ГЛАВА 4.
НАКРЫТИЯ И ТЕОРИЯ ГАЛУА

Эта глава посвящена геометрии накрытий и ее связи с теорией Галуа. Существует удивительная аналогия между классификацией накрытий над связным, локально-связным и локально-односвязным топологическим пространством и основной теоремой теории Галуа. Мы формулируем результаты классификации накрытий таким образом, чтобы эта аналогия бросалась в глаза.

Есть целый ряд близких задач о классификации накрытий. Кроме обычной классификации, есть классификация накрытий с отмеченными точками. Можно фиксировать нормальное накрытие и классифицировать накрытия (и накрытия с отмеченными точками), подчиненные этому нормальному накрытию. Для наших целей необходимо рассматривать разветвленные накрытия над римановыми поверхностями и решать аналогичные классификационные задачи для разветвленных накрытий и т.д.

В параграфе 1 рассматриваются накрытия над топологическими пространствами. Мы подробно обсуждаем классификацию накрытий с отмеченными точками над связным, локально-связным и локально-односвязным топологическим пространством. Остальные классификационные задачи легко сводятся к этой классификации.

В параграфе 2 рассматриваются конечнолистные разветвленные накрытия над римановыми поверхностями. Разветвленные накрытия сначала определяются как собственные отображения вещественных многообразий в риманову поверхность, имеющие особенности, характерные для комплексных аналитических отображений. Затем показывается, что разветвленные накрытия имеют естественную аналитическую структуру.

Обсуждается операция пополнения накрытий над римановой поверхностью X, из которой удалено дискретное множество O. Эта операция одинаково применима как к накрытиям, так и к накрытиям с отмеченными точками. В результате ее применения из конечнолистного накрытия над $X \setminus O$ получается разветвленное конечнолистное накрытие над X.

Классификация конечнолистных разветвленных накрытий с фиксированным множеством ветвления почти дословно повторяет аналогичную классификацию неразветвленных накрытий. Поэтому мы ограничиваемся лишь формулировками результатов.

Для сравнения основной теоремы теории Галуа и классификации разветвленных накрытий полезен следующий факт. Множество орбит действия конечной группы на одномерном комплексном аналитическом многообразии имеет естественную структуру комплексного аналитического

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

многообразия. В доказательстве используется резольвента Лагранжа (в теории Галуа резольвенты Лагранжа используются для доказательства разрешимости в радикалах уравнений с разрешимой группой Галуа).

В пункте 2.4 операция пополнения накрытий применяется для определения римановой поверхности неприводимого алгебраического уравнения над полем $K(X)$ мероморфных функций на многообразии X.

Параграф 3 основан на теории Галуа и теореме существования Римана (которую мы принимаем без доказательства) и посвящен связи между конечнолистными разветвленными накрытиями над многообразием X и алгебраическими расширениями поля $K(X)$. Показывается, что поле $K(M)$ мероморфных функций на M является алгебраическим расширением поля $K(X)$ мероморфных функций на X и что каждое алгебраическое расширение поля $K(X)$ получается таким способом.

Ключевую роль играет следующая конструкция. Фиксируем дискретное подмножество O в многообразии X и точку $a \in X \setminus O$. Рассматрим поле $P_a(O)$, состоящее из мероморфных ростков в точке $a \in X$, которые мероморфно продолжаются до конечнозначных функций на $X \setminus O$, имеющих алгебраические особенности в точках множества O. Операция мероморфного продолжения ростка вдоль замкнутой кривой задает действие фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ на поле $P_a(O)$. К действию этой группы автоморфизмов поля $P_a(O)$ примяются результаты теории Галуа. Описывается соответствие между подполями поля $P_a(O)$, являющимися алгебраическими расширениями поля $K(X)$, и подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O, a)$. Доказывается, что это соответствие является взаимно однозначным. В доказательстве кроме теории Галуа используется теорема существования Римана.

Нормальные разветвленные накрытия над связным комплексным многообразием X связаны с расширениями Галуа поля $K(X)$. Основная теорема теории Галуа для таких расширений имеет прозрачную геометрическую интерпретацию.

Локальный вариант связи между разветвленными накрытиями и алгебраическими расширениями позволяет описать алгебраические расширения поля сходящихся рядов Лорана. Расширения этого поля аналогичны алгебраическим расширениям конечного поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (при этой аналогии замкнутой вещественной кривой на плоскости, обходящей вокруг точки 0, соответствует автоморфизм Фробениуса).

В конце главы рассматриваются компактные одномерные комплексные многообразия. С одной стороны, соображения теории Галуа показывают, что поле мероморфных функций на компактном многообразии является конечнопорожденным расширением поля комплексных чисел степени трансцендентности один (в доказательстве используется теорема существования Римана). С другой стороны, разветвленные накрытия позволяют достаточно явно описать все алгебраические расширения поля рациональных функций от одного переменного. Группа Галуа такого расширения имеет геометрический смысл: она совпадает с группой монодромии римановой поверхности алгебраической функции, определенной этим урав-

нением. Поэтому теория Галуа доставляет топологическое препятствие к представимости алгебраических функций в радикалах.

§1. Накрытия над топологическими пространствами

Этот параграф посвящен накрытиям над связным, локально-связным и локально-односвязным топологическим пространством. Есть целый ряд близких задач о классификации накрытий. В пункте 1.1 мы подробно обсуждаем классификацию накрытий с отмеченными точками. Остальные классификационные задачи (см. п. 1.3) легко сводятся к этой классификации. В пункте 1.2 обсуждается соответствие между подгруппами фундаментальной группы и накрытиями с отмеченными точками. В пункте 1.4 описывается удивительная формальная аналогия между классификаций накрытий и теорией Галуа.

1.1. Классификация накрытий с отмеченными точками. Непрерывные отображения f_1 и f_2 топологических пространств Y_1 и Y_2 в топологическое пространство X называются *левоэквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, коммутируюший с отображениями f_1 и f_2, т.е. такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. Топологическое пространство Y вместе с проекцией $f : Y \to X$ называется *накрытием со слоем* D над топологическим пространством X, где D — дискретное множество, если у каждой точки $c \in X$ существует окрествость U, такая, что отображение проекции произведения $U \times D$ на первый сомножитель левоэквивалентно отображению $f : Y_U \to U$, где $Y_U = f^{-1}(U)$. Для накрытий справедлива теорема о накрывающей гомотопии (см. [ФФ]), которую мы не будем доказывать. Эта теорема нам будет нужна в случаях, когда комплекс W_k является точкой или отрезком $[0, 1]$.

Теорема 1.1 (о накрывающей гомотопии). *Пусть $f : Y \to X$ — накрытие, W_k — k-мерный клеточный комплекс и $F : W_k \to X$, $\tilde{F} : W_k \to Y$ — его отображения в X и Y, такие, что $\pi \circ \tilde{F} = F$. Тогда для всякой гомотопии $F_t : W_k \times [0, 1] \to X$ отображения F, $F_0 = F$, существует, и притом единственное, ее поднятие до гомотопии $\tilde{F}_t : W_k \times [0, 1] \to Y$, $\pi(\tilde{F}_t) = F_t$ отображения $\tilde{F}$, $\tilde{F}_0 = \tilde{F}$.*

Рассмотрим накрытие $f : Y \to X$. Гомеоморфизм $h : Y \to Y$ называется *преобразованием наложения* этого накрытия, если выполняется равенство $f = f \circ h$. Преобразования наложения образуют группу. Накрытие называется *нормальным*, если его группа преобразований наложения транзитивно действует на каждом слое $f^{-1}(a)$, $a \in X$, накрытия и выполняются следующие топологические условия на пространсва X и Y: пространство Y связно, пространство X локально-связно и локально-односвязно.

Тройка $f : (Y, b) \to (X, a)$, состоящая из пространств с отмеченными точками (X, a), (Y, b) и отображения f, называется *накрытием с отмеченными точками*, если $f : Y \to X$ — накрытие и $f(b) = a$. Накрытия с отмеченными точками называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между накрывающими пространствами, коммутирующий с

проекциями и переводящий отмеченные точки в отмеченные. Обычно из обозначений видно, идет речь о накрытиях или о накрытиях с отмеченными точками. В таких случаях мы для краткости иногда будем говорить о накрытиях, опуская слова "с отмеченными точками".

Для накрытия с отмеченными точками $f : (Y, b) \to (X, a)$ определен гомоморфизм $f_* : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(X, a)$ фундаментальной группы $\pi_1(Y, b)$ пространства Y с отмеченной точкой b в фундаментальную группу $\pi_1(X, a)$ пространства X с отмеченной точкой a.

Лемма 1.2. *Для накрытия с отмеченными точками индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп имеет ядра.*

Доказательство. Пусть замкнутая кривая $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = a$, в пространстве X является образом $f \circ \tilde{\gamma}$ замкнутой кривой $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$, в пространстве Y. Пусть кривая γ гомотопна тождественной кривой в пространстве кривых с закрепленными концами на X. Тогда кривая $\tilde{\gamma}$ гомотопна тождественной кривой в пространстве кривых с закрепленными концами на Y. Для доказательства достаточно поднять гомотопию с закрепленными концами на Y.

Для всякого связного, локально-связного и локально-односвязного топологического пространства X с отмеченной точкой a справедлива следующая

Теорема 1.3 (о классификации накрытий с отмеченными точками). *1) Для каждой подгруппы G в фундаментальной группе пространства (X, a) существует связное простравство (Y, b) и накрытие над (X, a) с накрывающим пространством (Y, b), для которого образ фундаментальной группы пространсва (Y, b) совпадает с подгруппой G.*

2) Если для двух накрытий над (X, a) со связными накрывающими пространствами (Y_1, b_1) и (Y_2, b_2) образы фундаментальных групп этих пространств в фундаментальной группе пространства (X, a) совпадают, то два накрытия эквивалентны.

Доказательство. 1) Рассмотрим пространство $\hat{\Omega}(X, a)$ кривых $\gamma : [0, 1] \to X$ на X, начинающихся в точке a, $\gamma(0) = a \in X$, и его подпространство $\hat{\Omega}(X, a, a_1)$, состоящее из кривых, заканчивающихся в точке a_1. В пространствах $\hat{\Omega}(X, a)$, $\hat{\Omega}(X, a, a_1)$ введем топологию равномерной сходимости и следующее соотношение эквивалентности. Скажем, что кривые γ_1 и γ_2 эквивалентны, если они заканчиваются в одной и той же точке a_1 и если кривая γ_1 гомотопна кривой γ_2 в пространстве $\hat{\Omega}(X, a, a_1)$ кривых с закрепленными концами. Обозначим через $\Omega(X, a)$ и $\Omega(X, a, a_1)$ факторпространства пространств $\hat{\Omega}(X, a)$ и $\hat{\Omega}(X, a, a_1)$ по этому соотношению эквивалентности. На пространстве $\Omega(X, a)$ действует фундаментальная группа $\pi_1(X, a)$ при помощи умножений справа. Для фиксированной группы $G \subset \pi_1(X, a)$ обозначим через $\Omega_G(X, a)$ пространство орбит действия группы G на $\Omega(X, a)$. Точки в $\Omega_G(X, a)$ — это элементы пространства $\hat{\Omega}(X, a, a_1)$, заданные с точностью до гомотопии с закрепленными концами

и умножения справа на элементы подгруппы G. В этом пространстве есть отмеченная точка $\tilde{a}$ — класс эквивалентности постоянной кривой $\gamma(t) \equiv a$. Отображение $f : (\Omega_G(X,a), \tilde{a}) \to (X,a)$, сопоставляющее кривой ее правый конец, является накрытием, обладающим требуемым свойством. Не будем останавливаться на провеке этого факта. Отметим лишь, что условия на пространство X необходимы для справедливости теоремы: если X несвязно, то отображение f не имеет пробразов над компонентами связности X, не содержащими точку a, если X не является локально-связным и локально-односвязным, то отображение $f : (\Omega_G(X,a), \tilde{a}) \to (X,a)$ может не являться локальным гомеоморфизмом.

2) Покажем, что накрытие $f : (Y,b) \to (X,a)$, для которого $f_*\pi_1(Y,b) = G \subset \pi_1(X,a)$, левоэквивалентно накрытию, построенному по погруппе G в первой части доказательства теоремы. Сопоставим точке $y \in Y$ любой элемент из пространства кривых $\Omega(Y,b,y)$ на Y, начинающихся в точке b, заканчивающихся в точке $y \in Y$ и определенных с точностью до гомотопии с закрепленными концами. Пусть $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ — две кривые из пространства $\Omega(Y,b,y)$, и $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1)^{-1} \circ \tilde{\gamma}_2$ — кривая, составленная из кривой $\tilde{\gamma}_2$ и из пройденой в обратном порядке кривой $\tilde{\gamma}_1$. Кривая $\tilde{\gamma}$ начинается и заканчивается в точке b, поэтому кривая $f \circ \tilde{\gamma}$ лежит в группе G. Следовательно, образ $f \circ \tilde{\gamma}$ произвольной кривой $\tilde{\gamma}$ из пространства $\Omega(Y,b,y)$ при проекции f является одной и той же точкой из пространства $\Omega_G(X,a)$ (т.е. кривой из пространства $\hat{\Omega}(X,a)$, определенной с точностью до гомотопии с закрепленными концами и умножения справа на элементы группы G). Итак, мы сопоставили точке $y \in Y$ точку пространства $\Omega_G(X,a)$. Легко проверить, что это сопоставление задает левую эквивалентность накрытия $f : (Y,b) \to (X,b)$ со стандартным накрытием, соответствующим подгруппе $G = f_*\pi_1(Y,b)$.

1.2. Накрытия с отмеченными точками и подгруппами фундаментальной группы. Теорема 1.3 показывает, что накрытия с отмеченной точкой над пространством X с отмеченной точкой a с точностью до левой эквивалентности классифицируются подгруппами G в фундаментальной группе $\pi_1(X,a)$. Обсудим соответствие между накрытиями с отмеченными точками и подгруппами фундаментальной группы.

Пусть $f : (Y,b) \to (X,a)$ — накрытие, соответствующее подгруппе $G \subset \pi_1(X,a)$, и $F = f^{-1}(a)$ — слой, лежащий над точкой a. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.4. *Слой F находится во взаимно однозначном соответствии с правыми классами смежности группы $\pi_1(X,a)$ по подгруппе G. Если точке c слоя F соответствует правый класс смежности h, то накрытию $f : (Y,c) \to (X,a)$ с отмеченной точкой c соответствует группа hGh^{-1}.*

Доказательство. На пространстве $\Omega(X,a,a)$ замкнутых кривых, начинающихся в точке a и определенных с точностью до гомотопии с закрепленными концами, действует группа G при помощи умножения справа. Согласно описанию накрытия, соответствующего группе G (см. п. 1 доказа-

тельства теоремы 1.3), прообразы точки a для этого накрытия — орбиты действия группы G на пространстве $\Omega(X, a, a)$, т.е. правые классы смежности группы $\pi_1(X, a)$ по подгруппе G.

Пусть $h : [0, 1] \to X$, $h(0) = a$, — кривая в пространстве X, и $\tilde{h} : [0, 1] \to Y$, $f\tilde{h} = h$, — поднятие этой кривой на Y, начинающееся в точке b, $\tilde{h}(0) = b$, и заканчивающееся в точке c, $\tilde{h}(1) = c$. Пусть $G_1 \subset \pi_1(X, a)$ — подгруппа, состоящая из кривых, поднятия которых на Y, начинающиеся в точке c, заканчиваются в той же точке c. Легко проверяются включения $hGh^{-1} \subseteq G_1$, $h^{-1}G_1h \subseteq G$, которые показывают, что $G_1 = hGh^{-1}$.

Скажем, что накрытие $f_2 : (Y_2, b_2) \to (X, a)$ *подчинено* накрытию $f_1 : (Y_1, b_1) \to (X, a)$, если существует непрерывное отображение $h : (Y_1, b_1) \to (Y_2, b_2)$, согласованное с проекциями f_1, f_2, т.е. такое, что $f_1 = f_2 \circ h$.

Лемма 1.5. *Накрытие, соответствующее подгруппе G_2, подчинено накрытию, соответствующему подгруппе G_1, если и только если выполняется включение $G_2 \supseteq G_1$.*

Доказательство. Пусть $\pi_1(X, a) \supseteq G_2 \supseteq G_1$, и пусть $f_2 : (Y_2, b_2) \to X$ — накрытие, соответствующее подгруппе G_2 в $\pi_1(X, a)$. По лемме 1.2, группа G_2 совпадает с фундаментальной группой $\pi_1(Y_2, b_2)$ пространства Y_2. Пусть $g : (Y_1, b_1) \to (Y_2, b_2)$ — накрытие, соответствующее подгруппе G_1 в фундаментальной группе $\pi_1(Y_2, b_2) = G_2$. Отображение $f_2 \circ g : (Y_1, b_1) \to (X, a)$ задает накрытие над (X, a), соответствующее подгруппе $G_1 \subset \pi_1(X, a)$. Поэтому накрытие $f_2 \circ g : (Y_2, b_2) \to (X, a)$ можно отождествить с накрытием $f_1 : (Y_1, b_1) \to (X, a)$. Мы доказали лемму в одну сторону. В противоположную сторону она проверяется аналогично.

Рассмотрим накрытие $f : Y \to X$, для которого Y связно, а X локально-связно и локально-односвязно. Пусть для некоторой точки $a \in X$ накрытие обладает следующим свойством: для любого выбора прообразов b и c точки a накрытия с отмеченными точками $f : (Y, b) \to (X, a)$ и $f : (Y, c) \to (X, a)$ эквивалентны. Тогда: 1) накрытие обладает этим свойством для любой точки $a \in X$, 2) накрытие $f : Y \to X$ нормально. Обратно, если накрытие нормально, то для любой точки $a \in X$ оно обладает этим свойством. Это утверждение непосредственно вытекает из определения нормального накрытия.

Лемма 1.6. *Накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует некоторому нормальному делителю H в фундаментальной группе $\pi_1(X, a)$. Для этого нормального накрытия группа гомеоморфизмов наложения изоморфна фактор-группе $\pi_1(X, a)/H$.*

Доказательство. Пусть накрытие $f : (Y, b) \to (X, a)$, соответствующее подгруппе $G \subset \pi_1(X, a)$, нормально. Тогда для любого прообраза c точки a это накрытие левоэквивалентно накрытию $f : (Y, c) \to (X, a)$. Согласно лемме 1.4, это означает, что группа G совпадает с любой своей сопряженной подгруппой. Следовательно, группа G является нормальным делителем в фундаментальной группе. Аналогично проверяется, что если G

— нормальный делитель в фундаментальной группе, то соответствующее этой группе накрытие нормально.

Гомеоморфизм наложения, переводящий точку b в точку c, единственен. Действительно, множество, на котором совпадают два таких гомеоморфизма, во-первых, открыто (так как f — локальный гомоморфизм), во-вторых, замкнуто (так как гомоморфизмы непрерывны) и, в-третьих, не пусто (так как содержит точку b). Так как пространство Y связно, это множество совпадает с Y.

Фундаментальная группа $\pi_1(X,a)$ действует правыми умножениями на пространстве $\Omega(X,a)$. Для всякого нормального делителя H это действие индуцирует действие на классах эквивалентности $\Omega_H(X,a)$ (класс эквивалентности $\Omega(X,a)H$ при умножении на элемент $g \in \pi_1(X,a)$ переходит в класс эквивалентности $\Omega(X,a)Hg = \Omega(X,a)gH$). Действие фундаментальной группы на $\Omega_H(X,a)$ согласовано с проекцией $f : \Omega_H(X,a) \to (X,a)$, сопоставляющей каждой кривой ее конец. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(X,a)$ действует на пространстве Y нормального накрытия $f : (Y,b) \to (X,a)$ гомоморфизмами наложения. Для накрытия, соответствующего нормальному делителю H, ядром этого действия является группа H, т.е. на пространстве такого накрытия эффективно действует фактор-группа $\pi_1(X,a)/H$. Действием фактор-группы можно перевести точку b в любой прообраз c точки a. Поэтому не существует никаких других гомоморфизмов наложения $h : Y \to Y$, кроме гомоморфизмов действия фактор-группы $\pi_1(X,a)/H$. Лемма доказана.

На слое $F = f^{-1}(a)$ накрытия $f : (Y,b) \to (X,a)$ действует фундаментальная группа $\pi_1(X,a)$. Определим это действие. Пусть γ — замкнутая кривая в пространстве X с началом и концом в точке a. Для каждой точки $c \in F$ обозначим через $\tilde{\gamma}_c$ поднятие кривой γ на Y, такое, что $\tilde{\gamma}_c(0) = c$. Отображение $S_\gamma : F \to F$, переводящее точку c в точку $\tilde{\gamma}_c(1) \in F$, является элементом группы $S(F)$ взаимно однозначных отображений множества F в себя. Отображение S_γ зависит лишь от гомотопического класса кривой γ, т.е. зависит от элемента фундаментальной группы $\pi_1(X,a)$, представленного кривой γ. Гомоморфизм $S_\gamma : \pi_1(X,a) \to S(F)$ называется *гомоморфизмом монодромии*, а образ фундаментальной группы в группе $S(F)$ называется *группой монодромии* накрытия $f : (Y,b) \to (X,a)$.

Пусть $f : (Y,b) \to (X,a)$ — накрытие, соответствующее подгруппе $G \subset \pi_1(X,a)$, $F = f^{-1}(a)$ — слой этого накрытия над точкой a, и $S(F)$ — группа перестановок слоя F. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.7. *Группа монодромии накрытия является транзитивной подгруппой в группе S_F и равна фактору группы $\pi_1(X,a)$ по наименьшему нормальному делителю H, содержащему группу G, т.е. $H = \bigcap\limits_{h \in \pi_1(X,a)} hGh^{-1}$.*

Доказательство. Группа монодромии транзитивна. Для доказательства надо для всякой точки $c \in F$ предъявить кривую γ, такую, что $S_\gamma(b) = c$. Возьмем произвольную кривую $\tilde{\gamma}$ на связном пространстве Y, соединяющую точку b с точкой c. В качестве кривой γ достаточно взять образ

кривой $\tilde{\gamma}$ при проекции f.

Непосредственно из определений видно, что при действии фундаментальной группы на слое F стационарной группой точки $b \in F$ является группа $G \subset \pi_1(X, a)$. Пусть $h \in \pi_1(X, a)$ — элемент в фундаментальной группе, переводящий точку b в точку $c \in F$. Тогда стационарная группа точки c равна hGh^{-1}. Ядро гомоморфизма монодромии H является пересечением стационарных групп всех точек слоя, т.е. $H = \bigcap_{h \in \pi_1(X,a)} hGh^{-1}$. Пересечение всех групп hGh^{-1} является наименьшим нормальным делителем, содержащим группу G.

1.3. Другие классификации накрытий. В этом пункте мы обсуждаем обычную классификацию накрытий (не имеющих отмеченных точек). Затем мы классифицируем накрытия и накрытия с отмеченными точками, подчиненные заданному нормальному накрытию. В конце пункта приводится описание промежуточных накрытий, непосредственно связывающее такие накрытия с подгруппами группы наложения, действующей на нормальном накрытии.

Два накрытия $f_1 : Y_1 \to X$ и $f_2 : Y_2 \to X$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, коммутирующий с проекциями f_1 и f_2, т.е. такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. Классифицируем накрытия со связным накрывающим пространством над связным, локально-связном и локально-односвязном пространством. Эта классификация сводится к аналогичной классификации для накрытий с отмеченными точками.

Лемма 1.8. *Накрытия с отмеченными точками эквивалентны как накрытия* (а не как накрытия с отмеченными точками!)*, если и только если подгруппы, соответствующие этим накрытиям, сопряжены в фундаментальной группе многообразия X.*

Доказательство. Пусть накрытия $f_1 : (Y_1, b_1) \to (X, a)$ и $f_2 : (Y_2, b_2) \to (X, a)$ эквивалентны как накрытия. Гомеоморфизм h должен переводить слой $f_1^{-1}(a)$ в слой $f_2^{-1}(a)$. Поэтому накрытие $f_1 : (Y_1, b_1) \to (X, a)$ эквивалентно как накрытие с отмеченной точкой накрытию $f_2 : (Y_2, h(b_1)) \to (X, a)$, где $f_2(h(b_1)) = f_2(b_2)$. Это означает, что группы, соответствующие исходным накрытиям с отмеченными точками, сопряжены.

Итак, *накрытия $f : Y \to X$*, где Y — связно, X — локально-связно и односвязно, *классифицируются подгруппами фундаментальной группы $\pi_1(X)$, определенными с точностью до сопряжения в группе $\pi_1(X)$* (группа $\pi_1(X)$, в отличие от группы $\pi_1(X, a)$, тоже определена с точностью до сопряжения).

При классификации накрытий с отмеченными точками и при классификации накрытий можно ограничиваться накрытиями, подчиненными данному нормальному накрытию. Определение соотношения подчиненности на накрытиях с отмеченными точками было дано выше. Можно определить аналогичное соотношение и для накрытий, по крайней мере, в случае, когда одно из накрытий нормально.

Скажем, что *накрытие $f : Y \to X$ подчинено нормальному накрытию $g : M \to X$*, если существует отображение $h : M \to Y$, коммутирующее с проекциями g и f, т.е. такое, что $g = f \circ h$. Ясно, что *накрытие подчинено нормальному накрытию, если и только если некоторая (или, что тоже самое, любая) группа из класса сопряженных подгрупп в фундаментальной группе пространсва X содержит нормальный делитель этой группы, соответствующий нормальному накрытию.*

Фиксируем в пространстве X отмеченную точку a. Пусть $g : (M, b) \to (X, a)$ — нормальное накрытие, соответствующее нормальному делителю H группы $\pi_1(X, a)$, и $N = \pi_1(X, a)/H$ — группа наложения этого нормального накрытия. Рассмотрим всевозможные накрытия и накрытия с отмеченными точками, подчиненные этому нормальному накрытию. На такие накрытия переносятся все классификационные теоремы. При этом роль фундаментальной группы $\pi_1(X, a)$ играет группа наложения N нормального накрытия.

Сопоставим подчиненному накрытию с отмеченной точкой подгруппу группы наложения N, равную образу при гомоморфизме факторизации $\pi(X, a) \to N$ подгруппы фундаментальной группы, соответствующей накрытию с отмеченной точной. Для описанного соответствия справедлива следующая теорема.

Теорема 1.9. *Соответствие между накрытиями с отмеченными точками, подчиненными заданному нормальному накрытию, и подгруппами группы наложения этого нормального накрытия взаимно однозначно.*

Подчиненные накрытия с отмеченными точками эквивалентны как накрытия, если и только если соответствующие им подгруппы группы наложения сопряжены в группе наложения.

Подчиненное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует некоторому нормальному делителю M группы наложения N. Группа наложения подчиненного нормального накрытия изоморфна фактор-группе N/M.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться уже доказаннымии “абсолютными” классификационными результатами и следующими свойствами факторизации групп.

Гомоморфизм факторизации устанавливает взаимно одозначное соответствие между всеми подгруппами исходной группы, содержащими ядро гомоморфизма, и всеми подгруппами фактор-группы. Это соответствие: 1) сохраняет частичный порядок по включению в множестве подгрупп, 2) переводит класс сопряженных подгрупп исходной группы в класс сопряженных подгрупп фактор-группы, 3) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями исходной группы, содержащими ядро гомоморфизма, и всеми нормальными делителями фактор-группы. При соответствии нормальных делителей из пункта 3 фактор исходной группы по нормальному делителю и фактор ее фактор-группы по соответствующему нормальному делителю изоморфны.

Пусть $f : M \to X$ — нормальное накрытие (как обычно, мы предполагаем, что M связно, а X локально-связно и локально-односвязно). *Промежуточным накрытием* между M и X назовем пространство Y вместе с отображением "на" $h_Y : M \to Y$ и проекцией $f_Y : Y \to X$, такими, что $f = f_Y \circ h$.

Введем два различных понятия эквивалентности промежуточных накрытий. Скажем, что два промежуточных накрытия $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ и $M \xrightarrow{h_2} Y_2 \xrightarrow{f_2} X$ эквивалентны *как поднакрытия накрытия* $f : M \to X$, если существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, делающий диаграмму коммутативной, т.е. такой, что $h_2 = h \circ h_1$ и $f_1 = h \circ f_2$. Скажем, что два поднакрытия эквивалентны как *накрытия над* X, если существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$ такой, что $f_1 = h \circ f_2$ (не требуется, чтобы гомеоморфизм h делал верхнюю часть диаграммы коммутативной).

Классификация промежуточных накрытий как поднакрытий эквивалентна классификации подчиненных накрытий с отмеченными точками. Действительно, если в пространсве M отметить какую-либо точку b, лежащую над точкой a, то в промежуточном накрывающем пространстве Y возникает инвариантно определенная отмеченная точка $h_Y(a)$.

Следующее утверждение является переформулировкой теорему 1.9.

Утверждение 1.10. *Промежуточные накрытия для нормального накрытия с группой наложения N, рассматриваемые как:*

1) поднакрытия, классифицируются подгруппами группы N;

2) накрытия над X, классифицируются классами сопряженных подгрупп группы N.

Подчиненное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует нормальному делителю M группы наложения N. Группа наложения подчиненного нормального накрытия изоморфна фактор-группе N/M.

Приведем еще одно описание всех промежуточных накрытий для нормального накрытия $f : M \to X$ с группой наложения N. Группа N является группой гомеорфизмов пространства M, обладающей следующим свойством дискретности: около каждой точки пространства M существует окрестность, такая, что ее образы под действием различных элементов группу N не пересекаются. В качестве такой окрестности около точки $z \in M$ достаточно взять компоненту связности прообраза при проекции $f : M \to X$ связной и односвязной окрестности точки $f(z) \in X$.

Для каждой подгруппы G группы N рассмотрим фактор-пространство M_G пространства M по действию группы G. Точка в M_G — это орбита действия группы G на пространстве M. Топология в M_G индуцируется из топологии в пространстве M. Окрестность орбиты состоит из всех орбит, лежащих в инвариантном открытом множестве U пространства M, содержащем исходную орбиту и таком, что компонента связности множества U пересекает каждую обриту не более чем по одной точке. Пространство M_N можно отождествить с пространством X, для этого надо

отождествить точку $x \in X$ с прообразом $f^{-1}(x) \subset M$, являющимся орбитой действия группы преобразований наложения N на M. При таком отождествлении отображение факторизации $f_{e,N} : M \to M_N$ превращается в исходное накрытие $f : M \to X$.

Пусть G_1, G_2 — две подгруппы в N, и пусть выполнено включение $G_1 \subseteq G_2$. Тогда определено отображение $f_{G_1,G_2} : M_{G_1} \to M_{G_2}$, сопоставляющее орбите группы G_1 содержащую ее орбиту группы G_2. Легко видеть, что:

1) отображение f_{G_1,G_2} является накрытием,

2) если $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3$, то $f_{G_1,G_3} = f_{G_2,G_3} \circ f_{G_1,G_2}$,

3) отображение $f_{G,N} : M_G \to M_N$ при отождествлении M_N с X переходит в накрытие, подчиненное исходному накрытию $f_{e,N} : M \to M_N$ (так как $f_{e,N} = f_{G,N} \circ f_{e,G}$),

4) если G — нормальный делитель в N, то накрытие $f_{G,N} : M_G \to M_N$ нормально и его группа наложения равна N/G.

С промежуточным накрытием $f_{G,N} : M_G \to M_N$ можно связать либо тройку пространств $M \xrightarrow{f_{e,G}} M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображениями $f_{e,G}$ и $f_{G,N}$, либо пару пространств $M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображением $f_{G,N}$. Эти две возможности соответствуют рассмотрению промежуточного накрытия как поднакрытия и как накрытия над M_N.

1.4. Аналогия между теорией Галуа и классификацией накрытий. В этом пункте обсуждается формальная аналогия между накрытиями и теорией Галуа.

В основной теореме теории Галуа рассматриваются алгебраические расширения основного поля, промежуточные между основным полем и его заданным расширением Галуа (а не все расширения основного поля одновременно).

В теории накрытий можно рассматривать накрытия базы, промежуточные между базой и ее заданным нормальным накрытием (а не все накрытия базы одновременно).

Классификации промежуточных накрытий как поднакрытий в теории Галуа соответствует классификация промежуточных полей как подполей расширения P. Чтобы это увидеть, нужно в утверждении 1.10 слова “нормальное накрытие”, “группа наложения”, “поднакрытие”, заменить, соответственно, на слова “расширение Галуа”, “группа Галуа”, “промежуточное поле”.

В параграфе 2 мы рассмотрим конечнолистные разветвленные накрытия над связными одномерными комплексными многообразиями. Разветвленные накрытия (с отмеченными точками или без отмеченных точек) над многообразием X, ветвления которых лежат над заданным дискретным множеством O, классифицируются так же, как накрытия (с отмеченными точками или без отмеченных точек) над $X \setminus O$ (см. п. 2.2). Конечнолистные разветвленные накрытия соответствуют алгебраическим расширениям поля мероморфных функций на X, для которых основная теорема теории Галуа и классификация поднакрытий не просто формально ана-

логичны, но тесно связаны между собой.

Отметим, что классификация промежуточных накрытий как накрытий над базой тоже имеет формальную аналогию в теории Галуа. Она аналогична классификации алгебраических расширений основного поля, которое можно вложить в заданное расширение Галуа (в этой классификации не учитывается, как именно алгебраическое расширение вкладывается в заданное расширение Галуа).

§2. Пополнение разветвленных накрытий римановы поверхности алгебраических функций

В этом параграфе рассматриваются конечнолистные разветвленные накрытия над одномерными комплексными многообразиями. Описывается операция пополнения накрытий над одномерным комплексным многообразием X, из которого удалено дискретное множество O. Она одинаково применима как к накрытиям, так и к накрытиям с отмеченными точками. В результате из конечнолистного накрытия над $X\backslash O$ получается разветвленное конечнолистное накрытие над X.

Локальный случай, в котором пополняются накрытия над открытым проколотым диском, рассматривается в п. 2.1. В локальном случае операция пополнения накрытий помогает доказать разложимость в ряды Пьюизо многозначных функций, имеющих алгебраическую особенность.

В пункте 2.2 рассматривается глобальный случай. Сначала определяется вещественная операция заклеивания дырок. Затем показывается, что полученное в результате применения вещественной операции заклеивания дырок разветвленное накрытие обладает естественной структурой комплексного многообразия.

В пункте 2.3 классифицируются конечнолистные разветвленные накрытия с фиксированным множеством ветвления. Классификация почти дословно повторяет аналогичную классификацию неразветвленных накрытий. Поэтому мы ограничиваемся лишь формулировками результатов. Мы доказываем, что множество орбит действия конечной группы на аналитическом многообразии имеет естественную структуру аналитического многообразия.

В пункте 2.4 мы применяем операцию пополнения накрытий для определения римановой поверхности неприводимого алгебраического уравнения над полем $K(X)$ мероморфных функций на многообразии X.

Параграф 2 опирается на результаты параграфа 1.

2.1. Заклеивание дырки и ряды Пьюизо. Пусть D_r — открытый диск радиуса r с центром в точке 0 на комплексной прямой, и $D_r^* = D_r \setminus \{0\}$ — проколотый диск. Для каждого натурального k рассмотрим проколотый диск D_q^*, где $q = r^{\frac{1}{k}}$, вместе с отображением $f : D_q^* \to D_r^*$, заданым формулой $f(z) = z^k$.

Лемма 2.1. *Существует единственное связное k-листное накрытие $\pi : V^* \to D_r^*$ над проколотым диском D_r^*. Это накрытие нормально. Оно эквивален-*

тно накрытию $f : D_q^* \to D_r^*$, где отображение f задано формулой $x = f(z) = z^k$.

Доказательство. Фундаментальная группа области D_r^* изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. В группе $\mathbb{Z}$ только подгруппа $k\mathbb{Z}$ имеет индекс k. Подгруппа $k\mathbb{Z}$ — нормальный делитель в группе $\mathbb{Z}$. Накрытие $z \to z^k$ проколотого диска D_q^* над проколотым диском D_r^* нормально и соответствует подгруппе $k\mathbb{Z}$.

Пусть $\pi : V^* \to D_r^*$ — связное k-листное накрытие над проколотым диском D_r^*. Обозначим через V множество, состоящее из области V^*, к которой добавлена точка A. Доопределим отображение π до отображения множества V на диск D_r, полагая $\pi(A) = 0$. Введем на множестве V минимальную топологию, такую, что 1) отождествление множества $V \setminus A$ с областью V^* является гомеоморфизмом, 2) отображение $\pi : V \to D_r$ непрерывно.

Лемма 2.2. *Отображение $\pi : V \to D_r$ левоэквивалентно отображению $f : D_q \to D_r$, определенному формулой $x = f(z) = z^k$. В частности, V гомеоморфно открытому диску D_q.*

Доказательство. Пусть $h : D_r^* \to V^*$ — гомеоморфизм, устанавливающий эквивалентность накрытий $\pi : V^* \to D_r^*$ и стандартного накрытия $f : D_q^* \to D_r^*$. Доопределим h до отображения диска D_q в множество V, полагая $h(0) = A$. Нам надо проверить, что доопределенное отображение h является гомеоморфизмом. Проверим, например, что h — непрерывное отображение. По определению топологии на V, во всякой окрестности точки A есть окрестность V_0 вида $V_0 = \pi^{-1}(U_0)$, где U_0 — окрестность точки 0 на комплексной прямой. Пусть $W_0 \subset D_q$ — открытое множество, определенное формулой $W_0 = f^{-1}U_0$. Имеем $h^{-1}V_0 = W_0$, что доказывает непрерывность отображения h в точке 0. Непрерывность h^{-1} доказывается аналогично.

Воспользуемся обозначениями из предыдущей леммы.

Лемма 2.3. *На многообразии V существует единственная структура аналитического многообразия, для которого отображение $\pi : V \to D_r$ аналитично. Эта структура индуцируется из аналитической структуры на диске D_q при помощи гомеоморфизма $h : D_q \to V$.*

Доказательство. Гомеоморфизм h переводит отображение π в аналитическое отображение $f(z) = z^k$. Таким образом, аналитическая структура на V, индуцированная при помощи гомеоморфизма h, удовлетворяет условию леммы. Рассмотрим какую-либо другую аналитическую структуру на V. Отображение $h : D \to V$ вне точки 0 локально представимо в виде $h(z) = \pi^{-1}z^k$ и, следовательно, аналитично. Итак, отображение $h : D \to V$ непрерывно и аналитично всюду кроме, может быть, точки 0. По теореме об устранимой особенности оно аналитично и в точке 0 и, следовательно, аналитическая структура на V, в которой проекция π аналитична, единственна.

Переход от вещественного многообразия V^* к вещественному многообразию V и переход от накрытия $\pi : V^* \to D_r^*$ к отображению $\pi : V \to D_r$ будем называть *вещественной операцией заклеивания дырки.* Лемма 2.3 показывает, что при заклеивании дырки на многообразии V существует единственная структура комплексного аналитического многообразия, для которого отображение $\pi : V \to D_r$ аналитично. Переход от комплексного многообразия V^* к комплексному многообразию V и переход от аналитического накрытия $\pi : V^* \to D_r^*$ к аналитическому отображению $\pi : V \to D_r$ будем называть *операцией заклеивания дырки.* Именно эта операция нам нужна для дальнейшего.

Операция заклеивания дырки тесно связана с определением алгебраической особой точки и с рядами Пьюизо. Остановимся на этом подробнее.

Скажем, что аналитический росток φ_a в точке $a \in D_r$ определяет многозначную функцию в диске D_r *с алгебраической особенностью* в точке 0, если: 1) росток φ_a продолжается вдоль кривой, начинающейся в точке a и лежащей в проколотом диске D_r^*, 2) многозначная функция φ в проколотом диске D_r^*, полученная продолжением ростка φ_a по кривым, лежащим в D_r^*, имеет конечное число k значений, 3) при приближении к точке 0 многозначная функция φ_a растет не быстрее чем степенным образом, т.е. существуют положительные числа C, N, такие, что любое из значений многозначной функции φ, удовлетворяет неравенству $|\varphi(x)| < C|x|^{-N}$.

Лемма 2.4. *Многозначная функция φ, имеющая алгебраическую особенность в проколотом диске D_r^*, представима в этом диске рядом Пьюизо*

$$\varphi(x) = \sum_{m > -m_0} c_m x^{\frac{m}{k}}.$$

Доказательство. Если функция φ аналитически продолжается по всем путям, лежащим в проколотом диске D_r^*, и имеет k различных значений, то росток $g_b = \varphi_a \circ z_b^k$, где $b^k = a$, задает однозначную функцию в проколотом диске D_q^*, где $q = r^{\frac{1}{k}}$. По условию функция g растет не быстрее чем степенным образом при подходе к точке 0, поэтому в проколотом диске D_q^* она представима рядом Лорана $g(z) = \sum_{m > -m_0} c_m z^m$. Подставляя в ряд для функции g вместо z функцию $x^{\frac{1}{k}}$, получим ряд Пьюизо для функции φ.

2.2. Отображения аналитического типа и вещественная операция заклеивания дырок. В этом пункте определяется вещественная операция заклеивания дырок. Показывается, что полученное в результате применения вещественной операции заклеивания дырок разветвленное накрытие имеет естественную аналитическую структуру.

Пусть X — одномерное комплексное аналитическое многообразия, M — двумерное вещественное многообразие, и $\pi : M \to X$ — непрерывное отображение. Скажем, что отображение π в точке $y \in M$ имеет *особенность аналитического типа кратности $k > 0$*, если существуют: 1) связная проколатая окрестность $U^* \subset X$ точки $x = \pi(y)$, 2) компонента связности

области $\pi^{-1}(U^*)$, являющаяся проколотой окрестностью $V^* \subset M$ точки y, такие, что тройка $\pi : V^* \to U^*$ является k-листным накрытием. Особой точке y естественно приписать *кратность* k как прообразу точки x: посчитанное с учетом кратностей число прообразов отображения π в окрестности особой точки аналитического типа кратности k постоянно и равно k.

Отображение $f : M \to X$ называется *отображением аналитического типа*, если в каждой точке оно имеет особенность аналитического типа. Очевидно, что комплексно-аналитическое отображение $f : M \to X$ комплексного многообразия M в комплексное многообразие X является отображением аналитического типа (если его рассматривать как непрерывное отображение вещественного многообразия M в комплексное многообразие X). Для отображения аналитического типа точка y называется *регулярной*, если ее кратность равна единице, и называется *особой*, если ее кратность k больше единицы. Множество регулярных точек отображения аналитического типа открыто. Отображение около регулярной точки является локальным гомеоморфизмом. Множество M_O особых точек отображения аналитического типа является дискретным помножеством в M.

Утверждение 2.5. *Пусть M — двумерное многообразие, и $f : M \to X$ — его отображение аналитического типа в одномерное аналитическое многообразие X. Тогда в M существует единственная структура аналитического многообразия, для которой отображение f аналитично.*

Доказательство. В точках открытого множество $M \setminus O_M$ отображение f является локальным гомеоморфизмом. Этот локальный гомеоморфизм с аналитическим многообразием X превращает $M \setminus O$ в аналитическое многообразие. Около точек множества O аналитическую структуру можно ввести также, как в прикленных точках при операции заклеивания дырки. Докажем, что других аналитических структур, для которых f аналитично, нет. Пусть M_1 и M_2 — две копии многообразия M с разными аналитическими структутами. Пусть O_1 и O_2 — выделенные дискретные подмножества в копиях M_1 и M_2 и $h : M_1 \to M_2$ — гомеоморфизм отождествления этих копий. Из условия видно, гомеоморфизм h является аналитическим отображением всюду, кроме дискретного множества $O_1 \subset M_1$. По теореме об устранимых особенностях, h — бигомоморфное отображение. Значит, две аналитические структуры на M совпадают.

Вернемся к операции заклеивания дырок. Пусть M — вещественное двумерное многообразие, и $f : M \to X$ — отображение аналитического типа многообразия M в комплексное многообразие X.

Около точки $a \in X$ фиксируем локальную координату u, $u(a) = 0$, задающую обратимое отображение малой окрестности точки $a \in X$ в малую окрестность нуля на комплексной прямой. Пусть U^* — прообраз малого проколотого диска D_r^* с центром в точке 0 при отображении u. Пусть среди компонент связности прообраза $\pi^{-1}(U^*)$ есть компонента V^*, ограничение отображения π на которую является k-листным накрытием,

где k — положительное число. В этом случае применима *вещественная операция заклеивания дырки*. Она состоит в следующем. Из многообразия M вырезается окрестность V^*. Накрытие $\pi : V^* \to U^*$ заменяется на отображение $\pi : V \to U$ при помощи описанной выше вещественной операции заклеивания дырки. Многообразие V^* лежит в многообразии V и отличается от V одной точкой. Вещественная операция заклеивания дырки состоит в приклеивании к многообразию M вместо вырезанной окрестности V^* окрестности V вместе с определенным на ней отображением $\pi : V \to X$.

Вещественная операция заклеивания дырок заключается в применении вещественной операции заклеивания дырки сразу ко всем дыркам одновременно. Она определена корректно: если V^* — компонента связности прообраза $\pi^{-1}(U^*)$ проколотой окрестности U^* точки $o \in X$ и отображение $\pi : V^* \to U^*$ — конечнолистное накрытие, то операция заклеивания всех дырок добавляет к замыканию области V^* ровно одну точку, лежащую над точкой o. Топология около этой новой точки определяется так же, как и при операции заклеивания одной дырки.

Операция заклеивания дырок — это комплексификация вещественной операции заклеивания дырок. Операция заклеивания дырок применима к комплесному аналитическому многообразию M, снабженному аналитическим отображением $f : M \to X$. Для этого тройку $f : M \to X$ надо рассматривать как отображение аналитического типа из вещественного многообразия M в X. К полученной тройке надо применить вещественную операцию заклеивания дырок. В результате получается вещественное многообразие $\tilde{M}$ вместе с отображением аналитического типа $\pi : \tilde{M} \to X$. Многообразие $\tilde{M}$ имеет единственную структуру комплексного многообразия, в которой отображение аналитического типа π является аналитическим. Именно это комплексное многообразие $\tilde{M}$ вместе с аналитическим отображением π является результатом применения операции заклеивания дырок к исходной тройке $f : M \to X$. В дальнейшем нам будет нужна именно операция заклеивания дырок, а не ее вещественный вариант.

Пусть X и M — одномерные комплексные многообразия, O — дискретное подмножество в X, и $\pi : M \to U$, где $U = X \setminus O$, — аналитическое отображение, являющееся конечнолистным накрытием. Пусть многообразие X связно (накрывающее многообразие M может быть несвязным).

Около каждой точки $o \in O$ можно взять малую проколотую окрестность U^*, не содержащую других точек множества O. Над проколотой окрестностью U^* возникает накрытие $f : V^* \to U^*$, где $V^* = f^{-1}(U^*)$. Многообразие V^* разбивается на компоненты связности V_i^*. Применим операцию заклеивания дырок. Над точкой $o \in O$ приклеется конечное число точек, равное числу компонент связности многообразия V^*.

Лемма 2.6. *В результате примененная операции заклеивания дырок к к-листному накрытию $\pi : M \to U$, где $U = X \setminus O$, получается комплексное многообразие $\tilde{M}$, снабженное собственным аналитическим отображением $\tilde{\pi} : \tilde{M} \to X$ степени k.*

Доказательство. Нужно проверить собственость отображения $\tilde{\pi}$. Прежде всего, это отображение аналитическое, поэтому образ каждого открытого множества при этом отображении открыт. Далее, число прообразов любой точки $x_0 \in X$ при отображении $\tilde{\pi}$, посчитанное с учетом кратностей, ровно k. Поэтому отображение $\tilde{\pi}$ собственно.

2.3. Конечнолистные разветвленные накрытия с фиксированным множеством ветвления. В этом пункте классифицируются конечнолистные разветвленные накрытия с фиксированным множеством ветвления.

Пусть X — связное комплексное многообразие с выделенным дискретным подмножеством O и отмеченной точкой $a \notin O$. Тройку, состоящую из комплексных многообразий M и X и собственного аналитического отображения $\pi : (M, b) \to (X, a)$, все критические значения которого содержится в множестве O, будем называть *разветвенным накрытием над X с ветвлением, лежащим над O.* Мы рассматриваем разветвленные накрытия с точностью с до левой эквивалентности. Другими словами, две троийки $\pi_1 : M_1 \to X$ и $\pi_2 : M_2 \to X$ считаются одинаковыми, если существует гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$, согласованный с проекциями π_1 и π_2, т.е. $\pi_1 = h \circ \pi_2$. *Гомеоморфизм h, устанавливающий эквивалентность разветвленных накрытий, автоматически является аналитическим отображением из многообразия M_1 в многообразие M_2.* Это доказывается так же, как утверждение 2.5.

Проколом ветвлений назовем операцию, сопоставляющую связному, разветвленному над O накрытию $\pi : M \to X$ не разветвленное накрытие $\pi : M \setminus \tilde{O} \to X \setminus O$ над $X \setminus O$, где $\tilde{O}$ — прообраз множества O при отображении π. Непосредственно из определений вытекает следующая лемма.

Лемма 2.7. *Операция прокола ветвлений и операция заклейки дырок взаимно обратны друг другу. Они устанавливают изоморфизм категории разветвленных накрытий над X с ветвлением, лежащим над множеством O, и категории конечнолистных накрытий над $X \setminus O$.*

На разветвленные накрытия переносятся все определения и утверждения о накрытиях. Это делается автоматически: достаточно применять лишь аргументы, использованные при доказательстве утверждения 2.5. Поэтому мы ограничимся формулировками определений и утверждений о разветвленных накрытиях.

Начнем с определений, относящихся к разветвленным накрытиям.

Разветленные накрытия $f_1 : M_1 \to X$, $f_2 : M_2 \to X$ с ветвлением, лежащим над O, называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$, такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. (При этом гомоморфизм h автоматически является аналитическим.)

Преобразованием наложения разветвленного накрытия $\pi : M \to X$ с ветвлением, лежашим над O, называется гомеоморфизм пространства M в себя, коммутирующий с отображением проекции π. (Преобразование наложения автоматически является аналитическим.)

Разветвленное накрытие $\pi : M \to X$ со связным многообразием M и с ветвлением, лежашим над O, называется *нормальным*, если группа его преобразований наложения транзитивно действует на слоях отображения π. Группа преобразований наложения автоматически является группой аталитических преобразований пространства M.

Разветленное накрытие $f_2 : M_2 \to X$ с ветвлением, лежащим над O, называется *подчиненным* нормальному разветленному накрытию $f_1 : M_1 \to X$ с ветвлением, лежащим над O, если существует разветвленное накрытие $h : M_1 \to M_2$ с ветвлением, лежащим над $f_2^{-1}(O)$, такое, что $f_1 = f_2 \circ h$. (При этом отображение h автоматически оказывается аналитическим.) В частности, такие накрытия называются *эквивалентными*,

Перейдем к определениям, относяшимся к накрытиям с отмеченными точками.

Тройка $\pi : (M, b) \to (X, a)$, в которой $\pi : M \to X$ — разветленное накрытие с ветвлением, лежащим над O, и $a \in X$, $b \in M$ — отмеченные точки, такие, что $a \notin O$ и $\pi(b) = a$, называется *разветвленным накрытием с отмеченными точками с ветвлением, лежащим над O.*

Разветленное накрытие $f_2 : (M_2, b_2) \to (X, a)$ с ветвлением, лежащим над O, называется *подчиненным* разветленному накрытию $f_1 : (M_1, b_1) \to (X, a)$ с ветвлением, лежащим над O, если существует разветвленное накрытие $h : (M_1, b_1) \to (M_2, b_2)$ с ветвлением, лежащим над $f_2^{-1}(O)$, такое, что $f_1 = f_2 \circ h$. (При этом отображение h автоматически оказывается аналитическим.) В частности, такие накрытия называются *эквивалентными*, если отображение h — гомеоморфизм. (Гомеоморфизм h автоматически является бианалитическим соответствием между M_1 и M_2.)

Операция прокола ветвлений сопоставляет разветвленному накрытию $f : (Y, b) \to (X, a)$ с отмеченными точками и разветвленному накрытию $\pi : M \to X$ с ветвлениями, лежащими над O, накрытие с отмеченными точками $f : (Y \setminus f^{-1}(O), b) \to (X \setminus O, a)$ и накрытие $\pi : M \setminus \pi^{-1}(O) \to X \setminus O$. С этими накрытиями над $X \setminus O$ связаны подгруппа конечного индекса в группе $\pi_1(X \setminus O, a)$ и, соответственно, класс сопряженных подгрупп конечного индекса в этой группе. Будем говорить, что эта группа соответствует разветвленному накрытию $f : (Y, b) \to (X, a)$ с отмеченными точками и что этот класс сопряженных подгрупп соответствует разветвленному накрытию $\pi : M \to X$.

Рассмотрим всевозможные разветвленные накрытия с отмеченной точкой, со связным накрывающим многообразием и над многообразием X с отмеченной точкой a, имеющие ветвление, лежащее над множеством O, $a \notin O$. Перенося доказанные утверждения о накрытиях с отмеченной точкой на разветвленные накрытия, получим, что:

1) *такие накрытия классифицируются подгруппами конечного индекса в группе $\pi_1(X \setminus O, a)$;*

2) такое накрытие, соответствующее подгруппе G_2, подчинено такому накрытию, соответствующему подгруппе G_1, если и только если выполняется включение $G_2 \supseteq G_1$;

3) такое накрытие нормально, если и только если соответствующая ему

подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ является ее нормальным делителем H. Группа наложения нормального разветвленного накрытия изоморфна группе $\pi_1(X \setminus O, a)/H$.

Рассмотрим всевозможные разветвленные накрытия над многообразием X со связным накрывающим многообразием, имеющие ветвление, лежащее над множеством O, $a \notin O$. Перенося доказанное утверждение об накрытиях на разветвленные накрытия, получим, что:

4) *такие разветвленные накрытия классифицируются классами сопряженности подгрупп конечного индекса в группе $\pi_1(X \setminus O, a)$*

На разветвленные накрытия дословно переносится *описание разветвленных накрытий, подчиненных данному нормальному разветвленному накрытию с группой наложения N*. Сопоставим подчиненному разветвленному накрытию с отмеченной точкой подгруппу группы наложения N, равную образу при гомоморфизме факторизации $\pi(X, a) \to N$ подгруппы фундаментальной группы, соответствующей разветвленному накрытию. Для описанного соответствия справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. *Соответствие между разветвленными накрытиями с отмеченными точками, подчиненными заданному нормальному накрытию, и подгруппами группы наложения этого нормального накрытия взаимно однозначно.*

Подчиненные разветвленные накрытия с отмеченными точками эквивалентны как разветвленные накрытия, если и только если соответствующие им подгруппы группы наложения сопряжены в группе наложения.

Подчиненное разветвленное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует некоторому нормальному делителю M группы наложения N. Группа наложения подчиненного нормального накрытия изоморфна фактор-группе N/M.

На разветвленные накрытия переносится понятие поднакрытия.

Пусть $f : M \to X$ — нормальное разветвленное накрытие (как обычно, мы предполагаем, что комплексное многообразие M связно). *Промежуточным разветвленным накрытием* между M и X называется комплексное многообразие Y вместе с отображением "на" $h_Y : M \to Y$ и проекцией $f_Y : Y \to X$ такими, что $f = f_Y \circ h$.

Скажем, что два промежуточных разветвленных накрытия $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ и $M \xrightarrow{h_2} Y_2 \xrightarrow{f_2} X$ эквивалентны *как разветвленные поднакрытия накрытия $f : M \to X$*, если существует аналитическое отображение $h : Y_1 \to Y_2$, делающее диаграмму коммутативной, т.е. такое, что $h_2 = h \circ h_1$ и $f_1 = h \circ f_2$. Скажем, что два разветвленных поднакрытия эквивалентны как *разветвленные накрытия над X*, если существует аналитическое отображение $h : Y_1 \to Y_2$, такое, что $f_1 = h \circ f_2$ (не требуется, чтобы отображение h делало верхнюю часть диаграммы коммутативной).

Классификация промежуточных разветвленных накрытий как разветвленных поднакрытий эквивалентна классификации подчиненных накрытий с отмеченными точками.

Действительно, если в многообразии M отметить какую-либо точку b, лежащую над точкой a, то в промежуточном накрывающем многообразии Y возникает инвариантно определенная отмеченная точка $h_Y(a)$.

Переформулируем утверждение 1.10.

Утверждение 2.9. *Промежуточные разветвленные накрытия для нормального разветвленного накрытия с группой наложения N, рассматриваемые как:*

1) разветвленные поднакрытия, классифицируются подгруппами группы N;

2) разветвленные накрытия над X, классифицируются классами сопряженных подгрупп группы N.

Подчиненное разветвленное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует нормальному делителю H группы наложения N. Группа наложения подчиненного разветвленного нормального накрытия изоморфна фактор-группе N/H.

Приведем еще одно описание всех разветвленные накрытий, подчиненных заданному нормальному разветвленному накрытию. Пусть $\pi : M \to X$ — нормальное конечнолистное разветвленное накрытие, группа преобразований наложения которого равна N.

Группа преобразований наложения N является группой аналитических преобразований многообразия M, коммутирующих с проекцией π, и индуцирующей транзитивную группу преобразований слоя отображения π. Преобразования из группу N могут иметь изолированные неподвижные точки, лежащие над множеством критических точек отображения π.

Лемма 2.10. *Множество M_N орбит действия группы наложения N на разветвленном нормальном накрытии M находится во взаимно однозначном соответсвии с многообразием X.*

Доказательство. На слое отображения $\pi : M \to X$ над каждой точкой $x_0 \notin O$ преобразования наложения действуют, по определению, транзитивно. Пусть $o \in O$ — точка в множестве ветвления. Пусть U^* — малый проколотый координатный диск вокруг точки o, не содержаший точек множества O. Прообраз $\pi^{-1}(U^*)$ области U^* разбивается на компоненты связности V_i^*, являющиеся проколотыми октестностями прообразов b_i точки o. Группа преобразований наложения транзитивно действует на областях V_i^*. Действительно, каждая из этих областей пересекается со слоем $\pi^{-1}(c)$, где c — любая точка из области U^*, а группа N транзитивно действует на слое $\pi^{-1}(c)$. Из транзитиности действия N на компонентах V_i^* вытекает транзитивность действия N на слое $\pi^{-1}(o)$.

Теорема 2.11. *Множество орбит M/G аналитического многообразия под действием конечной группы G аналитических преобразований имеет структуру аналитического многообразия.*

Доказательство. 1) Стационарная группа G_{x_0} любой точки $x_0 \in M$ при действии группу G циклическая. Действительно, рассмотрим гомомор-

физм группы G_{x_0} в группу линейных преобразований одномерного векторного пространства, сопоставляющий преобразованию его дифференциал в точке x_0. Это отображение не может иметь ядра: если начальные члены ряда Тэйлора преобразования f есть $f(x_0+h)=x_0+h+ch^k+\dots$, то начальные члены ряда Тэйлора l-ой итерации $f^{[l]}$ преобразования f есть $f^{[l]}=x_0+h+lch^k+\dots$. Поэтому никакая итерация преобразования f не будет тождественным преобразованием, что противоречит конечности группы G_{x_0}. Конечная группа линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^1$ — циклическая группа, порожденная умножением на один из первообразных корней из единицы ξ_m степени m, где m — порядок группы G_{x_0}.

2) Стационарную группу G_{x_0} точки x_0 можно линеаризовать, т.е. можно ввести локальную координату u около точки x_0, такую, что преобразования группы G_{x_0}, записанные в этой системе координат, линейны. Пусть f — образующая группы G_{x_0}. Тогда выполняется равенство $f^{[m]}\equiv Id$, где Id — тождественное преобразование. Дифференциал функции f в точке x_0 равен умножению на ξ_m, где ξ_m — один из первообразных кореней из единицы стенени m. Рассмотрим любую фунцию φ, дифференциал которой не равен нулю в точке x_0. С отображением f связан линейный оператор f^* на пространстве функций. Напишем резольвенту Лагранжа $R_{\xi_m}(\varphi)$ функции φ для действия оператора f^*: $R_{\xi_m}(\varphi)=\frac{1}{m}\sum\xi_m^{-k}(f^*)^k(\varphi)$. Функция $u=R_{\xi_m}(\varphi)$ является собственным вектором преобразования f^* с собственным числом ξ_m. Диффренциалы в точке x_0 у функций u и φ совпадают (это проверяется простым вычислением). Отображение f в координате u становится линейным, т.к. $f^*u=\xi_m u$.

3) Теперь просто ввести аналитическую структуру в пространстве орбит. Рассмотрим какую-либо орбиту. Пусть стационарные группы точек орбиты тривиальны. Тогда малая окрестность точки орбиты каждую обриту пересекает не более чем один раз. Локальная координата около этой точки параметризует соседние орбиты. Если у точки орбиты есть нетривиальная стационарная группа, то около точки можно выбрать локальную координату u так, чтобы в этой системе координат стационарная группа действовала линейно, умножая u на степени корня ξ_m. Соседние орбиты параметризуются функцией $t=u^m$. Теорема доказана.

С каждой подгруппой G группы N свяжем аналитическое многообразие M_G, являющееся пространством орбит действия группы G. Отождествим пространство M_N с пространством X. При этом отождествлении отображение факторизации $f_{e,N}: M\to M_N$ превращается в исходное разветвленное накрытие $f: M\to X$.

Пусть G_1, G_2 — две подгруппы в N, и пусть выполнено включение $G_1\subseteq G_2$. Тогда определено отображение $f_{G_1,G_2}: M_{G_1}\to M_{G_2}$, сопоставляющее орбите группы G_1 содержащую ее орбиту группы G_2. Легко видеть, что:

1) отображение f_{G_1,G_2} является разветвленным накрытием;

2) если $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3$, то $f_{G_1,G_3}=f_{G_2,G_3}\circ f_{G_1,G_2}$;

3) отображение $f_{G,N}: M_G\to M_N$ при отождествлении M_N с X переходит в разветвленное накрытие, подчиненное исходному разветвленному

накрытию $f_{e,N} : M \to M_N$ (так как $f_{e,N} = f_{G,N} \circ f_{e,G}$);

4) если G — нормальный делитель в N, то разветвленное накрытие $f_{G,N} : M_G \to M_N$ нормально и его группа наложения равна N/G.

С промежуточным разветвленным накрытием $f_{G,N} : M_G \to M_N$ можно связать либо тройку пространств $M \xrightarrow{f_{e,G}} M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображениями $f_{e,G}$ и $f_{G,N}$, либо пару пространств $M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображением $f_{G,N}$. Эти две возможности соответствуют рассмотрению промежуточного накрытия как разветвленного поднакрытия и как разветвленного накрытия над M_N.

2.4. Риманова поверхность алгебраического уравнения над полем мероморфных функций. Наша цель — геометрическое описание алгебраических расширений поля $K(X)$ мероморфных функций на связном одномерном комплексном многообразии X. В этом пункте мы построим риманову поверхность алгебраического уравнения над полем $K(X)$.

Пусть $T = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n$ — полином от переменной y над полем $K(X)$ мероморфных функций на X. Мы будем предполагать, что при разложении полинома T на неприводимые множители каждый множитель встречается с единичной кратностью. В этом случае дискриминант D полинома T является ненулевым элементом поля $K(X)$. Обозначим через O дискретное подмножество в X, содержащее все полюса коэффициентов a_i и все нули дискриминанта D. Для всякой точки $x_0 \in X \setminus O$ полином $T_{x_0} = y^n + a_1(x_0)y^{n-1} + \cdots + a_n(x_0)$ имеет в точности n различных корней. *Римановой поверхностью* уравнения $T = 0$ называется n-листное разветвленное накрытие $\pi : M \to X$ и мероморфная функция $y : M \to \mathbb{C}P^1$, такие, что для каждой точки $x_0 \in X \setminus O$ множество корней полинома $T_{x_0} = 0$ совпадает с множеством значений функции y на прообразе $\pi^{-1}(x_0)$ точки x_0 при проекции π. Покажем, что риманова поверхность уравнения существует и единственна (с точностью до аналитического гомеоморфизма, коммутирующего с проекциями в X и функциями y).

В декартовом произведении $(X \setminus O) \times \mathbb{C}^1$ определены проекция π на первый сомножитель и функция y, являющаяся проекцией на второй сомножитель. Рассмотрим в декартовом произведении гиперповерхность M_O, заданную уравнением $T(\pi(a), y(a)) = 0$. Частная производная T по y в любой точки гиперповерхности M_O не равна нулю, так как полином $T_{\pi(a)}$ имеет некратные корни. По теореме о неявной функции, гиперповерхность M_O неособа и ее проекция на $X \setminus O$ является локальным гомеоморфизмом. На многообразии M_O определены проекция $\pi : M_O \to X \setminus O$ и функция $y : M_O \to \mathbb{C}^1$. Применяя к накрытию $\pi : M_O \to X \setminus O$ операцию заклеивания дырок, получим n-листное разветленное $\pi : M \to X$.

Теорема 2.12. *Функция $y : M_O \to \mathbb{C}^1$ продолжается до мероморфной функции $y : M \to \mathbb{C}P^1$. Разветвленное накрытие $\pi : M \to X$, снабженное мероморфной функцией $y : M \to \mathbb{C}P^1$, является римановой поверхностью уравнения $T = 0$. Других римановых поверхностей у уранения $T = 0$ нет.*

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.13 (из школьной математики). *Всякий корень y_0 уравнения $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ удовлетворяет неравенству $|y_0| < \max(1, \sum |a_i|)$.*

Доказательство. Если $|y_0| > 1$ и $y_0 = -a_1 - \cdots - a_n y^{1-n}$, то $|y_0| < \max(1, \sum |a_i|)$.

Переходим к доказательству теоремы. Функции $\pi^* a_i$ мероморфны на M. В проколотой окрестности каждой точки функция y удовлетворяет неравенству $|y| < \max(1, \sum |\pi^* a_i|)$ и, следовательно, имеет в каждой приклеенной точке либо полюс, либо устранимую особенность.

По постоению тройка $\pi : M_O \to X \setminus O$ является n-листным накрытием и для каждого $x_0 \in X \setminus O$ множество корней полинома T_{x_0} совпадает с образом множества $\pi^{-1}(x_o)$ при отображении $y : M_O \to \mathbb{C}P^1$. Поэтому разветвленное накрытие $\pi : M \to X$, снабженное мероморфной функцией $y : M \to \mathbb{C}P^1$, является римановой поверхностью уравнения $T = 0$.

Пусть разветвленное накрытие $\pi_1 : M_1 \to X$ и функция $y_1 : M_1 \to \mathbb{C}P^1$ представляют собой другую риманову поверхность этого уравнения. Обозначим через O_1 множество $\pi_1^{-1} O$. Существует естественное взаимно однозначное отображение $h_1 : M_O \to M_1 \setminus O_1$, коммутирующее с проектсиями $\pi_1 \circ h_1 = \pi$, $y_1 \circ h_1 = y$. Действительно, по определению римановой поверхности, множества чисел $\{y \circ \pi^{-1}(x)\}$ и $\{y_1 \circ \pi_1^{-1}(x)\}$ совпадают с множеством корней полинома $T_{\pi(x)}$. Легко видеть, что отображение h_1 непрерывно и что оно продолжается по непрерывности до аналитического гомеоморфизма $h : M \to M_1$, коммутирующего с проекциями $\pi_1 \circ h = \pi$, $y_1 \circ h = y$. Теорема доказана.

Замечание. Иногда одно многообразие M, фигурирующее в определении римановой поверхности уравнения, называют римановой поверхностью уравнения. Это же многообразие называют *римановой поверхностью функции y*, удовлетворяющей уравнению. Когда это не приводит к недоразумению, мы будем пользоваться этой многозначной терминологией.

Множество $\tilde{O}$ критических значений разветвленного накрытия $\pi : M \to X$, связанного с римановой повервностью уравнения $T = 0$, может оказаться строго меньше, чем множество O, фигурирующее в его построении (включение $\tilde{O} \subseteq O$ выполняется всегда). Множество $\tilde{O}$ называется *множеством ветвления уравнения $T = 0$*. Над точкой $a \in X \setminus \tilde{O}$ уравнение $T_a = 0$ может иметь кратные корни, однако в поле ростков мероморфных функций в точке $a \in X \setminus \tilde{O}$ уравнение $T = 0$ имеет лишь некратные корни и их число равно степени уравнения $T = 0$. *Каждый из мероморфных ростков в точке a, удовлетворяющих уравнению $T = 0$, соответствует точке римановой поверхности уравнения, лежащей над точкой a.*

§3. Конечнолистные разветвленные накрытия и алгебраические расширения полей мероморфных функций

Пусть $\pi : M \to X$ — конечнолистное разветвленное накрытие. Теория Галуа и теорема существования Римана позволяют описать связь поля $K(M)$ мероморфных функций на M с полем $K(X)$ мероморфных функций на

X. Поле $K(M)$ является алгебраическим расширением поля $K(X)$, и каждое алгебраическое расширение поля $K(X)$ получается таким способом. Этот параграф посвящен связи между конечнолистными разветвленными накрытиями над многообразием X и алгебраическими расширениями поля $K(X)$.

В пункте 3.1 определяется поле $P_a(O)$, состоящее из мероморфных ростков в точке $a \in X$, которые мероморфно продолжаются до конечнозначных функций на $X \setminus O$, имеющих алгебраические особенности в точках множества O.

В пункте 3.2 рассматривается действие группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ на поле $P_a(O)$ и к действию этой группы автоморфизмов применяются результаты теории Галуа. Описывается соответствие между подполями поля $P_a(O)$, являющимися алгебраическими расширениями поля $K(X)$, и подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O, a)$. Доказывается, что это соответствие является взаимно однозначным (в доказательстве, кроме теориии Галуа, используется теорема существования Римана). Показывается, что риманова поверхность уравнения, ветвление которой находится над множеством O, связна, если и только если уравнение неприводимо. При этом поле мероморфных функций на римановой поверхности неприводимого уравнения совпадает с алгебраическим расширением поля $K(X)$, полученным присоединением корня этого уравнения.

В пункте 3.3 показывается, что поле мероморфных фукций на всяком связном разветвленном конечнолистном накрытии над X является алгебраическим расширением поля X, причем разным накрытиям соответствуют разные расширения.

3.1. Поле $P_a(O)$ ростков в точке a алгебраических функций, ветвящихся над множеством O. Пусть X — связнное комплексное многообразие, O — дискретное подмножество в X, и a — отмеченная точка в X, не принадлежащая множеству O.

Обозначим через $P_a(O)$ совокупность ростков мероморфных функций в точке a, обладающих следующими свойствами. Росток φ_a принадлежит $P_a(O)$, если:

1) росток φ_a мероморфно продолжается вдоль любой кривой, начинающейся в точке a и лежащей в $X \setminus O$,

2) для ростка при φ_a существует подгруппа $G_0 \subset \pi_1(X, a)$ конечного индекса в группе $\pi_1(X \setminus O, a)$, такая, что при продолжении ростка φ_a вдоль кривой из подгруппы G_0 получается исходный росток φ_a,

3) многозначная аналитическая функция на $X \setminus O$, получающаяся при продолжении ростка φ_a, имеет в точках множества O алгебраические особые точки.

Подробнее о свойстве 3. Пусть $\gamma : [0, 1] \to X$ — любая кривая, идущая из точки a в особую точку $o \in O$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = 0$, по области $X \setminus O$, т.е. при $t < 1$, $\gamma(t) \in X \setminus O$. Свойство 3 означает, что для значений параметра t, достаточно близких к единице, $t_0 < t < 1$, ростки, полученные при мероморфном продолжении φ_a вдоль кривой γ до точки t, будут

аналитическими, что они в малой проколотой окрестности V_o^* точки o определят k-значную аналитическую фуккцию ϕ_γ. Ограничение функции ϕ_γ на малый проколотый координатный диск $D^*_{|u|<r}$ с центом в точке o, где u — локальная координатная функция около точки o, $u(o)=0$, должно иметь алгебраическую особенность в смысле определения из п. 2.1. Последнее условие не зависит от выбора координатной функции u. Оно означает, что функция ϕ_γ раскладывается в ряд Пьюизо по u (т.е. она растет не быстрее чем степенным образом при подходе к точке o).

Лемма 3.1. *Множество ростков $P_a(O)$ является полем. На поле $P_a(O)$ действует фундаментальная группа G области $X\setminus O$ при помощи операции мероморфного продолжения. Полем инвариантов относительно этого действия является поле мероморфных функций на многообразии X.*

Доказательство. Пусть ростки $\varphi_{1,a}$ и $\varphi_{2,a}$ лежат в множестве $P_a(O)$ и не меняются при продолжениях вдоль подгрупп G_1, G_2 конечного индекса в группе $G=\pi_1(X\setminus O,a)$. Тогда ростки $\varphi_{1,a}\pm\varphi_{2,a}$, $\varphi_{1,a}\varphi_{2,a}$ и $\varphi_{1,a}/\varphi_{2,a}$ (росток $\varphi_{1,a}/\varphi_{2,a}$ определен, если $\varphi_{2,a}$ не равен тождественно нулю) мероморфно продолжаются вдоль любой кривой, начинающейся в точке a и лежащей в области $X\setminus O$, и не меняются при продолжении вдоль подгруппы $G_1\cap G_2$ конечного индекса в группе $G=\pi_1(X\setminus O,a)$.

Многозначные функции, определенные этими ростками, имеют алгебраические особенности в точках множества O, т.к. ростки функций, представимых рядами Пьюизо, образуют поле. (Разумеется, нельзя производить арифметические операции над многозначными функциями. Однако, для фиксированной кривой, входящей в точку 0, можно производить арифметические операции над фиксированными ветвями функций, раскладывающихся в ряды Пьюизо. В результате получится ветвь функции, представимой рядом Пьюизо.)

Итак, мы показали, что $P_a(O)$ является полем. Мероморфное продолжение сохраняет арифметические операции. Поэтому фундаментальная группа G действует на $P_a(O)$ автомофризмами. Поле инаврианов состоит из ростков поля $P_a(O)$, являюшихся ростками мероморфных функций в области $X\setminus O$. В точках множества O эти однозначные функции имеют алгебраические особенности и являются, следовательно, мероморфными функциями на многообразии X. Лемма доказана.

3.2. Теория Галуа действия фундаментальной группы на поле $P_a(O)$. В этом пункте мы применим теорию Галуа к действию фундаментальной группы $G=\pi_1(X\setminus O,a)$ на поле $P_a(O)$.

Теорема 3.2. *1) Каждый элемент φ_a поля $P_a(O)$ алгебраичен над полем $K(X)$. 2) Множество ростков в точке a, удовлетворяющих тому же неприводимому уравнению, что и росток φ_a, совпадает с орбитой ростка φ_a при действии группы G. 3) Росток φ_a лежит в поле, полученном присоединением к полю $K(X)$ элемента f_a поля $P_a(O)$, если и только если при действии группы G стационарная группа ростка φ_a содержит стационарную группу ростка f_a.*

Доказательство. Доказательство пунктов 1 и 2 получается применением теоремы 3.2 из главы 2, пункта 3 — применением теоремы 3.6 из главы 2.

Пункт 1 теоремы 3.2 можно переформулировать следующим образом.

Утверждение 3.3. *Мероморфный росток в точке a лежит в поле $P_a(O)$, если и только если он удовлетворяет неприводимому уравнению $T = 0$, множество точек ветвления которого содержится в множестве O.*

Пункт 2 теоремы 3.2 эквивалентен следующему утверждению.

Утверждение 3.4. *Уравнение $T = 0$, множество точек ветвления которого содержится в множестве O, неприводимо, если и только если риманова поверхность этого уравнения связна.*

Доказательство. Пусть $f : M \to X$ — риманова поверхность уравнения, множество точек ветвления которого содержится в множестве O. Согласно пункту 2 теоремы, уравнение неприводимо, если и тольно если многообразие $M \backslash f^{-1}(O)$ связно. Действительно, связность накрывающего пространства эквивалентна тому, что слой $F = f^{-1}(a)$ лежит в одной компоненте связности накрывающего пространства. Это, в свою очередь, эквивалентно транзитивности действия группы монодромии на слое F. Осталось заметить, что многообразие M связно, если и только если связно многообразие $M \backslash f^{-1}(O)$, полученное выбрасыванием из M дискретного подмножества.

Утверждение 3.5. *Подполе поля $P_a(O)$ является нормальным расширением поля $K(X)$, если и только если оно получено присоединением к $K(X)$ всех ростков в точке a многозначной функции на X, удовлетворяющих неприводимому алгебраическому уравнению $T = 0$ над $K(X)$, ветвление которого содержится в O. Группа Галуа этого нормального расширения изоморфна группе монодромии римановой поверхости уравнения $T = 0$.*

Доказательство. Нормальное расширение всегда получается присоединением всех корней неприводимого уравнения. В ситуации утверждения ветвление этого уравнения должно содежаться в O. Как группа Галуа нормального расширения, так и группа монодромии уравнения $T = 0$ изоморфны образу фундаментальной группы $\pi_1(X\vee, a)$ на обрбите ее действия на поле $P_a(O)$, состоящей из всех ростков в точке a, удовлетворяющих уравнению $T = 0$.

Рассмотрим риманову поверхность уравнения $T = 0$, которому удовлетворяет росток $\varphi_a \in P_a(O)$. Точки этой римановой поверхности, лежащие над точкой a, соответствуют корням уравнения $T = 0$ в поле $P_a(O)$. Росток φ_a — один из этих корней. Итак, мы сопоставили каждому ростку φ_a поля $P_a(O)$, во-первых, разветвленное накрытие $\pi_{\varphi_a} : M_{\varphi_a} \to X$, множество критических точек которого содержится в O, во-вторых, отмеченную точку $\varphi_a \in M_{\varphi_a}$, лежащую и над точкой a (мы обозначаем символом φ_a точку римановой поверхности, соответствующую ростку φ_a). Пункт 3 теоремы 3.2 можно переформулировать следующим образом.

Утверждение 3.6. *Росток φ_a лежит в поле, полученном присоединением к полю $K(X)$ элемента f_a поля $P_a(O)$, если и только если разветвленное накрытие $\pi_{\varphi_a} : (M_{\varphi_a}, \varphi_a) \to (X, a)$ подчинено разветвленному накрытию $\pi_{f_a} : (M_{f_a}, f_a) \to (X, a)$.*

Действительно, согласно классификации разветвленных накрытий с отмеченными точками, накрытие, соответствующее ростку φ_a, подчинено накрытию, соответствующему ростку f_a, если и только если стационарная группа ростка φ_a при действии фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O)$ содержит стационарную группу ростка f_a.

Следствие 3.7. *Поля, полученные присоединением к полю $K(X)$ элементов φ_a и f_a поля $P_a(O)$, совпадают, если и только если разветвленные накрытия с отмеченными точками $\pi_{\varphi_a} : (M_{\varphi_a}, \varphi_a) \to (X, a)$ и $\pi_{f_a} : (M_{f_a}, f_a) \to (X, a)$ эквивалентны.*

Верно ли, что для любой погруппы G, имеющей конечный индекс в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O)$, существует росток $f_a \in P_a(O)$, стационарная группа которого равна G?

Ответ на этот вопрос положителен. Одной теории Галуа для доказательства этого факта недостаточно: чтобы алгебраические рассуждения было к чему применять, необходимо иметь много мероморфных функций на многообразии.* Нам будет достаточно сформулированного ниже факта, который мы будем называть теоремой существования Римана и применять без доказательства. (Доказательство использует функциональный анализ и совсем не алгебраично. Отметим, что есть двумерные компактные комплексные аналитические многообразия, единственными мероморфными функциями на которых являются константы.)

Теорема существования Римана. *Для всякого конечного подмножества любого одномерного аналитического многообразия существует функция, мероморфная на многообразии, аналитичная в окрестности подмножества и принимающая в разных точках подмножества разные значения.*

Теорема 3.8. *Для любой погруппы G конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O)$ существует росток $f_a \in P_a(O)$, стационарная группа которого равна G.*

Доказательство. Пусть $\pi_1(M, b) \to (X, a)$ — конечнолистное разветвленное нактрытие над X, критические значения которого лежат в O и которое соответствует подгруппе $G \subset \pi_1(X \setminus O)$. Обозначим через $F = f^{-1}(a)$ слой накрытия над точкой a. По теореме существования Римана, на многообразии M существует мероморфная функция, принимающая различные значения в точках множества F. Пусть $\pi_{b,a}^{-1}$ — росток отображения,

*Теория Галуа позволяет получить следующий результат. Пусть для подгруппы G ответ на вопрос положителен, и пусть $f_a \in P_a(O)$ — росток, стационарная группа которого равна G. Тогда для всякой группы, содержащей группу H, где H — наибольший нормальный делитель, лежащий в группе G, ответ тоже положителен. Для доказательства нужно применить основную теорему теории Галуа для минимального расширения Галуа поля $K(X)$, содержащего росток f_a.

обратный к проекции π и переводящий точку a в точку b. Росток функции $f \circ \pi_{b,a}^{-1}$, по построению, лежит в поле $P_a(O)$, и его стационарная группа при действии фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O)$ равна группе G.

Итак, мы показали, что классификация алгебраических расширений поля $K(X)$ мероморфных функций на многообразии X, содержащихся в поле $P_a(O)$, эквивалентна классификации разветвленных конечнолистных накрытий $\pi : (M, b) \to (X, a)$, критические значения которых лежат в множестве O. И те, и другие объекты классифицируются подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O, a)$. В частности, спаведлива следующая теорема.

Теорема 3.9. *Соответствие между подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе и алгебраическими расширениями поля $K_a(M)$, лежащими в поле $P_a(O)$, взаимно однозначно. Если подгруппа G_1 лежит в подгруппе G_2, то поле, соответствующее группе G_2, лежит в поле, соответствующем подгруппе G_1. Подполе в $P_a(O)$ является расширением Галуа поля $K_a(X)$, если ему соответствует некоторый нормальный делитель H фундаментальной группы. Группа Галуа этого расширения изоморфна факторгруппе $\pi_1(X \setminus O, a)/H$.*

3.3. Поле функций на разветвленном накрытии. Здесь мы показываем, что неприводимые алгебраические уравнения над полем $K(X)$ задают изоморвные расширения этого поля, если и только если римановы поверхности этих уравнений задают эквивалентные разветвленные накрытия над многообразием X.

Из утверждения 3.4 вытекает следующее следствие.

Следствие 3.10. *Алгебраическое уравнение над полем $K(X)$ неприводимо, если и только если его риманова поверхность связна.*

Пусть $\pi : (M, b) \to (X, a)$ — конечнолистное накрытие с отмеченными точками, многообразие M связно, и точка a не принадлежит множеству критических значений отображения π. Применим результаты о поле $P_a(O)$ и его подполях для описания поля мероморфных функция на M. Здесь полезна следующая конструкция.

Обозначим через $\pi_{b,a}^{-1}$ росток в точке a обратного отображения к проекции π, переводящего точку a в точку b. Пусть $K_b(M)$ — поле ростков в точке b мероморфных функций на многообразии b. Это поле изоморфно полю $K(M)$. Отображение $(\pi_{b,a}^{-1})^*$ вкладывает поле $K_b(M)$ в поле $P_a(O)$. Выбирая различные прообразы b точки a, мы получим различные вложения поля $K(M)$ в поле $P_a(O)$.

Пусть уравнение $T = 0$ неприводимо над полем $K(X)$. Тогда его риманова поверхность M связна и мероморфные функции на ней образуют поле $K(M)$. Поле $K(M)$ содержит подполе $\pi^*(K(X))$, изоморфное полю мероморфных функций на многообразии M. Пусть $y : M \to \mathbb{C}P^1$ — мероморфная функция, фигурирующая в определении римановой поверхности. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.11. *Поле $K(M)$ мероморфных функций на поверхности M порождено функцией y над своим подполем $\pi^*(K(X))$. Функция y удовлетворяет неприводимому алгебраическому уравнению $T = 0$ над подполем $\pi^*(K(X))$.*

Доказательство. Пусть $b \in M$ — точка на многообразии M, проектирующаяся в точку a, $\pi(b) = a$, и $\pi_{b,a}^{-1}$ — росток в точке a обратного отображения, переводящего точку a в точку b. Обозначим через $K_b(M)$ поле ростков в точке b мероморфных функций на многообразии b. Это поле изоморфно полю $K(M)$. Отображение $(\pi_{b,a}^{-1})^*$ вкладывает поле $K_b(M)$ в поле $P_a(O)$.

Для каждой мероморфной функции $g : M \to \mathbb{C}P^1$ росток $g_b \circ \pi_a^{-1}$ лежит в поле $P_a(O)$. Стационарная группа этого ростка относительно действия группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ содержит стационарную подгруппу точки b относительно действия группы монодромии. Для ростка $y_b \circ \pi_a^{-1}$ стационарная группа равна стационарной группе точки b при действии группы монодромии, так как функция y, по определению, принимает различные значения в точках слоя $\pi^{-1}(a)$. Теперь утверждение вытекает из пункта 2 теоремы 3.2.

Теорема 3.12. *Неприводомые уравнения $T_1 = 0$ и $T_2 = 0$ над полем $K(X)$ задают изоморфные расширения этого поля, если и только если разветвленные накрытия $\pi_1 : M_1 \to X$ и $\pi_1 : M_1 \to X$, фигурирующие в определении римановых поверхностей этих уравнений, задают эквивавентные разветвленные накрытия над многообразием X.*

Доказательство. Точки римановых поверностей уравнений $T_1 = 0$ и $T_2 = 0$, лежащие над почти каждой точкой x многообразия X, однозначно задаются значениями корней y_1 и y_2 уравнений $T_1 = 0$ $T_2 = 0$ над точкой x. Если уравнения $T_1 = 0$ и $T_2 = 0$ определяют одинаковые расширения поля $K(X)$, то $y_1 = Q_1(y_2)$ и $y_2 = Q_2(y_1)$, где Q_1, Q_2 — полиномы с коэффициентами из поля $K(X)$. Эти полиномы задают определенное почти над каждой точкой x обратимое отображение одной римановой поверхности в другую, которое коммутирует с проекциями этих поверхностей на X. По непрерывности оно продолжается до изоморфизма накрытий.

Если римановы поверхности уравнений имеют эквивалентные накрытия, то отображение $h : M_1 \to M_2$, устанавливающее эквивалентность, коммутирует с проекциями и поэтому аналитично. Отображение $h^*(K(M_2) \to (K(M_1)$ устанавливает изоморфизм полей $K(M_1)$ и $K(M_2)$ и переводит подполе $\pi_2^*(K(X))$ в подполе $\pi_1^*(K(X))$, так как $\pi_1 = \pi_2 \circ h$.

§4 Геометрия теории Галуа для расширений поля мероморфных функций

В этом параграфе мы подводим итоги. В пункте 4.1 мы обсуждаем связь между нормальными разветвленными накрытиями над связным комплексным многообразием X и расширениями Галуа поля $K(X)$. В пункте 4.2 эта связь применяется для описания расширений поля сходящихся рядов Лорана.

В пункте 4.3 идет речь о компактных одномерных комплексных многообразиях. Теория Галуа помогает описать поле мероморфных функций на компактном многообразии, а геометрия разветвленных накрытий позволяет достаточно явно описать все алгебраические расширения поля рациональных функций от одного переменного.

Группа Галуа расширения поля рациональных функций совпадает с группой монодромии римановой поверхности алгебраической функции, задающей это расширение. Поэтому теория Галуа доставляет топологическое препятствие к представимости алгебраических функций в радикалах.

4.1. Расширения Галуа поля $K(X)$. Согласно теореме 3.12, алгебраические расширения поля мероморфных функций на связном комплексном многообразии X имеют прозрачную геометрическую классификацию, совпадающую с классификацией связных конечнолистных разветвленных накрытий над многообразием X. При этом расширениям Галуа поля $K(X)$ соответствуют нормальные разветвленные накрытия многообразия X. Опишем геометрически все промежуточные расширения для таких расширений Галуа.

Пусть X — связное аналитическое многообразие, $\pi : M \to X$ — связное нормальное разветвленное конечнолистное накрытие над X, O — конечное множество в X, содержащее все критические значения отображения π, и $a \in X$ — любая точка, не лежащая в O. Мы имеем поле мероморфных функций $K(X)$ на многообразии X и его расширение Галуа — поле $K(M)$ мероморфных функций на многообразии M.

Согласно утверждению 2.9 из этой главы, промежуточные разветвленные накрытия $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами группы N преобразования наложения нормального накрытия $\pi : M \to X$. С каждым промежуточным накрытием $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ связано подполе $h_1^*(K(Y_1))$ поля $K(M)$ мероморфных функций на многообразии M. Из основной теоремы теории Галуа видно, что каждое промежуточное поле между полями $K(M)$ и $\pi^*K(X)$ имеет такой вид, т.е. является полем $h^*(K(Y))$ для некоторого промежуточного разветвленного накрытия $M \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} X$. При этом промежуточные расширение Галуа соответствуют промежуточным нормальным накрытиям $M \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} X$, а группы Галуа промежуточных расширений Галуа равны группам преобразования наложения соответствующих промежуточных нормальных накрытий.

Вот немного другое описание того же расширения Галуа. На нормальном разветвленном накрытии M действует конечная группа автоморфизмов N наложения. С каждой подгруппой G гуппы N связано подполе $K_N(M)$ меморорфных функций на M, инвариантных относительно группы G.

Утверждение 4.1. *Поле $K(M)$ является расширением Галуа поля $K_N(M) = \pi^*(K(X))$. Группа Галуа этого расширения Галуа равна N. При соответ-*

ствии Галуа подгруппе $G \subset N$ соответствует поле $K_G(M)$.

4.2. Алгебраические расширения поля ростков мероморфных функций. В этом пункте связь между нормальными накрытиями и расширениями Галуа применяется для описания алгебраических расширений поля сходящихся рядов Лорана.

Пусть L_0 — поле ростков мероморфных функции в точке $0 \in \mathbb{C}^1$. Это поле можно отождествить с полем сходящихся рядов Лорана $\sum\limits_{m>m_0} c_m x^m$.

Теорема 4.2. *Для каждого k существует единственное расширение степени k поля L_0. Оно порождено элементом $z = x^{\frac{1}{k}}$. Это расширение нормально, его группа Галуа равна $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $y^k + a_{k-1}y^{k-1} + \cdots + a_0 = 0$ — неприводимое уравнение над полем L_0. Из неприводимости уравнения вытекает существование малого открытого диска D_r с центром в точке 0, такого, что: 1) ряды Лорана коэффициентов a_i, $i = 1, \ldots, k$, сходятся в проколотом диске D_r^*, 2) уравнение непривидимо над полем $K(D_r)$ мероморфных функций в диске D_r, 3) дискриминант уравнения отличен от нуля во всех точках проколотого диска D_r^*.

Пусть $\pi : M \to D_r$ — риманова поверхность полученного неприводимого уравнения на диском D_r. По условию в диске D_r лишь точка 0 является критическим значением отображения π. Фундаментальная группа проколотого диска D_r^* изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Группа $k\mathbb{Z}$ является единственной подгруппой индекса k в группе $\mathbb{Z}$. Эта подгруппа является нормальным делителем и фактор-группа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ является циклической группой порядка k. Поэтому сушествует единственное расширение стенени k. Оно соответствует ростку k-листного накрытия $f : (\mathbb{C}^1, 0) \to (\mathbb{C}^1, 0)$, где $f(z) = z^k$, нормально и его группа Галуа равна $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Далее, функция $z : D_q \to \mathbb{C}^1$, где $q = r^{\frac{1}{\lceil}k}$, разделяет все прообразы точки $a \in D_r^*$ при отображении $x = z^k$. Поэтому функция $z = x^{\frac{1}{k}}$ порождает поле $K(D_q)$ над полем $K(D_r)$. Теорема доказана.

Согласно теореме, функция z и ее степени $1, z = x^{\frac{1}{k}}, \ldots, z^{k-1} = x^{\frac{k-1}{k}}$ образуют базис в расширении L степени k поля L_0, рассматриваемого как векторное пространство над полем L_0. Функции $y \in L$ можно рассматривать как многозначные функции от x. Разложение элемента $y \in L$ по базису $y = f_0 + f_1 z + \cdots + f_{k-1}z^{k-1}$, $f_0, \ldots, f_{k-1} \in L_0$, эквивалентно разложению $y(x) = f_0(x) + f_1(x)x^{\frac{1}{k}} + \cdots + f_{k-1}(x)x^{\frac{k-1}{k}}$ многозначной функции $y(x)$ в ряд Пьюизо.

Отметим, что элементы $1, z, \ldots, z^{k-1}$ являются собственными векторами изоморфизма поля L над полем L_0, порождающего группу Галуа и соответствующего обходу вокруг точки 0. Собственные числа этих векторов соответственно равны $1, \xi, \ldots, \xi^{k-1}$, где ξ — первообразный корень из единицы степени k. Существование такого базиса доказывается в теории Галуа (см. утверждение 1.1 главы 2).

Замечание. Поле L_0 во многом аналогично конечному полю $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а обход вокруг точки нуль, аналогичен изоморфизму Фробениуса. Действительно, у каждого из этих полей для каждого натурального k есть единственное алгебраическое расширение степени k. Каждое из этих расширений нормально, группа Галуа каждого из них есть циклическая группа из k элементов. Образующая группы Галуа расширения первого поля соответствует петле, обходящей точку нуль, а образующая группы Галуа расширения второго поля является изоморфизмом Фробениуса. Аналогичные свойства имеет любое конечное поле. Для поля F_q, содержащего $q = p^n$ элементов, роль петли, обходящей точку нуль, играет n-я степень автоморфизма Фробениуса.

4.3. Алгебраические расширения поля рациональных функций. Рассмотрим теперь случай связных компактных комплексных многообразий. Применяя теорию Галуа, мы покажем, что поле мероморфных функций на таком многообразии является конечным расширением степени трансцендентности один поля комплексных чисел. С другой стороны, геометрия разветвленных накрытий над сферой Римана дает ясное описание всех конечных алгебраических расширений поля рациональных функций.

Сфера Римана $\mathbb{C}P^1$ является простейшим из компактных комплексных многообразий. Будем считать, что на проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ фиксирована бесконечно удаленная точка ∞, $\mathbb{C}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$, и координатная функция $x : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюс первого порядка в точке ∞. Каждая мероморфная фукция на $\mathbb{C}P^1$ является рациональной функцией от x.

Скажем, что пара мероморфных функций f, g на многообразии M разделяет почти все точки многообразия M, если существует конечное множество $A \subset M$, такое, что вектор-функция (f, g) определена на множестве $M \setminus A$ и принимает в его точках разные значения.

Теорема 4.3. *Пусть M — связное компактное одномерное комплексное многообразие.*

1) Тогда любые две мероморфные функции f, g на M связаны некоторым полиномиальным соотношением (т.е. существует полином Q от двух переменных, такой, что выполняется тождество $Q(f, g) \equiv 0$).

2) Пусть функции f, g разделяют почти все точки многообразия M. Тогда каждая мероморфная функция φ на многообразии M является композицией рациональной функции R двух переменных с функциями f и g, $\varphi = R(f, g)$.

Доказательство. 1) Если функция f тождественно равна константе C, то в качестве полиномиального соотношения можно взять тождество $f \equiv C$. В противном случае отображение $f : M \to \mathbb{C}P^1$ является разветвленным накрытием с некоторым множеством точек ветвления O. Осталось воспользоваться пунктом 1 теоремы 3.2.

2) Если функция f тождественно равна константе, то функция g принимает различные значения в точках множества $M \setminus A$. Следовательно, разветвленное накрытие $g : M \to \mathbb{C}P^1$ является взаимно однозначным отображением многообразия M на сферу Римана $\mathbb{C}P^1$. В этом случае каждая

мероморфная функция φ на M является композицией рациональной функции R одной переменной с функций g, $\varphi = R(g)$.

Если функция f не равна тождественно константе, то она задает разветвленное накрытие $f : M \to \mathbb{C}P^1$ над сферой Римана $\mathbb{C}P^1$. Пусть O — объединение образа множества A при отображении f и множества критических значений отображения f, $a \notin O$ — любая точка сферы Римана, не лежащая в O, и F — слой разветвленного накрытия $f : M \to \mathbb{C}P^1$ над точкой a. По условию, функция f должна разделять точки множества F. Осталось воспользоваться пунктом 3 теоремы 3.2.

Пусть

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{15}$$

— неприводимое уравнение над полем рациональных функций. Риманова поверхность $\pi : M \to \mathbb{C}P^1$ этого уравнения называется также *римановой поверхностью алгебраической функции,* определенной этим уравнением, а группа монодромии разветвленного накрытия $\pi : M \to \mathbb{C}P^1$ называется также *группой монодромии* этоё1той алгебраической функции. Согласно утверждению 3.5, группа Галуа уравнения (15) совпадает с группой монодромии.

Итак, группа Галуа неприводимого уравнения (15) над полем рациональных функций имеет топологический смысл: она равна группе монодромии римановой поверхности алгебраической функции, определенной уравнением (15). Совпадение группы Галуа уравнения (15) и группы монодромии алгебраической функции, определенной этим уравнением, было известно Фробениусу, но, возможно, было открыто еще раньше.

Результаты теории Галуа доставляют топологическое препятствие к разрешимости уравнения (15) в радикалах и в k-радикалах. Из теории Галуа вытекают следующие теоремы.

Теорема 4.4. *Алгебраическая функция y, определенная уравнением* (15)*, представима в радикалах над полем рациональных функций, если и только если ее группа монодромии разрешима.*

Теорема 4.5. *Алгебраическая функция y, определенная уравнением* (15)*, представима в k-радикалах над полем рациональных функций, если и только если ее группа монодромии k-разрешима.*

Связные разветвленные накрытия над сферой Римана $\mathbb{C}P^1$, критические значения которых лежат в фиксированном конечном множестве O, допускают полное конечное описание. Связные k-листные разветвленные накрытия с отмеченной точкой $\pi : (M, b) \to (\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ классифицируются подгруппами индекса k в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O)$. Для каждой группы G справедлива следующая лемма.

Лемма 4.6. *Классификация подгрупп индекса k группы G эквивалентна классификации транзитивных действий группы G на множестве с отмеченной точкой, содержащем k точек.*

Доказательство. Действительно, с подгруппой G_0 индекса k в группе G связано транзитивное действие группы G на множестве правых классов смежности группы G по подгруппе G_0, состоящем из k элементов. В этом множестве отмечен правый класс смежности единичного элемента. Обратно, каждому транзитивному действию группы G на множестве из k точек, из которых одна точка отмечена, соответствует стационарная подгруппа G_0 отмеченной точки, имеющая индекс k в группе G.

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ — свободная с конечным числом образующих. Она имеет конечное число различных транзитивных действий на множестве из k точек, которые можно перечислить. Вот их описание.

Занумеруем точки множества O. Пусть оно содержит $(m+1)$ точку. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ является свободной группой, порожденной кривыми $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, где γ_i — кривая, обходящая i-ую точку множества O. Возьмем множество из k элементов, в котором одна точка отмечена. В группе $S(k)$ перестановок этого множества произвольным образом выбраем m элементов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Нас интересуют упорядочненные наборы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, подчиненные одному единственному условию: нужно, чтобы группа перестановок, порожденная этими элементами, была транзитивной. Есть конечное число наборов элементов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Их можно перебрать и выбрать все наборы, порождающие транзитивные группы. С каждым таким набором связано единственное разветвленное накрытие $\pi(M, b) \to (\mathbb{C}P^1, a)$ с отмеченной точкой. Оно соответствует стационарной подгруппе отмеченного элемента при гомоморфизме $F : \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a) \to S(k)$, переводящем образующую γ_i в элемент σ_i. Итак, за конечное число операций можно перечислить все транзитивные действия $F : \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a) \to S(k)$ фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ на множестве из k элементов.

На конечном множестве гомоморфизмов $F : \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a) \to S(k)$, образ которых транзитивен, действует конечная группа гомоморфизмов сопряжения группы $S(k)$. Орбиты действия конечной группы на конечном множестве можно перечислить. Поэтому классы сопряженности подгрупп индекса k в фундаментальной группе тоже можно перечислить за конечное число операций.

Итак, мы получаем полное геометрическое описание всевозможных расширений Галуа поля рациональных функций одной переменной. Отметим, что в этом описании мы использовали теорему существования Римана. Теорема Римана не помогает описывать алгебраические расширения других полей, скажем, поля рациональных чисел. Вопрос об описании алгебраических расширений поля рациональных чисел еще открыт. Неизвестно, например, существует ли расширение поля рациональных чисел, у которого группа Галуа — заданная конечная группа.