисловие	3
§ 1. Диаграммы Юнга	6
§ 2. Интеграл крюков	10
§ 3. Экстремаль интеграла крюков	18
§ 4. Экстремальное свойство функции Ω	21
§ 5. Существенные диаграммы Юнга и теорема о предельной форме	30
§ 6. Оценка длины первой строки	35
§ 7. Решение Вершика—Керова проблемы Улама	42
Приложение А. Формула крюков (В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон)	46
Приложение Б. RSK-соответствие (Я. М. Сергиенко)	51
Литература	52

*Александр Игоревич Буфетов
Михаил Валентинович Житлухин
Никита Евгеньевич Козин*

ДИАГРАММЫ ЮНГА И ИХ ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 12.02.2013 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 3,5. Тираж 1000. Заказ .

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru
