ГЛАВА 3.
РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАДРАТУРАХ И ТЕОРИЯ ПИКАРА–ВЕССИО

Пикар обратил внимание на аналогию между линейными дифференциальными уравнениями и алгебраическими уравнениями и начал строить дифференциальный аналог теории Галуа. Венцом этой теории является теорема Пикара–Вессио, в которой вопрос о разрешимости или неразрешимости линейного дифференциального уравнения связывается с вопросом о разрешимости или неразрешимости группы Галуа уравнения, являющейся алгебраической группой Ли.

В этой главе подробно рассказывается о простейших расширениях Пикара–Вессио и об аналогии между линейными дифференциальными уравнениями и алгебраическими уравнениями. Формулируются основные теоремы теории Пикара–Вессио. Обсуждается линейно-алгебраическая часть теории, нужная для постоения явных решений дифференциальных уравнений типа Фукса (см. §1 главы 6). Формулируется критерий Колчина, позволяющий дать явные критерии различных видов разрешимости для систем дифференциальных уравнений типа Фукса с достаточно малыми коэффициентами (см. §2 главы 6).

§1. Аналогия между линейными дифференциальными уравнениями и алгебраическими уравнениями

Напомним простейшие свойства линейных дифференциальных уравнений и их аналоги для алгебраических уравнений.

1.1. Деление с остатком и наибольший общий делитель дифференциальных операторов. *Линейным дифференциальным оператором порядка* n над дифференциальным полем K называется оператор $L = a_n D^n + \cdots + a_0$, где $a_i \in K$ и $a_n \neq 0$, действующий на элементы y поля K по формуле

$$L(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y.$$

Для операторов L_1 и L_2 над K их произведение $L = L_1 \circ L_2 = L_1(L_2)$, тоже является оператором над K. Произведение операторов, вообще говоря, некоммутативно, но в старшем члене эта некоммутативность не проявляется. $L = a_n D^n + \ldots$ *для* $L = L_1 \circ L_2$ *равен* $b_m c_k D^{m+k}$, *где* $b_m D^m$ *и* $c_k D^k$ — *старшие члены операторов* L_1 *и* L_2.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Для операторов L и L_2 порядков n и k над K существуют и единственны операторы L_1 и R над K, такие, что $L = L_1 \circ L_2 + R$ и порядок оператора R строго меньше чем k. Оператор R называется *остатком от деления справа* оператора L на оператор L_2. Операторы L_1 и R строятся по операторам L и L_2 явно: алгоритм деления операторов с остатком основан на приведенной выше формуле для старшего члена произведения операторов и абсолютно аналогичен алгоритму деления с остатком полиномов от одной переменной.

Для любых двух операторов L_1 и L_2 над K можно явно найти их правый наибольший общий делитель N, т.е. оператор N над K наибольшего возможного порядка, который делит справа операторы L_1 и L_2, т.е. $L_1 = M_1 \circ N$ и $L_2 = M_2 \circ N$, где M_1 и M_2 — некоторые операторы над K. Нахождение операторов M_1, M_2 и N по операторам L_1 и L_2 абсолютно аналогично алгоритму Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух полиномов от одной переменной и основано на алгоритме деления операторов с остатком. Как и в коммутативном случае, наибольший общий делитель N представим в виде $N = AL_1 + BL_2$, где A, B — некоторые операторы над K.

Ясно, что y является решением уравнения $N(y) = 0$, если и только если $L_1(y) = 0$ и $L_2(y) = 0$.

1.2. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения как аналог теоремы Безу. Пусть L — линейный дифференциальный оператор над K, y_1 — ненулевой элемент поля K, $p = \dfrac{y_1'}{y_1}$ — его логарифмическая производная и $L_2 = D - p$ — оператор первого порядка, анулирующий y_1. Остаток R от деления справа L на L_2 является оператором умножения на c_0, где $c_0 = \dfrac{1}{y_1} L(y_1)$. Действительно, нужное равенство получается при подстановке $y = y_1$ в тождество $L(y) \equiv L_1 \circ L_2(y) + c_0 y$. Оператор L делится справа на оператор L_2, если и только если элемент y_1 удовлетворяет тождеству $L(y_1) \equiv 0$.

Используя ненулевое решение y_1 уравнения n-го порядка $L(y) = 0$, можно понизить порядок этого уравнения. Для этого надо представить оператор L в виде $L = L_1 \circ L_2$, где L_1 — оператор $(n-1)$-го порядка. *Коэффициенты оператора L_1 лежат в расширении дифференциального поля K логарифмической производной p элемента y_1.* Если известно любое решение u уравнения $L_1(u) = 0$, то по нему можно построить некоторое решение y исходного уравнения $L(y) = 0$. Для этого достаточно решить уравнение $L_2(y) = y' - py = u$. Описанная процедура называется *понижением порядка дифференциального уравнения.*

Замечание. Оператор, анулирующий y_1, определен с точностью до умножения на произвольную функцию, и от выбора этой функции зависит процедура понижения порядка. Легче делить на оператор $\tilde{L}_2 = D \circ y_1^{-1}$, являющийся композицией умножения на элемент y_1^{-1} и дифференцирования. Для этого достаточно вычислить оператор $L_3 = L \circ y_1$, являющийся

композицией умножения на элемент y_1 и оператора L. Оператор L_3 делится справа на D, т.е. $L_3 = \tilde{L}_1 \circ D$, т.к. $L_3(1) \equiv L \circ y_1(1) \equiv 0$. Видно, что $L = \tilde{L}_1 \circ \tilde{L}_2$. Исходное уравнение $L(y) = 0$ сводится к уравнению $\tilde{L}_1(u) = 0$ меньшего порядка. Обычно именно такую процедуру понижения порядка приводят в учебниках по дифференциальным уравниям. Отметим, что коэффициенты оператора $\tilde{L}_1$ лежат в расширении дифференциального поля K самим элементом y_1, а не его логарифмической производной p, что иногда делает оператор $\tilde{L}_1$ менее удобным, чем оператор L_1.

В алгебре есть следующие аналоги приведенных фактов: 1) остаток от деления полинома P переменной x на $(x-a)$ равен значению полинома P в точке a (теорема Безу); 2) если известно одно решение x_1 уравнения $P(x) = 0$, то его степень можно понизить, остальные корни полинома P удовлетворяют уравнению меньшей степени $Q(x) = 0$, где $Q = P\colon (x - x_1)$. Кроме аналогии здесь имеется и отличие: решения дифференциального уравнения, полученного процедурой понижения порядка, вообще говоря, не являются решениями исходного уравнения.

Замечание. Экспоненты являются собственными функциями дифференциальных операторов $P(D)$ с постоянными коэффициентами. Этот факт эквивалентен теореме Безу. Действительно, если $P = Q(x-a) + P(a)$, то $P(D) = Q(D) \circ (D - a) + P(a)$. Поэтому решение y_1 дифференциального уравнения $(D-a)y = 0$ является собственным вектором оператора $P(D)$ с собственным числом $P(a)$.

1.3. Общее линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и резольвенты Лагранжа. Покажем, что решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами аналогично решению алгебраического уравнения в радикалах (см. §1 главы 2).

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(D) = D^n - a_{n-1}D^{n-1} - \cdots - a_0 E$ с постоянными комплексными коэффициентами $a_{n-1}, \ldots, a_0$. Пусть характеристический полином $T(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_0$ этого оператора имеет ровно n различных комплексных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда линейное дифференциальное уравнение $L(y) = 0$ решается явно при помощи обобщенных резольвент Лагранжа. Резольвенты Лагранжа используются здесь точно также, как при решении алгебраических уравнений в радикалах. Обсудим это подробнее.

Рассмотрим векторное пространство V решений уравнения

$$L(D) = y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y = 0 \tag{10}$$

Ясно, что оператор диффернцирования D переводит пространстве V в себя. Оператор $D : V \to V$ удовлетворяет уравнению $T(D) = 0$. Обозначим через $T_i(D)$ обобщенную резольвенту Лагранжа опрератора $D : V \to V$, соответствующую корню λ_i (см. п. 1.3 главы 2).

Теорема 1.1. *Всякое решение y уравнения (10) является суммой своих обобщенных резольвент Лагранжа: $y = y_{(\lambda_1)} + \cdots + y_{(\lambda_n)}$. Обобщенная резольвента*

Лагранжа $y_{\lambda_i} = P_{(\lambda_i)}(D)y$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* $y'_{\lambda_i} = \lambda_i y_{\lambda_i}$

Доказательство. Теорема 1.1 немедленно следует из утверждения1.4 главы 2.

Итак, обобщенные резольвенты Лагранжа позволяют сводить общее уравнение (10), для которого характеристическое уравнение имеет простые корни, к уравнениям $y'_{\lambda_i} = \lambda_i y_{\lambda_i}$.

Удобное обозначение. Пусть $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k$ — полином над полем $\mathbb{C}$ и $u_0, \ldots, u_k$ — последовательность комплексных чисел. *Комплексное число* $(a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) \in M$ *удобно обозначать сиволом* $Q\langle u_0, \ldots, u_k\rangle$.

Используя это обозначение, можно написать формулу для решения y уравнения (10), имеющего следующие начальные данные: $y(t_0) = y_0, \ldots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}$.

Следствие 1.2. *Решение сформулированной выше задачи Коши задается следующей формулой*

$$y(t) = \sum_{1 \le i \le n} P_{(\lambda_i)}\langle y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\rangle \exp \lambda_i (t - t_0)$$

Используя интерполяционные полиномы с кратными узлами интерполирования, можно написать явные формулы для решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет кратные корни (см. [X 12]).

1.4. Аналог формул Виета для дифференциальных операторов. Если известны все корни $x_1, \ldots, x_n$ полинома P степени n со старшим коэффициентом 1, то полином P можно восстановить: по формулам Виета $P(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$, где $p_1 = -\sigma_1, \ldots, p_n = (-1)^n \sigma_n$ и $\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n, \ldots, \sigma_n = x_1 \ldots x_n$. Функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ не меняются при перестановке корней и называются основными симметрическими функциями.

Аналогично этому, если известны n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ линейного дифференциального уравнения n-го порядка $L = 0$, где L — оператор, у которого коэффициент при старшей производной равен единице, то оператор L можно восстановить. Действительно, прежде всего такой оператор не более чем один: разность $L_1 - L_2$ двух операторов, обладающих этими свойствами, является оператором порядка $< n$, имеющим n линейно независимых решений, что возможно лишь если L_1 совпадает с L_2.

Вронскиан W от n независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ линейного дифференциального уравнения не равен нулю. Рассмотрим уравнение $W(y, y_1, \ldots, y_n) = 0$, где $W(y, y_1, \ldots, y_n)$ — вронскиан от неизвестной функции y и функций $y_1, \ldots, y_n$. Расскрывая вронскиан

$$W(y, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y & y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

по первому столбцу и деля его на W, получим уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0, \tag{11}$$

в котором $p_1 = -\varphi_1, \ldots, p_n = (-1)^n \varphi_n$, где

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W}, \ldots, \varphi_n = \frac{\begin{vmatrix} y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W}. \tag{12}$$

Функции $y_1, \ldots, y_n$ и их линейные комбинации является решениями уравнения (11). Формулы (11–12) вполне аналогичны формулам Виета.

Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются рациональными функциями от функций $y_1, \ldots, y_n$ и от их производных до порядка n. Эти функции зависят лишь от линейного пространства V, натянутого на функции $y_1, \ldots, y_n$, но не зависят от выбора конкретного базиса $y_1, \ldots, y_n$ в пространстве V. Другими словами, функции $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ являются $GL(V)$ инвариантными функциями от $y_1, \ldots, y_n$ и от их производных. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ будем называть *основными дифференциальными инвариантами* от $y_1, \ldots, y_n$.

1.5. Аналог теоремы о симметричных функциях для дифференциальных операторов. Как известно из алгебры, всякая рациональная функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, не меняющаяся при перестановках переменных, на самом деле является рациональной функцией основных симметрических функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$. Другими словами, всякое рациональное выражение, симметрично зависящее от корней полинома степени n, рационально выражается через коэффициенты этого полинома.

Аналогичная теорема для линейных дифференциальных уравнений была открыта Пикаром.

Теорема 1.3. *Всякая рациональная функция R от линейно независимых функций $y_1, \ldots, y_n$ и их производных, которая является $GL(V)$-инвариантной,* (т.е. которая не изменится, если функции $y_1, \ldots, y_n$ заменить их линейными комбинациями $z_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \ldots, z_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n$ при условии того, что матрица $A = \{a_{ij}\}$ невырождена) *на самом деле является рациональной функцией от основных дифференциальных инвариантов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ функций $y_1, \ldots, y_n$ и от производных этих инвариантов.*

Доказательство. Каждая функция y в пространстве V, натянутом на $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяет тождеству $y^{(n)} - \varphi_1 y^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n \varphi_n y = 0$. Дифференцируя это тождество, можно выразить любую производную функции y порядка $\geq n$ через функцию y, ее производные порядка $< n$, основные дифференциальные инварианты и их производные. Подставляя найденные выражения старших производных функций $y_1, \ldots, y_n$ в рациональную функцию R, мы получим рациональную функцию $\tilde{R}$ от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, их

производных и от элементов фундаментальной матрицы Y, где

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Функция $\tilde{R}$ не может меняться при линейных преобразованиях пространства V, натянутого на $y_1, \dots, y_n$. Любая невырожденная $(n \times n)$-матрица может быть получена как образ фундаментальной матрицы Y при некотором линейном преобразовании пространства V. Рациональная функция $\tilde{R}$ должна быть постоянна на множестве невырожденных матриц, поэтому она постоянна на множестве всех матриц, не зависит от матрицы Y, а зависит лишь от дифференциальных инвариантов и их производных.

Следствие 1.4. *Всякая рациональная функция от независимых решений $y_1, \dots, y_n$ линейного дифференциального уравнения и от их производных, которая не меняется при выборе другого базиса $z_1, \dots, z_n$ в пространстве решений, на самом деле, является рациональной функцией от коэффициентов дифференциального уравнения и от их производных.*

§2. Группа Галуа линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \tag{13}$$

с коэффициентами в некотором функциональном дифференциальном поле K. (Напомним, что мы всегда предполагаем, что поле K содержит все комплексные константы.)

Дифференциальным полиномом над K от функций $u_1, \dots, u_n$ называется полином с коэффициентами из K от функции $u_1, \dots, u_n$ и от их производных. *Дифференциальным соотношением* над K между решениями $y_1, \dots, y_n$ уравнения (13) называется дифференциальный полином над полем K от функций $u_1, \dots, u_n$, который обращается в нуль при подстановке $u_1 = y_1, \dots, u_n = y_n$.

Определение. *Группой Галуа дифференциального уравнения (13) над дифференциальным полем K* называется подгруппа G группы $GL(V)$ всех линейных преобразований пространства решений V уравнения (13), сохраняющих все дифференциальные соотношения над K между решениями уравнения (т.е. если $A \in G$ и Q — любое соотношение над K между некоторыми решениями $y_1, \dots, y_n$, то решения $Ay_1, \dots, Ay_n$ должны быть связаны тем же соотношением Q).

Утверждение 2.1. *Группа Галуа линейного дифференциального уравнения является алгебраической подгруппой в $GL(V)$.*

Доказательство. Для каждого дифференциального соотношения Q между решениями $y_1, \ldots, y_n$ множество линейных преобразований A, для которых соотношение Q выполняется для $Ay_1, \ldots, Ay_n$, является очевидно алгебраическим. Пересечение любого числа алгебраических многообразий является алгебраическим многообразием.

Определение. Функциональное дифференциальное поле P называется *расширением Пикара–Вессио* функционального дифференциального поля K, если существует линейное дифференциальное уравнение (13) с коэффициентами в дифференциальном поле K, такое, что P получается присоединением к K всех решений уравнения (13). *Группой Галуа расширения Пикара–Вессио над полем* K называется группа всех автоморфизмов дифференциального поля P, сохраняющих на месте все элементы поля K.

Каждый элемент τ из группы Галуа дифференциального поля P над дифференциальным полем K задает линейное преобразование пространства решений и сохраняет все дифференциальные соотношения, определенные над полем K между решениями. Таким образом, группа Галуа дифференциального поля P над K имеет представление в группе Галуа G уравнения (13), определяющее расширение Пикара–Вессио P. Это представление, очевидно, является изоморфизмом групп, т.е. группа Галуа уравнения и группа Галуа заданного ими расширения Пикара–Вессие изоморфны. Используя этот изоморфизм, можно определить на группе Галуа расширения Пикара–Вессио структуру алгебраической группы. Если два различных линейных дифференциальных уравнения над полем K задают одно и то же расширение Пикара–Вессио, то группы Галуа этих уравнений изоморфны не только как абстрактные группы, но и как алгебраические группы. Поэтому структура алгебраической группы на группе расширения Пикара–Вессио определена корректно.

§3. Основная теорема теории Пикара–Вессио

Пусть дифференциальное поле P является расширение Пикара–Вессио дифференциального поля K, и G — его группа Галуа. Теория Пикара–Вессио описывает все промежуточные дифференциальные поля, т.е. все дифференциальные поля, лежащие в поле P и содержащие поле K. Сопоставим каждой подгруппе Γ группы Галуа G дифференциальное поле $\mathrm{Fix}\,(\Gamma)$, состоящее из элементов поля P, остающихся неподвижными при действии подгруппы Γ (ясно, что $K \subseteq \mathrm{Fix}\,(\Gamma)$). Сопоставим каждому промежуточному дифференциальному полю F, $K \subseteq F \subseteq P$, подгруппу $\mathrm{Gr}\,(F) \subseteq G$, являющуюся группой Галуа расширения Пикара–Вессио P поля F (P является расширением Пикара–Вессио поля K, и поэтому оно автоматически является расширением Пикара–Вессио промежуточного дифференциального поля F, $K \subset F \subset P$). Отображения Fix и Gr устанавливают *соответствие Галуа* между подгруппами группы Галуа и промежуточными дифференциальными полями расширения Пикара–Вессио. Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 3.1 (основная теорема теории Пикара–Вессио). *Соответствие Галуа устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством алгебраических подгрупп группы Галуа и множеством промежуточных дифференциальных полей расширения Пикара–Вессио. Точнее, справедливы следующие утверждения:*

1) композиция отображений Fix *и* Gr *является тождественным отображением множества промежуточных полей в себя: если F — дифференциальное поле и $K \subseteq F \subseteq P$, то* $\mathrm{Fix}\,(\mathrm{Gr}\,(F)) = F$;

2) композиция отображений Gr *и* Fix *сопоставляет каждой подгруппе Γ в группе Галуа G ее алгебраическое замыкание $\overline{\Gamma}$ в группе G: если Γ — подгруппа группы Галуа, $\Gamma \subset G$, то* $\mathrm{Gr}\,(\mathrm{Fix}\,(\Gamma)) = \overline{\Gamma}$;

3) промежуточное дифференциальное поле F, $K \subseteq F \subseteq P$ является расширением Пикара–Вессио поля K, если и только если группа $\mathrm{Gr}\,(F)$ *является нормальным делителем группы G. При этом группа Галуа расширения Пикара–Вессио F поля K является фактор-группой группы G по нормальному делителю* $\mathrm{Gr}\,(F)$.

Докажем полезное характеристическое свойство расширений Пикара–Вессио, непосредственно вытекающее из основной теоремы.

Следствие 3.2. *Дифференциальное поле P является расширением Пикара–Вессио дифференциального поля K, $K \subseteq P$, если и только если существует группа Γ автоморфизмов дифференциального поля P, такая, что 1) она оставляет неподвижными все элементы поля K и только элементы поля K; 2) существует лежащее в P конечномерное линейное пространство V над полем констант, инвариантное относительно группы Γ и такое, что поле P является наименьшим дифференциальным полем, содержащим V и K.*

Доказательство. Расширение Пикара–Вессио указанными свойствами обладает. Это вытекает из п. 1 основной теоремы, примененной к полю $F = K$. Обратно, пусть $y_1, \ldots, y_n$ — базис линейного пространства V, о котором идет речь в п. 2. Коэффициенты линейного дифференциального уравнения n-го порядка, которому удовлетворяют функции $y_1, \ldots, y_n$, инвариантны относительно всех линейных преобразований пространства V. Поэтому они инвариантны относительно группы Γ и лежат в K. Следовательно, P получается из K присоединением всех решений указанного уравнения P и является расширением Пикара–Вессио поля K.

Что произойдет с группой Галуа линейного дифференциального уравнения, если дифференциальное поле коэффициентов K расширить, заменив его большим дифференциальным полем K_1? Этот вопрос особенно интересен в том случае, когда поле K_1 является расширением Пикара–Вессио поля K. Обозначим через G_1 группу Галуа расширения K_1 дифференциального поля K. Результаты о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений основаны на следующей теореме из теории Пикара–Вессио, которую мы приводим без доказательства и которая формулируется вполне аналогично теореме 7.8 из главы 2.

Теорема 3.3 (об изменении группы Галуа уравнения при расширении Пикара–Вессио поля коэффициентов). *При замене дифференциального поля коэффициентов K его расширением Пикара–Вессио K_1 группа Галуа G уравнения заменяется некоторым своим алгебраическим нормальным делителем H. Фактор-группа G/H группы G относительно этого нормального делителя изоморфна некоторой алгебраической фактор-группе группы Галуа G_1 нового дифференциального поля K_1 над старым дифференциальным полем K.*

§4. Простейшие расширения Пикара–Вессио

В этом параграфе рассматриваются следующие простейшие расширения Пикара–Вессио: алгебраическое расширение, присоединение интеграла и присоетинение экспоненты интеграла.

4.1. Алгебраическое расширения. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{14}$$

над функциональным дифференциальным полем K и рассмотрим расширение Галуа P, получающееся присоединением к полю K всех решений уравнения (14).

Лемма 4.1. *Поле P является дифференциальным полем. Каждый автоморфизм поля P над полем K, который сохраняет лишь арифметические операции в поле P, автоматически сохраняет и операцию дифференцирования.*

Доказательство. Изменив, если нужно, алгебраическое уравнение (14), можно считать, что оно неприводимо над полем K и что каждый корень x_i уравнения (14) порождает поле P над полем K. Дифференцируя тождество $Q(x_i) = 0$, получим $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_i)x_i' + \dfrac{\partial Q}{\partial t}(x_i) = 0$, где $\dfrac{\partial Q}{\partial t} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i' x^i$. Полином $\dfrac{\partial Q}{\partial t}$ не может обращаться в нуль в точке x_i, т.к. уравнение $Q = 0$ неприводимо. Получаем алгебраическое выражение производной $x_i' = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_i)/\dfrac{\partial Q}{\partial t}(x_i)$ корня x_i, которое одинаково для всех корней x_i полинома Q. Отсюда и вытекают оба утверждения леммы.

Группа Галуа Г расширения Галуа P над полем K оставляет неподвижными лишь элементы поля K. Линейное пространство V над полем констант, натянутое на корни $x_1, \ldots, x_n$ уравнения (14), инвариантно относительно действия группы Г. Согласно следствию 3.2, дифференциальное поле P является расширением Пикара–Вессио. Группа Галуа расширения Пикара–Вессио P поля K совпадает с группой Галуа алгебраического уравнения (14). *Основная теорема теории Пикара–Вессио для расширения Пикара–Вессио P дифференциального поля K совпадает с основной теоремой теории Галуа расширения Галуа P поля K.*

4.2. Присоединение интеграла. Пусть y_1 — интеграл над функциональным дифференциальным полем K и $y_1' = a$, $a \in K$, $a \neq 0$.

Однородное дифференциальное уравнение $ay'' - a'y' = 0$ имеет своими независимыми решениями y_1 и единицу. Расширение дифференциального поля K, полученное из K присоединением элемента y_1, является поэтому расширением Пикара–Вессио (напомним, что мы всегда предполагаем, что поле K содержит все комплексные постоянные).

Лемма 4.2. *Интеграл y_1 либо принадлежит полю K, либо трансцендентен над K.*

Доказательство. Допустим, что интеграл y_1 алгебраичен над полем K. Пусть $Q(y) = a_n y^n \cdots + a_0 = 0$ — неприводимое над K уравнение, которому удовлетворяет y_1. Можно считать, что $n > 1$ и что $a_n = 1$. Продифференцировав тождество $Q(y) = 0$, получим уравнение меньшей степени $na y^{n-1} + \cdots + a_0' = 0$, которому удовлетроряет y_1. Это противоречит неприводимости полинома Q.

Пусть элемент y_1 трансцендентен над K. Покажем, что единственное независимое дифференциальное соотношение над K, которому удовлетворяет y_1, есть $y_1' = a$. Действительно, используя это соотношение, каждый дифференциальный полином над K от y_1 можно переписать как полином от y_1 с коэффициентами из K. Но ни один такой нетривиальный полином не может обратиться в нуль, т.к. элемент y_1 трансцендентен над K. Поэтому группа Галуа уравнения $ay'' - a'y' = 0$ состоит из линейных преобразований вида $Ay_1 = y_1 + C$, $A(1) = 1$, где C — любое комплексное число. Итак, *группа Галуа нетривиального интегрального расширения изоморфна аддитивной группе комплексных чисел.*

В терминологии Колчина [Ko1] алгебраическая группа называется *антикомпактной*, если она не содержит элементов конечного порядка, отличных от единицы. *Группа Галуа нетривиального интегрального расширения очевидно антикомпактна.*

Утверждение 4.3. *Не существует дифференциальных полей между полем K и $K\langle y\rangle$, где y — интеграл над K, не лежащий в K.*

Доказательство. Действительно, пусть F — дифференциальное поле такое, что $K \subset F \subset K\langle y\rangle$. Пусть $b \in F$ и $b \notin K$. Тогда элемент b представим в виде нетривиальной рациональной функции от y с коэффициентами из K. Существование такой функции означает, что элемент y алгебраичен над F. Но элемент y является интегралом над F, т.к. $y' = a \in K$. Интеграл алгебраичен над дифференциальным полем, если и только если он лежит в этом поле (см. лемму 4.2), т.е. $F = K\langle y\rangle$.

Утверждение доказывает основную теорему теории Пикара–Вессио для присоединения интеграла. Действительно, группа Галуа C поля $K\langle y\rangle$ над полем K не имеет алгебраических подгрупп, а пара дифференциальных полей $K \subset K\langle y\rangle$ не содержит промежуточных дифференциальных полей.

4.3. Присоединение экспоненты интеграла. Пусть y_1 — экспонента интеграла над функциональным дифференциальным полем K, т.е. $y_1' = ay_1$, где $a \in K$. Расширение поля K элементом y_1 является, по определению, расширением Пикара–Вессио.

Лемма 4.4. *Пусть экспонента интеграла y_1 является алгебраичным над полем K элементом. Тогда y_1 — радикал над полем K.*

Доказательство. Пусть $Q(y) = a_n y^n + \cdots + a_0 = 0$ — неприводимое над K уравнение, которому удовлетворяет элемент y_1. Можно считать, что $n > 1$, $a_n \neq 0$ и $a_0 = 1$. Продифференцировав тождество $Q(y_1) = 0$, получим уравнение $\sum(a_k' + ka_k a)y^k = 0$, которому удовлетворяет y_1. Это уравнение имеет степень $\leq n$, но не содержит свободного члена. Все коэффициенты этого уравнения должны тождественно обратиться в нуль, т.к. в противном случае мы получим противоречие с неприводимостью полинома Q. Равенство $a_n' + na_n a = 0$ означает, что частное $a_n/y_1^n = c$ является константой. Действительно, из соотношения $y_1' = ay_1$ вытекает, что $(y_1^{-n})' + na(y_1^{-n}) = 0$, т.е. что y_1^{-n} и a_n удовлетворяют одному и тому же уравнению. Поэтому $y^n = a_n/c$. Лемма доказана.

Допустим, что элемент y_1 трансцендентен над K. Покажем, что в этом случае единственное независимое дифференциальное соотношение над K, которому удовлетворяет y_1, есть $y_1' = ay_1$. Действительно, используя это соотношение, каждый дифференциальный полином над K от y_1 можно переписать как полином от y_1 с коэффициентами из K. Но ни один такой нетривиальный полином не может обратиться в нуль, т.к. y_1 трансцендентен над K. Поэтому группа Галуа уравнения $y' = ay$ состоит из линейных преобразований вида $Ay_1 = Cy_1$, где $C \neq 0$ — любое ненулевое комплексное число. Итак, *группа Галуа неалгебраического расширения, являющегося присоединением экспоненты интеграла, совпадает с мультипликативной группой $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел.*

Экспонента интеграла над K является алгебраическим элементом y над K, если и только если y — радикал над K. Поэтому *если присоединение экспоненты интеграла является алгебраическим расширением, то его группа Галуа является конечной мультипликативной подгруппой в $\mathbb{C}^*$.*

В терминологии Колчина [Ko1] алгебраическая группа называется *квазикомпактной*, если каждая ее неединичная подгруппа содержит элементы конечного порядка, отличные от единицы. *Группа Галуа неалгебраического расширения, полученного присоединением экспоненты интеграла, очевидно квазикомпактна.*

Утверждение 4.5. *Пусть y — экспонента интеграла над K, и элемент y трансцендентен над K. Тогда каждому неотрицательному целому числу n можно поставить в соответствие дифференциальное поле между полями K и $K\langle y\rangle$. Именно, это дифференциальное поле K_n, состоящее из рациональных функций от элемента y^n с коэффициентами из поля K. Для разных n поля K_n различны. Всякое промежуточное дифференциальное поле совпадает с некоторым полем K_n.*

Доказательство. Пусть F — дифференциальное поле, строго содержащее поле K и лежащее в поле $K\langle y\rangle$. Повторяя рассуждения утверждения 4.3, получаем, что элемент y алгебраичен над F. Элемент y является экспонентой интеграла над F. Поэтому неприводимое над полем F алгебраическое уравнение, которому удовлетворяет y, имеет вид $y^n - a = 0$, где $a \in F$ (см. лемму 4.4), поэтому $K_n \subseteq F$. Поле K_n должно совпадать с F. Действительно, в противном случае существует элемент $b \in F$, $b \notin K_n$. Элемент b является некоторой рациональной функцией R от y, и соотношение $R(y)$ не является следствием уравнения $y^n = a$. Это противоречит неприводимости уравнения $y^n = a$. Противоречие доказывает, что $K_n = F$. Поля K_n при разных n различны в силу трансцендентности y над K.

Утверждение доказывает основную теорему теории Пикара–Вессио для присоединения экспоненты интеграла. Действительно, каждая собственная алгебраическая подгруппа группы $\mathbb{C}^*$ является группой корней n-й степени из единицы для некоторого n. Промежуточное между K и $K\langle y\rangle$ дифференциальное поле состоит в точности из элементов поля $K\langle y\rangle$, которые остаются на месте при действии группы корней n-й степени из единицы на $K\langle y\rangle$.

§5. Разрешимость дифференциальных уравнений

Скажем, что *алгебраическая группа G является разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой в категории алгебраических групп*, если у нее существует нормальная башня алгебраических подгрупп $G = G_0 \supset \cdots \supset G_m = e$ со следующими свойствами

а) для разрешимых групп: для каждого $i = 1, \ldots, m$ фактор-группа на G_{i-1}/G_i коммутативна (т.е. группа G разрешима);

б) для k-разрешимых групп: для каждого $i = 1, \ldots, m$ либо глубина группы G_i в группе G_{i-1} не превосходит k, либо группа G_{i-1}/G_i коммутативна;

в) для почти разрешимых групп: для каждого $i = 1, \ldots, m$ либо индекс группы G_i в группе G_{i-1} конечен, либо группа G_{i-1}/G_i коммутативна.

Теорема 5.1 (Пикара–Вессио). *Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в квадратурах, в k-квадратурах или обобщенных квадратурах, если и только если группа Галуа уравнения над полем K является, соответственно, разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой группой в категории алгебраических групп.*

Замечание. В классической теореме Пикара–Вессио не обсуждается вопрос о разрешимости уравнений в k-квадратурах. Мы включили этот вопрос в теорему, потому что, во-первых, ответ на него аналогичен, и, во-вторых, он переносится в топологическую теорию Галуа.

В этом пункте мы докажем лишь необходимость условий на группу Галуа для разрешимости уравнения. Доказательство достаточности отложим до §7. Итак, справедлива следующая

Теорема 5.2. *Если линейное дифференциальное уравнение решается в квадратурах, в k-квадратурах или в обобщенных квадратурах, то группа Галуа G этого уравнения является разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой группой в категории алгебраических групп.*

Доказательство. Разрешимость уравнений в обобщенных квадратурах над полем K означает существование цепочки дифференциальных полей $K = K_0 \subset \cdots \subset K_N$, в которой первое поле совпадает с исходным полем K, последнее поле K_N содержит все решения дифференциального уравнения и для каждого $i = 1, \ldots, N$ поле K_i получается из поля K_{i-1} либо присоединением интеграла, либо присоединением экспоненты интеграла, либо присоединением всех решений алгебраического уравнения. (В случае разрешимости в квадратурах последний из этих типов расширений запрещен. В случае разрешимости в k-квадратурах допускается лишь присоединение корней алгебраических уравнений степени не выше чем k.)

Пусть $G = G_0 \supset \cdots \supset G_m = e$ — убывающая цепочка групп, в которой группа G_i — группа Галуа исходного уравнения над полем K_i. Согласно основной теореме 4.4, фактор-группа G_{i-1}/G_i является факторгруппой группы Галуа расширения Пикара–Вессио K_i поля K_{i-1}. Если это расширение является присоединением интеграла или экспоненты интеграла, то группа G_{i-1}/G_i коммутативна как фактор-группа коммутативной группы (см. пп. 4.2–4.3). Если расширение K_i поля K_{i-1} получено присоединением всех корней алгебраического уравнения, то фактор-группа G_{i-1}/G_i конечна. Если это алгебраическое уравнение имеет степень $\leq k$, то между группами $G_i \supset G_{i-1}$ можно вставить цепочку нормальных делителей $G_i = G_{i1} \supset \cdots \supset G_{ip} = G_{i-1}$ такую, что глубина группы G_{ij} в группе $G_{i,j-1}$ не превосходит k (см. §9 главы 2). Доказательство теоремы закончено.

Только что доказанную теорему можно сформулировать следующим образом.

Если расширение Пикара–Вессио является расширением Лиувилля, k-расширением Лиувилля или обобщенным расширением Лиувилля, то его группа Галуа является, соответственно, разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой группой в категории алгебраических групп.

В такой переформулировке теорема становится применимой и к алгебраическим уравнениям над дифференциальными полями. Она дает более сильные результаты о неразрешимости алгебраических уравнений.

Теорема 5.3. *Если группа Галуа алгебраического уравнения над дифференциальным полем K неразрешима, то это алгебраическое уравнение не только не решается в радикалах, но и не решается в квадратурах. Если группа Галуа не является k-разрешимой, то алгебраическое уравнение не решается в k-квадратурах над K.*

§6. Алгебраические матричные группы и необходимые условия разрешимости

Группа Галуа линейного дифференциального уравнения является алгебраической матричной группой. Такие группы обладают общими свойствами, которые помогают переформулировать условия разрешимости, k-разрешимости и почти разрешимости группы Галуа и доказать, что эти условия являются достаточными (см. §7) для разрешимости уравнения.

Отметим прежде всего, что *всякая алгебраическая матричная группа является группой Ли.* Действительно, множество особых точек всякого алгебраического многообразия имеет коразмерность ≥ 1. Но групповым преобразованием любая точка группы переводится в любую другую точку. Поэтому около каждой точки группа устроена одинаково, и, следовательно, множество ее особых точек пусто. *Компонента связности единицы алгебраической группы является нормальным делителем конечного индекса в этой группе.* Действительно, компонента связности единицы является нормальным делителем во всякой группе Ли, и каждое алгебраическое многообразие имеет лишь конечное число компонент связности.

Для дальнейшего ключевую роль играет следующая знаменитая теорема Ли, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 6.1 (Ли). *Связная разрешимая матричная группа Ли в некотором базисе приводится к треугольному виду.*

Утверждение 6.2. *Алгебраическая матричная группа является почти разрешимой группой в категории алгебраических групп, если и только если все матрицы ее компоненты связности единицы в некотором базисе одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. Всякая группа, состоящая из треугольных матриц, разрешима. Это доказывает утверждение в одну сторону. Пусть $G = G_0 \supset \cdots \supset G_n = e$ — нормальная башня алгебраических подгрупп группы G, для которой каждая фактор-группа G_i/G_{i-1} либо коммутативна, либо конечна. Рассмотрим компоненты связности единицы этих групп. Они образуют нормальную башню $G^0 = G_0^0 \supset \cdots \supset G_n^0 = e$ алгебраических подгрупп компоненты связности единицы G^0 группы G. При этом, если фактор-группа G_{i-1}/G_i коммутативна, то фактор-группа G_{i-1}^0/G_i^0 тоже коммутативна. Если фактор-группа G_{i-1}/G_i конечна, то группы G_{i-1}^0 и G_i^0 совпадают. Утверждение доказано.

Утверждение 6.3. *Алгебраическая матричная группа G является разрешимой или k-разрешимой группой в категории алгебраических групп, если и только если все матрицы ее компоненты связности единицы G^0 в некотором базисе приводятся к треугольному виду и конечная фактор-группа G/G_0, соответственно, разрешима или k-разрешима.*

Доказательство. Согласно утверждению 6.2, группа G^0 является треугольной. Кроме того, группа G^0 является нормальным делителем конечного

индекса в группе G. Конечная фактор-группа G/G_0 является, соответственно, разрешимой или k-разрешимой группой. В обратную сторону утверждение очевидно.

В группах матриц есть замечательная топология Зарисского, сопоставляющая каждой группе $\Gamma \subset GL(V)$ ее алгебраическое замыкание $\overline{\Gamma}$. Эта операция позволяет обобщить утверждения 6.2 и 6.3 на произвольные матричные группы.

Утверждение 6.4. *1) Матричная группа является обобщенно разрешимой группой, если и только если у нее существует треугольный нормальный делитель H конечного индекса. Матричная группа является k-разрешимой или разрешимой, если и только если конечная фактор-группа G/H группы G по некоторому треугольному нормальному делителю H конечного индекса является, соответственно, k-разрешимой или разрешимой группой.*

2) Алгебраическая матричная группа G является обобщенно разрешимой, k-разрешимой или разрешимой группой в категории алгебраических групп, если и только если она является, соответственно, обобщенно разрешимой, k-разрешимой или разрешимой группой.

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supset \cdots \supset G_n = e$ — нормальная башня группы G, тогда замыкание в топологии Зарисского групп из этой башни образует нормальную башню алгебраических групп $\overline{G} = \overline{G}_0 \supset \cdots \supset \overline{G}_n = e$. При этом, если группа G_{i-1}/G_i коммутативна, конечна или если группа G_i имеет в G_{i-1} глубину $\leq k$, то группа $\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i$ будет, соответственно, коммутативной, конечной или группа $\overline{G}_i$ будет иметь в группе $\overline{G}_{i-1}$ глубину $\leq k$. Это доказывает все пункты утверждения в одну сторону. В другую сторону все утверждения очевидны.

§7. Достаточное условие разрешимости дифференциальных уравнений

Группу автоморфизмов Γ дифференциального поля F с дифференциальным полем неподвижных элементов K назовем *допустимой группой автоморфизмов*, если существует конечномерное пространство V над полем констант, инвариантное относительно группы Γ и такое, что $K\langle V\rangle = F$. Согласно теории Пикара–Вессио (см. следствие 3.2) дифференциальное поле F является расширением Пикара–Вессио дифференциального поля K, если и только если существует допустимая группа автоморфизмов дифференциального поля F с дифференциальным полем неподвижных элементов K. В общем случае существование допустимой группы преобразований для расширения Пикара–Вессио совсем неочевидно и является частью основной теоремы этой теории. Однако, для обширного класса случаев существование допустимой группы автоморфизмов известно априори. Такой класс случаев доставляют расширения поля рациональных функций всеми решениями любого линейного дифференциального уравнения типа Фукса (см. §1 главы 6). В этих случаях группа монодромии уравнения играет роль группы Γ.

Если группа Γ разрешима, то элементы поля F представляются в квадратурах через элементы поля K. Конструкция такого представления, по существу, относится к линейной алгебре и не использует основных теорем Пикара–Вессио. Допустимая группа автоморфизмов Γ изоморфна индутсированной группе линейных преобразований пространства V, и ее можно рассматривать как матричную группу.

Лемма 7.1 (Лиувилль). *Если все преобразования допустимой группы Γ приводятся в некотором базисе к треугольному виду, то дифференциальное поле F является расширением Лиувилля дифференциального поля K.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, в котором каждое преобразование $\mu \in \Gamma$ имеет вид $\mu(e_i) = \sum\limits_{j \le i} a_{ij} e_j$. Рассмотрим векторное пространство $\tilde{V}$, натянутое на вектора $\tilde{e}_i = (\dfrac{e_i}{e_1})'$, где $i = 2, \ldots, n$. Пространство $\tilde{V}$ инвариантно относительно группы, причем каждое преобразование μ группы Γ в базисе $\tilde{e}_i$ имеет треугольный вид. Действительно,

$$\mu(\tilde{e}_i) = \mu\left(\left[\frac{e_i}{e_1}\right]'\right) = \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} + \sum_{2 \le j \le i} \frac{a_{ij}}{a_{11}} \frac{e_j}{e_1}\right)' = \sum_{2 \le j \le i} \frac{a_{ij}}{a_{11}} \tilde{e}_j.$$

Пространство $\tilde{V}$ имеет меньшую размерность, чем пространсрво V, поэтому можно считать, что дифференцильное поле $K\langle\tilde{V}\rangle$ есть расширение Лиувилля дифференциального поля K. Для всякого $\mu \in \Gamma$ имеем $\mu(\dfrac{e_1'}{e_1}) = \dfrac{a_{11}e_1'}{a_{11}e_1} = \dfrac{e_1'}{e_1}$, следовательно, элемент $\dfrac{e_1'}{e_1} = a$ лежит в дифференциальном поле инвариантов K. Дифференциальное поле F получается из дифференциального поля K присоединением экспоненты интеграла e_1 от элемента a и интегралов $\dfrac{e_i}{e_1}$ от элементов $\tilde{e}_i$, где $i = 2, \ldots, n$.

Утверждение 7.2. *Если группа Γ допустимых автоморфизмов поля F с полем неподвижных элементов K почти разрешима, то существует инвариантное относительно группы Γ поле K_0, такое, что 1) поле F является расширением Лиувиллая поля K_0, 2) индуцированная группа автоморфизмов поля K_0 конечна, при этом каждый элемент поля K_0 является алгебраическим над полем K, 3) если группа Γ разрешима, то каждый элемент поля K_0 представим в радикалах над полем K.*

Доказательство. Пусть V — инвариантное пространство относительно группы Γ, такое, что $K\langle V\rangle = F$.

Из утверждения 6.2 вытекает, что группа Γ обладает нормальным делителем Γ_0 конечного индекса, приводящимся в некотором базисе пространства V к треугольному виду. Пусть K_0 — дифференциальное поле инвариантов группы Γ. Согласно лемме 7.1, дифференциальное поле F есть расширение Лиувилля дифференциального поля K_0.

Очевидно (см. утверждение 1.3 главы 2), что поле K_0 инвариантно относительно действия группы Γ и индуцированная группа автоморфизмов этого поля $\tilde{\Gamma}_0$ является конечной фактор-группой группы Γ. Поэтому каждый элемент поля K_0 алгебраичен над K (см. теорему 3.2 главы 2). Если исходная группа Γ разрешима, то ее конечная фактор-группа $\tilde{\Gamma}_0$ тоже разрешима. В этом случае любой элемент поля K_0 выражается в радикалах через элемент поля K (см. теорему 1.2 главы 2).

Доказательство следующего утверждения опирается на теорию Галуа.

Утверждение 7.3. *Если в условиях утверждения 7.2 группа* Γ *k-разрешима, то каждый элемент поля K_0 выражается через элементы поля K при помощи радикалов и решения алгебраических уравнений степени не выше k.*

Доказательство. Так как группа $\tilde{\Gamma}_0$ конечна, то расширение K_0 поля K является расширением Галуа поля K. Если группа Γ_0 k-разрешима, то ее конечная фактор-группа тоже k-разрешима. Утверждение 7.3 теперь вытекает из теоремы 4.1 главы 2.

Закончим теперь доказательтво теоремы Пикара–Вессио (см. §5).

Согласно основной теореме 3.1, для всякого линейного дифференциального уравнения над дифференциальным полем K его группа Галуа оставляет неподвижными лишь элементы поля K. Поэтому применимы только что доказанные утверждения 7.2 и 7.3, что и доказывает достаточность условий на группу Галуа в теореме Пикара–Вессио.

Теорема Пикара–Вессио не только доказывает критерий Лиувилля–Мордухай-Болтовского (см. §5 главы 1), но позволяет его обобщить на случай разрешимости в квадратурах и k-квадратурах. Именно, справедливы следующие утверждения.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка решается в обобщенных квадратурах над дифференциальным полем K, если и только если, во-первых, у него существует решение y_1, удовлетворяющее уравнению $y_1' = ay_1$, где a — элемент, принадлежащий некоторому алгебраическому расширению K_1, и, во-вторых, если дифференциальное уравнение $(n-1)$ порядка на функцию $z = y' - ay$ с коэффициентами из поля K_1, полученное из исходного уравнения процедурой понижения порядка (см. п. 1.2), решается в обобщенных квадратурах. Аналогичные утверждения справедливы и для разрешимости линейного дифференциального уравнения в квадратурах и в k-квадратурах. Для разрешимости в квадратурах надо дополнительно требовать, чтобы алгебраическое расширение K_1 получилось из K присоединением радикалов, а для разрешимости в k-квадратурах — чтобы расширение K_1 получалось из K присоединением радикалов и корней алгебраических уравнений степени $\leq k$. Для доказательства этих утверждений достаточно посмотреть на конструкцию решений дифференциальных уравнений.

Дифференциальная алгебра позволяет существенно уточнить этот критерий. *Для линейных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные функции с рациональными коэффициентами,*

удается получить конечный алгоритм, позволяющий определить, решается ли уравнение в обобщенных квадратурах, и позволяющий, если решается, найти его решение [S2]. Алгоритм использует: 1) оценку степени расширения K_1 поля K, зависящую лишь от порядка уравнения и вытекающую из общих соображений теории групп (см. п. 2.2 главы 6); 2) теорию нормальных форм линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки; 3) теорию исключения для дифференциальных уравнений и неравенств от нескольких функций (найненную Зайденбергом и обобщающую теорему Тарского–Зайденберга на случай дифференциальных полей).

§8. Другие виды разрешимости

Колчин дополнил теорему Пикара–Вессио [Ko1]. Он рассмотрел задачи о разрешимости линейных уравнений отдельно в интегралах и отдельно в экспонентах интегралов и варианты этих задач, в которых допускаются алгебраические расширения.

При определении расширений Лиувилля использовались три вида расширений: алгебраические расширения, присоединения интегралов и присоединения экспонент интегралов. Можно определить более частные види разрешимости, используя в качестве “строительных кирпичиков” только некоторые из этих расширений (и используя лишь специальные алгебраические расширения). Перечислим основные варианты.

1) Разрешимость в интегралах.

2) Разрешимость в интегралах и радикалах.

3) Разрешимость в интегралах и в алгебраических функциях.

4) Разрешимость в экспонентах интегралов.

5) Разрешимость в экспонентах интегралов и в алгебраических функциях.

Расшифруем третье из этих определений.

Рассмотрим произвольную цепочку дифференциальных полей $K = K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_n$, в которой каждое следующее поле K_i, $i = 1, \ldots, n$, либо получается из предыдущего поля K_{i-1} присоединением интеграла над K_{i-1}, либо является алгебраическим расширением поля K_{i-1}. Каждый элемент дифференциального поля K_n, по определению, *представим в интегралах и алгебраических функциях* над полем K. Уравнение решается над полем K в интегралах и в алгебраичесхих функциях, если каждое его решение представлено в интегралах и в алгебраических функциях.

Аналогично расшифровываются и другие виды разрешимости 1–5.

Замечание. 1) Отдельно рассматривать разрешимость в радикалах и экспонентах интегралов не надо, т.к. каждый радикал является экспонентой интеграла.

2) Выше мы рассматривали специальные алгебраические расширения, полученные присоединением корней алгебраических уравнений степени не выше k. Можно было бы, скажем, определить k-разрешимость в интегралах, комбинируя подобные алгебраические расширения с присоеди-

нениями интегралов. Мы этого не делаем, чтобы не загромождать текст и из-за отсутствия интересных примеров.

Определение 1. Скажем, что матричная группа G является *специальной треугольной группой*, если существует базис, в котором все матрицы группы G одновременно приводятся к треугольному виду и все собственные числа каждой матрицы из группы G равны единице.

Определение 2. Скажем, что матричная группа *диагональна*, если существует базис, в котором все матрицы группы диагональны.

Теорема 8.1 (Колчина о разрешимости в интегралах). *Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в интегралах, в интегралах и радикалах, в интегралах и алгебраических функциях, если и только если группа Галуа уравнения над K, соответственно, является специальной треугольной группой, разрешима и содержит специальный треугольный нормальный делитель конечного индекса, содержит специальный треугольный нормальный делитель конечного индекса.*

Теорема 8.2 (Колчина о разрешимости в экспонентах интегралов). *Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в экспонентах интегралов и в экспонентах интегралов и алгебраических функциях, если и только если его группа Галуа над K, соответственно, разрешима и содержит диагональный нормальный делитель конечного индекса, содержит диагональный нормальный делитель конечного индекса.*

Несколько слов о доказательстве этих теорем. Группа Галуа присоединения интеграла антикомпактна (см. п. 4.2). Группа Галуа присоединения экспоненты интеграла квазикомпактна (см. п. 4.3). Колчин развил теорию антикомпактных и квазикомпактных алгебраических матричных групп. Вот одно несложное утверждение из этой теории.

Утверждение 8.3 [Ko1]. *1) Алгебраическая матричная группа квазикомпактна, если и только если каждая матрица группы приводится к диагональному виду. 2) Алгебраическая матричная группа антикомпактна, если и только если все собственные числа каждой матрицы группы равны единице.*

Теория квазикомпактных и антикомпактных групп вместе с основной теоремой теории Пикара–Вессио позволили Колчину доказать его теоремы о разрешимости в интегралах и о разрешимости в экспонентах интегралов.

Разумеется, теоремы Колчина, так же как и теорема Пикара–Вессио, справедливы не только для линейных дифференциальных уравнений, но и для расширений Пикара–Вессио (каждое такое расширение порождено решениями линейного дифференциального уравнения). Сформулируем критерий для различных видов представимости всех элементов расширения Пикара–Вессио с треугольной группой Галуа. Этот критерий легко вытекает из теорем Колчина и теоремы Пикара–Вессио. Мы применим этот критерий в п. 2.3 главы 6 при обсуждении различных видов разрешимости систем уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами.

Расширение с треугольной группой Галуа (ср. [Ko1]). *Пусть расширение Пикара–Вессио F дифференциального поля K имеет треугольную группу Галуа. Тогда каждый элемент поля F:*

1) представим в квадратурах над полем K;

2) представим в интегралах и алгебраических функциях или в интегралах и радикалах[1] *над полем K, если и только если собственные числа всех матриц группы Галуа — корни из единицы;*

3) представим в интегралах над полем K, если и только если все собственные числа всех матриц группы Галуа равны единице;

4) представим в экспонентах интегралов и в алгебраических функциях или в экспонентах интегралов[1] *над полем K, если и только если группа Галуа диагональна;*

5) представим в алгебраических функциях или в радикалах[1] *над полем K, если и только если группа Галуа диагональна, а все собственные числа всех матриц группы Галуа — корни из единицы;*

6) лежит в поле K, если и только если группа Галуа тривиальна.

[1] Эти виды разрешимости различаются, если не требовать треугольности группы Галуа.