ГЛАВА I

Преобразование Радона

§ 1. Преобразование Радона на плоскости

1.1. Преобразование Радона на евклидовой плоскости. Преобразованием Радона на евклидовой плоскости называется интегральное преобразование, относящее функции f на плоскости ее интегралы по всевозможным прямым (относительно евклидовой длины).

Запишем преобразование Радона явной формулой. Будем задавать прямые на плоскости уравнениями

$$x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi - p = 0$$

или параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= -t\sin\varphi + p\cos\varphi, \\ x_2 &= t\cos\varphi + p\sin\varphi; \end{aligned}$$

евклидова мера на такой прямой равна dt. Тем самым мы ввели параметры (φ, p) на многообразии прямых, причем очевидно, что параметрам (φ, p) и (φ', p') отвечает одна и та же прямая тогда и только тогда, когда $\varphi' = \varphi + \pi k$, $p' = (-1)^k p$, $k \in \mathbb{Z}$. Эта параметризация показывает, что многообразие прямых на плоскости получается из бесконечного кругового цилиндра с цилиндрическими координатами (φ, p) отождествлением точек (φ, p) и $(\varphi + \pi, -p)$.

Преобразование Радона функции $f(x_1, x_2)$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R} f(\varphi, p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi, t\cos\varphi + p\sin\varphi)\, dt. \tag{1.1}$$

Интеграл зависит от параметров φ и p; однако, так как $\mathcal{R} f(\varphi+\pi,-p)=$ $=\mathcal{R} f(\varphi,p)$, функция $\mathcal{R} f$ опускается на многообразие прямых.

Преобразование Радона можно рассматривать на различных функциональных пространствах. Сначала для простоты мы рассмотрим его на пространстве $D(\mathbb{R}^2)$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. В этом случае преобразование Радона $\mathcal{R} f$ есть финитная бесконечно дифференцируемая функция на многообразии прямых, т.е. бесконечно дифференцируемая функция от φ и p, финитная по p. В дальнейшем мы рассмотрим его и на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^2)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$, убывающих при $r\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой отрицательной степени r.

Замечание. Часто (1.1) записывают в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{R} f(\varphi,p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,\delta(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi-p)\,dx_1\,dx_2 = \\ &= \langle\delta(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi-p), f(x_1,x_2)\rangle,\end{aligned}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака от одного переменного. Здесь следует придать смысл $\delta(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi-p)$ как обобщенной функции двух переменных x_1 и x_2. Для этого мы переходим на плоскости к новым координатам u,v, где $u=x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi-p$, и применяем обобщенную функцию $\delta(u)$ при фиксированном v. Непосредственно проверяется, что результат не зависит от выбора второй координаты v.

1.2. Формула обращения. Поставим задачу: восстановить функцию $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ по ее преобразованию Радона $\mathcal{R} f$. Формула обращения впервые была получена Радоном (см. сноску в Предисловии), и мы по существу воспроизводим его рассуждение. Оно основывается на том, что преобразование Радона перестановочно с движениями евклидовой плоскости. Отсюда, во-первых, следует, что достаточно научиться восстанавливать функцию f в какой-либо одной точке, например, в точке $(0,0)$, и, во-вторых, можно ограничиться радиально симметричными функциями.

Перейдем к вычислениям. Итак, мы имеем функцию $f(x_1,x_2)=F(r)$, зависящую только от расстояния $r=({x_1}^2+{x_2}^2)^{1/2}$ до точки $(0,0)$. Нужно восстановить $f(0,0)=F(0)$ по $\mathcal{R} f(\varphi,p)$. Из перестановочности преобразования Радона с поворотами следует, что $\mathcal{R} f$ зависит только от p: $\mathcal{R} f(\varphi,p)=\widehat{F}(p)$. В результате задача редуцируется к задаче об обращении некоторого интегрального преобразования $F\mapsto\widehat{F}$ для функций от одного переменного.

Из (1.1) непосредственно получаем:

$$\widehat{F}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{t^2+p^2})\,dt\,,$$

т.е.

$$\widehat{F}(p) = 2\int\limits_{|p|}^{\infty} \frac{F(r)}{\sqrt{r^2-p^2}}\,r\,dr = \int\limits_{p^2}^{\infty} \frac{F(\sqrt{t})}{\sqrt{t-p^2}}\,dt. \tag{1.2}$$

Тем самым преобразование от F к $\widehat{F}$ сводится к преобразованию Абеля (интегрирование порядка $1/2$). Как известно (это легко проверить непосредственно), из (1.2) следует, что

$$F(r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r}^{\infty} \frac{\widehat{F}'(p)}{\sqrt{p^2-r^2}}\,dp\,. \tag{1.3}$$

В частности,

$$F(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\widehat{F}'(p)}{p}\,dp\,. \tag{1.4}$$

Заметим, что $\widehat{F}(p)$ — четная функция. Поэтому, ввиду гладкости $\widehat{F}(p)$, под интегралом стоит регулярная функция и, значит, интеграл существует.

Перейдем от формулы (1.4) к формуле обращения для произвольной функции f. Усреднив f по окружности с центром в точке 0, мы получим функцию, зависящую только от расстояния r до точки $(0,0)$:

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Заметим, что $F(0) = f(0,0)$. Пусть $\widehat{F}$ — преобразование Радона функции F. Ввиду перестановочности преобразования Радона с вращениями имеем:

$$\widehat{F}(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \mathcal{R}f(\varphi, p)\,d\varphi,$$

т.е. $\widehat{F}$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по прямым, равноотстоящим от точки $(0,0)$. На основании формулы (1.4) получаем:

$$f(0,0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\widehat{F}'(p)}{p}\,dp\,.$$

Отсюда, пользуясь перестановочностью преобразования Радона со сдвигами, получаем:

Теорема 1.1. *Если $\mathcal{R}f$ — преобразование Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, то имеет место следующая формула обращения:*

$$f(x_1,x_2) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\widehat{F}'_p(x_1,x_2;p)}{p}\,dp\,, \tag{1.5}$$

где

$$\widehat{F}(x_1,x_2,p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{R}f(\varphi, p + x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)\,d\varphi\,, \tag{1.6}$$

т.е. $\widehat{F}$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по прямым, равноотстоящим от точки $x=(x_1,x_2)$.

Интегрированием по частям формула (1.5) приводится к следующему виду:

$$f(x_1,x_2) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\widehat{F}_p(x_1,x_2;p) - \widehat{F}_p(x_1,x_2;0)}{p^2}\,dp\,. \tag{1.7}$$

Напомним, что $\widehat{F}$ — четная бесконечно дифференцируемая функция от p.

Для обращения преобразования Радона мы воспользовались формулой (1.3) лишь при $r=0$. При $r>0$ эта формула содержит дополнительную информацию о связи усреднений функции f и ее преобразования Радона $\mathcal{R}f$, а именно:

Теорема 1.2. *Справедливо следующее соотношение (соотношение Асгейрссона):*

$$F(x_1,x_2;r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\widehat{F}'_p(x_1,x_2;p)}{\sqrt{p^2-r^2}}\,dp\,, \tag{1.8}$$

где F — среднее функции f по окружностям с центром в точке (x_1, x_2), т.е.

$$F(x_1, x_2; r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\varphi, x_2 + r\sin\varphi)\, d\varphi\,, \tag{1.9}$$

а $\widehat{F}$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по прямым, равноотстоящим от точки (x_1, x_2) (формула(1.6)). Имеем также:

$$\widehat{F}(x_1, x_2; p) = 2\int_{|p|}^{\infty} \frac{F(x_1, x_2; r)}{\sqrt{r^2 - p^2}}\, r\, dr\,. \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) и (1.8) получаются соответственно из (1.2) и (1.3) при помощи сдвига.

Следствие. *Для любых $x = (x_1, x_2)$ и $a > 0$ условия $F(x, r) = 0$ при $r > a$ и $\widehat{F}(x, p) = 0$ при $|p| > a$ эквивалентны.*

1.3. Замечания. 1^0. В формуле обращения требование бесконечной дифференцируемости функции f можно существенно ослабить. Очевидно, достаточно, чтобы функция $\mathcal{R}f$ была дважды дифференцируемой по p, а для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы функция f была дважды дифференцируема. Более того, достаточно, чтобы функция f принадлежала пространству C^1 дифференцируемых функций с непрерывными первыми частными производными, поскольку преобразование Радона радиально симметричных функций является сглаживающим в нуле: если $F \in C^1$, то $\widehat{F}'(p) = O(p)$ при $p \to 0$. Это следует из равенства:

$$\widehat{F}'(p) = 2p\int_p^{\infty} \frac{F'(r)}{\sqrt{r^2 - p^2}}\, dr = p\int_0^{\infty} \frac{F'(\sqrt{s + p^2})}{\sqrt{s}\,\sqrt{s + p^2}}\, ds\,.$$

В последнее время проявляется интерес к преобразованию Радона в связи с задачами томографии. Для этих задач важно рассматривать преобразование Радона не только на гладких функциях, но и на кусочно гладких, у которых линии разрыва — кусочно гладкие кривые (например, на характеристических функциях области). Для таких функций формула обращения хорошо работает в точках гладкости, поскольку преобразование Радона является гладкой функцией в окрестности прямых, проходящих через эти точки. В окрестности же точек разрыва формула обращения плохо приспособлена для восстановления функции. Для преодоления этих трудностей используются специальные регуляризационные процедуры. Разработка вычислительных методов, опирающаяся на формулу обращения, требует преодоления ряда дополнительных трудностей.

2^0. Для справедливости формулы обращения нет необходимости требовать финитности функции f. Достаточно быстрого убывания f и даже более слабого условия: $f = O((1+x_1^2+x_2^2)^{-1})$. В частности, формула обращения справедлива для функций f из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Напомним, что $S(\mathbb{R}^2)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$, убывающих при $r \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени r.

3^0. Для функций из C^1 можно в формуле обращения переставить усреднение $\mathcal{R}f = \widehat{F}(x_1, x_2; p)$ и интегрирование по p и представить формулу обращения в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{R}f)'_p(\varphi, p + x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)\, p^{-1}\, dp\, d\varphi. \tag{1.11}$$

Здесь интеграл по p нужно понимать в смысле главного значения.

1.4. Преобразование Радона на аффинной плоскости. Для определения преобразования Радона на плоскости на самом деле не требуется евклидова структура, а вполне достаточно аффинной структуры. Будем задавать прямые уравнениями

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$$

и зададим на каждой прямой $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$ меру $d\mu_\xi$ такую, что $dx_1\, dx_2 = d(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p)\, d\mu_\xi$. Эта мера в координатах x_1, x_2 имеет вид:

$$d\mu_\xi = \frac{dx_1}{|\xi_2|} = \frac{dx_2}{|\xi_1|}.$$

Определим преобразование Радона функции f на аффинной плоскости равенством:

$$\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p) = \int\limits_{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = p} f(x_1, x_2)\, d\mu_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x_1, \frac{p - \xi_1 x_1}{\xi_2}\Big) \frac{dx_1}{|\xi_2|}. \tag{1.12}$$

Полученная функция $\mathcal{R}f$ удовлетворяет условию:

$$\mathcal{R}f(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2; \lambda p) = |\lambda|^{-1}\, \mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p). \tag{1.13}$$

Таким образом, она зависит не только от прямой $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$, но и от выбора параметров ξ_1, ξ_2, p.

При $(\xi_1, \xi_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ функция $\mathcal{R}f$ совпадает с определенной в евклидовом случае функцией $\mathcal{R}f(\varphi, p)$.

Выражение для $\mathcal{R}f$ часто пишут в виде:

$$\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p)\,dx_1\,dx_2,$$

где определение $\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p)$ аналогично приведенному в п. 1.1.

Теорема 1.3. *Формула обращения для преобразования Радона* (1.12) *имеет следующий вид*:

$$f(x_1, x_2) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{R}f)'_p(\xi_1, \xi_2, p + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\, p^{-1}\, dp \Big) (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1), \tag{1.14}$$

где Γ — *произвольный контур в* $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, *пересекающий в одной точке почти каждый луч, выходящий из точки* 0.

Справедливость этой формулы следует из двух простых фактов.

1) Дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла, опускается на многообразие S лучей, выходящих из точки 0, т.е. на базу расслоения $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \to S$. Это следует из того, что она имеет степень однородности 0 по ξ и равна нулю на векторах, касательных к слоям расслоения $\big((d\xi_1, d\xi_2) = (\xi_1, \xi_2)\, d\lambda\big)$.

2) Если в качестве Γ взята единичная окружность с центром в точке 0, то формула (1.14) совпадает с уже доказанной формулой (1.11).

1.5. Связь с преобразованием Фурье и другой вывод формулы обращения. Пусть $\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2)$ — преобразование Фурье функции $f(x_1, x_2)$, т.е.

$$\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}\, dx_1\, dx_2. \tag{1.15}$$

Чтобы установить связь между преобразованием Фурье $\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2)$ и преобразованием Радона $\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p)$ функции f, представим интеграл

(1.15) при $(\xi_1,\xi_2) \neq 0$ как повторный, где интегрирование ведется сначала по прямым $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = p$, а затем по p:

$$\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = p} f(x_1, x_2)\, d\mu_\xi \Big)\, e^{i\,p}\, dp.$$

Таким образом, имеем:

Теорема 1.4. *Преобразование Радона $\mathcal{R} f$ и преобразование Фурье $\mathcal{F}$ функции f связаны следующим соотношением*:

$$\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi_1,\xi_2;p)\, e^{i\,p}\, dp \quad \big((\xi_1,\xi_2) \neq 0\big). \tag{1.16}$$

Пользуясь однородностью функции $\mathcal{R} f$, можно переписать эту формулу так:

$$\mathcal{F}(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi_1,\xi_2;p)\, e^{i\,\lambda p}\, dp. \tag{1.17}$$

Итак, двумерное преобразование Фурье является композицией преобразования Радона на плоскости и одномерного преобразования Фурье.

Приведем теперь другой вывод формулы обращения для преобразования Радона, основанный на формуле обращения для преобразования Фурье:

$$f(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F} f(\xi_1, \xi_2)\, e^{-i\,(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= (4\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \mathcal{F} f(\lambda\cos\varphi, \lambda\sin\varphi)\, e^{-i\,\lambda\,(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)}\, |\lambda|\, d\varphi\, d\lambda.$$

Подставив в эту формулу выражение (1.17) функции $\mathcal{F} f(\lambda\cos\varphi, \lambda\sin\varphi)$ через преобразование Радона $\mathcal{R} f(\cos\varphi, \sin\varphi; p) = \mathcal{R} f(\varphi; p)$, получаем:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\varphi, p)\, e^{i\,\lambda\,(p - x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi)}\,|\lambda|\,dp\,d\varphi\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(x_1, x_2, p)\, e^{i\,\lambda\,p}\,|\lambda|\,dp\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi\, i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}'_p(x_1, x_2, p)\, e^{i\,\lambda\,p}\,\operatorname{sign}\lambda\,dp\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}'_p(x_1, x_2, p)\, p^{-1}\,dp\,.$$

Здесь $\widehat{F}$ задается формулой (1.6). На последнем шаге мы воспользовались фактом: преобразование Фурье обобщенной функции $\operatorname{sign}\lambda \in S'(\mathbb{R})$ есть обобщенная функция $2ip^{-1}$, т.е. если $\psi \in S(\mathbb{R})$ и $\widetilde{\psi}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(p) e^{i\lambda p}\,dp$, то имеет место равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}\,\operatorname{sign}\lambda\,d\lambda = \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(p)\,p^{-1}\,dp\,.$$ [1)]

, Интеграл справа, вообще говоря, понимается в смысле главного значения, но, если ψ — гладкая нечетная функция, то он сходится в обычном смысле. В результате мы получили формулу обращения (1.5).

Замечание. Заметим, что при преобразовании Радона оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на функциях $f(x_1, x_2)$ переходит в оператор $\frac{\partial^2}{\partial p^2}$ на функциях $\mathcal{R} f(\varphi; p)$. Более общо, если имеется обобщенная функция $K(r^2)$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, то $K(\Delta)\, f \overset{\text{def}}{=} K(-r^2) * f$ переходит в свертку $K(-p^2) * \mathcal{R} f$ (свертка по p). Этими соображениями можно воспользоваться для обращения преобразования Радона негладкой функции.

Если мы имеем финитную обобщенную, в частности, негладкую функцию f, то мы можем представить ее в виде $f = (1 - \Delta)^k \varphi$, где

[1)] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз. 1959.

φ — гладкая функция, а k — натуральное число. Преобразование Радона функции f можно определить как свертку: $K(1+p^2)^k * \mathcal{R}\varphi$. На финитных непрерывных функциях это определение согласуется с уже имеющимся. Если теперь f — негладкая функция, то, беря свертку $\mathcal{R}f$ с $(1+p^2)^{-k}$, мы получаем гладкую функцию $\mathcal{R}\varphi$. Применяя к $\mathcal{R}\varphi$ формулу обращения для преобразования Радона, находим функцию φ. Применяя, наконец, к φ дифференциальный оператор $(1-\Delta)^k$, получаем искомую функцию f.

§ 2. Преобразование Радона в трехмерном пространстве

2.1. Преобразование Радона в евклидовом пространстве. Преобразованием Радона в трехмерном евклидовом пространстве называется интегральное преобразование, относящее функции на этом пространстве ее интегралы по всевозможным плоскостям (относительно евклидовой площади). Все рассмотрения проводятся здесь по той же схеме, что и для преобразования Радона на плоскости.

Зададим преобразование Радона явной формулой. Будем каждую плоскость задавать уравнением

$$\langle \omega, x\rangle - p = 0, \quad \text{где} \quad |\omega| = 1$$

($\langle \omega, x\rangle = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3$), или, по-другому, параметрическими уравнениями

$$x = t_1\alpha^1 + t_2\alpha^2 + p\omega\,,$$

где α^1, α^2 — пара единичных взаимно ортогональных векторов, т.е. $\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle = \langle \omega, \alpha^1\rangle = \langle \omega, \alpha^2\rangle = 0$; евклидова мера на такой плоскости равна $dt_1\,dt_2$. Тем самым, каждая плоскость задается парой (ω, p), где ω — точка единичной сферы, а p — число, причем, очевидно, двум различным парам (ω, p), (ω', p') отвечает одна и та же плоскость тогда и только тогда, когда $(\omega', p') = -(\omega, p)$.

Преобразование Радона функции $f(x)$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R}f(\omega, p) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t_1\alpha^1 + t_2\alpha^2 + p\omega)\,dt_1\,dt_2\,, \tag{2.1}$$

где α^1, α^2 — любые единичные векторы такие, что $\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle = \langle \omega, \alpha^1\rangle = \langle \omega, \alpha^2\rangle = 0$ (от их выбора интеграл не зависит). Так как $\mathcal{R}f(-\omega, -p) = \mathcal{R}f(\omega, p)$, функция $\mathcal{R}f$ опускается на многообразие плоскостей.

Как и в двумерном случае, (2.1) часто записывают в виде

$$\mathcal{R} f(\omega, p) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, \delta(\langle \omega, x \rangle - p)\, dx \qquad (dx = dx_1\, dx_2\, dx_3),$$

где $\delta(\cdot)$-функция на $\mathbb{R}$.

Для простоты мы будем рассматривать преобразование Радона на функциях $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. В этом случае функции $\mathcal{R} f$ — финитные бесконечно дифференцируемые функции на многообразии плоскостей, т.е. они бесконечно дифференцируемы как функции от ω и p и финитны по p.

Найдем формулу обращения для преобразования Радона в трехмерном евклидовом пространстве. Сначала рассмотрим функцию $f(x) = F(r)$, зависящую только от $r = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{1/2}$. Ее преобразование Радона не зависит от ω : $\mathcal{R} f(\omega, p) = \widehat{F}(p)$. На основании (2.1) имеем:

$$\widehat{F}(p) = \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\sqrt{{t_1}^2 + {t_2}^2 + p^2}\right) dt_1\, dt_2 = 2\pi \int_{|p|}^{\infty} F(r)\, r\, dr\,. \tag{2.2}$$

Итак, в отличие от двумерного случая, где мы имели интеграл порядка $1/2$, здесь получился просто оператор интегрирования. Поэтому обратный оператор есть оператор дифференцирования, и мы получаем:

$$F(r) = -\frac{1}{2\pi}\, \frac{\widehat{F}'(r)}{r}\,. \tag{2.3}$$

В частности,

$$f(0) = F(0) = -\frac{1}{2\pi}\, \widehat{F}''(0). \tag{2.4}$$

Чтобы получить формулу обращения для произвольной функции f, мы, как и в двумерном случае, используем перестановочность преобразования Радона с движениями евклидова пространства. Введем среднее функции f по сферам с центром в фиксированной точке x:

$$F(x; r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} f(x + r\omega)\, d\omega\,, \tag{2.5}$$

где $d\omega$ — элемент площади поверхности единичной сферы. Пусть далее $\widehat{F}(x; p)$ — среднее функции $\mathcal{R} f$ по плоскостям, равноотстоящим от точки x, т.е.

$$\widehat{F}(x; p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|\omega|=1} \mathcal{R} f(\omega,\, p + \langle \omega, x \rangle)\, d\omega. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.4) и из перестановочности преобразования Радона с движениями евклидова пространства получаем:

$$f(x) = F(x,0) = -\frac{1}{2\pi}\,\widehat{F}_p''(\omega;0)\,.$$

Итак, доказано:

Теорема 2.1. *Формула обращения для преобразования Радона в трехмерном евклидовом пространстве имеет следующий вид*:

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^3}\int\limits_{|\omega|=1}(\mathcal{R}\,f)_p''(\omega;\langle\omega,\,x\rangle\,)\,d\omega\,. \tag{2.7}$$

Мы видим, что трехмерный случай принципиально отличается от двумерного. Здесь, в отличие от двумерного случая, формула обращения локальна. Это означает, что для восстановления функции f в точке x нужно знать ее интегралы только по плоскостям близким к x (фактически из инфинитезимальной окрестности множества плоскостей, проходящих через x).

Одновременно мы получили следующие соотношения между усреднениями F и $\widehat{F}$ соответственно функций f и $\mathcal{R}\,f$:

$$\widehat{F}(x;p) = 2\pi\int\limits_{|p|}^{\infty}F(x,r)\,r\,dr\,, \tag{2.8}$$

$$F(r) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\widehat{F}_r'(x;r)}{r}\,. \tag{2.9}$$

(Эти равенства получаются из (2.2) и (2.3) сдвигом.)

Преобразование Радона функции f связано с ее преобразованием Фурье $\mathcal{F}\,f$ следующим равенством:

$$\mathcal{F}\,f(\lambda\,\omega) = (2\pi)^{-3/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}\,f(\omega,\,p)\,e^{i\,\lambda\,\rho}\,dp \qquad (|\omega|=1). \tag{2.10}$$

Исходя из этого равенства и из формулы обращения для преобразования Фурье можно получить другой вывод формулы обращения для преобразования Радона:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F} f(\xi)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi = \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} \int_{|\omega|=1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\lambda\omega)\, e^{-i\lambda\langle\omega, x\rangle}\, \lambda^2\, d\omega\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|\omega|=1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\omega, p)\, e^{i\lambda(p-\langle\omega, x\rangle)}\, \lambda^2\, dp\, d\omega\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(x, p)\, e^{i\lambda p}\, \lambda^2\, dp\, d\lambda \quad = \quad -\frac{1}{2\pi} \widehat{F}''_p(x, 0)\,. \end{aligned}$$

Сравнив этот вывод с аналогичным выводом для плоскости (п. 1.5), замечаем, что различие между формулами обращения для плоскости и для пространства возникает из-за различия выражений для элементов объема в полярных координатах: $|\lambda|\, d\lambda\, d\omega$ для плоскости и $\lambda^2\, d\lambda\, d\omega$ для пространства.

Замечание. В двумерном случае функция f восстанавливается по $\mathcal{R} f$ с помощью нелокальной формулы. Однако функция $\sqrt{\Delta} f$, где Δ — оператор Лапласа, восстанавливается по $\mathcal{R} f$ локальной формулой обращения:

$$\sqrt{\Delta} f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{R} f)''_p(\varphi, x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)\, d\varphi\,.$$

Поскольку $\sqrt{\Delta}$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор, функция $\sqrt{\Delta} f$ имеет те же особенности, что и f. Этим обстоятельством пользуются иногда в томографии для определения особенностей функции $\mathcal{R} f$, исходя из ее преобразования Радона $\mathcal{R} f$.

2.2. Преобразование Радона в аффинном пространстве. Как и в двумерном случае, для определения преобразования Радона в трехмерном пространстве на самом деле не требуется евклидова структура, а вполне достаточно аффинной структуры. Будем задавать плоскости уравнениями

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p = 0$$

и зададим на каждой плоскости $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p = 0$ меру $d\mu_\xi$ такую, что $dx_1\,dx_2 = d(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p)\,d\mu_\xi$. Если в качестве координат на плоскости взята любая пара x_i, x_j, то эта мера в координатах x_i, x_j имеет вид:

$$d\mu_\xi = \frac{dx_i\,dx_j}{|\xi_k|} \quad (k \neq i, j),$$

т.е. она зависит от уравнения, задающего плоскость.

Определим преобразование Радона функции f на аффинном пространстве равенством:

$$\mathcal{R} f(\xi; p) = \mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3; p) = \int\limits_{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = p} f(x)\,d\mu_\xi = \tag{2.11}$$

$$= \int f\Big(x_1, x_2, \frac{p - \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2}{\xi_3}\Big) \frac{dx_1\,dx_2}{|\xi_3|}. \tag{2.12}$$

Как и в двумерном случае, функция $\mathcal{R} f$ удовлетворяет условию:

$$\mathcal{R} f(\lambda\xi; \lambda p) = |\lambda|^{-1}\,\mathcal{R} f(\xi; p).$$

Таким образом, она зависит не только от плоскости $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - - p = 0$, но и от выбора параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3, p.

При $|\xi| = 1$ функция $\mathcal{R} f$ совпадает с определенной в евклидовом случае функцией $\mathcal{R} f(\omega, p)$.

Выражение для $\mathcal{R} f$ часто пишут в виде:

$$\mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3; p) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3)\,\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p)\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

где определение $\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p)$ аналогично приведенному в двумерном случае.

Теорема 2.2. *Формула обращения для аффинного преобразования Радона* (2.12) *имеет следующий вид*:

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_\Gamma (\mathcal{R} f)''_p(\xi; p)|_{p = \langle \xi, x \rangle}\,\omega(\xi), \tag{2.13}$$

где

$$\omega(\xi) = \xi_1\,d\xi_2 \wedge d\xi_3 + \xi_2\,d\xi_3 \wedge d\xi_1 + \xi_3\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

а Γ *— произвольная поверхность в* $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, *пересекающая в одной точке почти каждый луч, выходящий из точки* 0.

Подобно двумерному случаю, формула обращения (2.13) следует из двух простых фактов: 1) интеграл (2.13) не зависит от выбора Γ и 2) в случае, когда Γ — единичная сфера, (2.13) совпадает с формулой обращения (2.7) для евклидова пространства.

2.3. Преобразование Радона для пространств произвольной размерности. Определение преобразования Радона для $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ можно перенести на пространства любой размерности. Именно, преобразование Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$ задается формулой:

$$\mathcal{R} f(\xi, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle - p)\,dx, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n)' \setminus 0,\ p \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

где $\langle \xi, x\rangle = \sum \xi_i x_i$, $dx = dx_1 \dots dx_n$ и $\delta(p)$ — дельта-функция одного переменного. Определение $\delta(\langle \xi, x\rangle - p)$ аналогично приведенному выше для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Приведем без доказательства формулы обращения для преобразования Радона. Если $\varphi = \mathcal{R} f$, то

$$f(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\,(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{|\omega|=1} \frac{\partial^{n-1}\varphi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}}\,\Big|_{s=\langle \omega, x\rangle}\, d\sigma \tag{2.15}$$

при нечетном n, где $d\sigma$ — элемент объема сферы $|\omega| = 1$ в $\mathbb{R}^n$;

$$f(x) = \frac{(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n} \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n-1}\varphi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}}\,\Big|_{s=\langle \omega, x\rangle + p}\, p^{-1}\,dp\,d\sigma \tag{2.16}$$

при четном n, где интеграл по p понимается в смысле главного значения. Таким образом, подобно случаям $n = 2$ и $n = 3$, формула обращения локальна при нечетном n и нелокальна при четном n.

Формулы обращения (2.15) и (2.16) можно объединить, воспользовавшись обобщенной функцией $(p - i0)^{-1}$. По определению, она есть предел при $s \to +0$ обобщенной функции $u_s(p) = (p - is)^{-1}$. Известно, что функция $(p - i0)^{-1}$ представима как линейная комбинация обобщенных функций p^{-1} и $\delta(p)$:

$$(p - i0)^{-1} = p^{-1} + i\,\pi\,\delta(p). \tag{2.17}$$

Мы имеем при любом n следующую формулу обращения:

$$f(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n-1}\varphi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}}\,(s - \langle \omega, x\rangle - i0)^{-1}\,ds\,d\sigma. \tag{2.18}$$

В самом деле, из (2.17) следует, что при нечетном n равенство (2.18) совпадает с (2.15), а при четном — с (2.16).

Представим формулу обращения в другой, более удобной форме, перейдя от преобразования Радона $\mathcal{R}$ к “комплексному” преобразованию Радона $\widetilde{\mathcal{R}}$. Именно, определим оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ следующей формулой:

$$\widetilde{\mathcal{R}}f(\xi,p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(\langle\xi, x\rangle - p - i0)^{-1}\,dx. \tag{2.19}$$

Легко убедиться, что функции $\widetilde{\mathcal{R}}f$ и $\mathcal{R}f$ связаны соотношением:

$$\widetilde{\mathcal{R}}f(\xi,p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi,s)\,(s - p - i0)^{-1}\,ds.$$

Отсюда и из (2.18) следует формула обращения для “комплексного” преобразования Радона $\widetilde{\mathcal{R}}$: если $\psi = \widetilde{\mathcal{R}}f$, то

$$f(x) = \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)^n \int\limits_{|\omega|=1} \frac{\partial^{n-1}\psi(\omega,s)}{\partial s^{n-1}}\,\Big|_{s=\langle\omega,x\rangle}\,d\sigma. \tag{2.20}$$

Отметим, что эта формула локальна при любом n.

§ 3. Волновое уравнение и принцип Гюйгенса

Здесь мы покажем, как при помощи преобразования Радона получаются классические формулы для решений волнового уравнения. Вывод основан на методе плоских волн.

3.1. Двумерный случай. Пусть мы имеем двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}\,.$$

Рассмотрим для него следующую задачу Коши:

$$u(0,x) = 0, \quad u'_t(0,x) = f(x), \tag{3.1}$$

где, для простоты, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Метод плоских волн опирается на то обстоятельство, что если $\varphi(s)$ — любая гладкая функция одного переменного, то функция $\Phi_\omega(t,x) = \varphi(t + \langle\omega, x\rangle)$, где $|\omega| = 1$, является при любом ω решением волнового уравнения (проверяется непосредственно). Такие решения называются плоскими волнами. Метод плоских волн состоит в представлении любого решения волнового уравнения в виде суперпозиции плоских волн.

Перейдем к построению решения задачи Коши (3.1). Рассмотрим следующую функцию:

$$u(t,x)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}\mathcal{R}f(\varphi,p-t+x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)p^{-1}\,d\varphi\,dp\,, \qquad (3.2)$$

где $\mathcal{R}f(\varphi,p)$ — преобразование Радона функции f. Поскольку функция u получена суперпозицией плоских волн, она является решением волнового уравнения. Убедимся, что u является решением задачи Коши (3.1). В самом деле, при $t=0$ подынтегральная функция в (3.2) меняет знак при замене $(\varphi,p)\mapsto(\varphi+\pi,-p)$; следовательно, $u((0,x)=0$. Далее, имеем:

$$u_t'(0,x)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}(\mathcal{R}f)_p'(\varphi,p+x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)p^{-1}\,d\varphi\,dp\;=\;f(x),$$

где последнее равенство следует из формулы (1.11) для преобразования Радона на плоскости.

Мы хотим вернуться в (3.2) от функции $\mathcal{R}f$ к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением (1.10) между средними функций f и $\mathcal{R}f$:

$$\int_0^{2\pi}\mathcal{R}f(\varphi,p+x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)\,d\varphi=$$

$$=2\int_{|p|}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(x_1+r\cos\varphi,x_2+r\sin\varphi)}{\sqrt{r^2-p^2}}r\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\int_{|y|^2>p^2}\frac{f(x+y)}{\sqrt{|y|^2-p^2}}\,dy \qquad (dy=dy_1\,dy_2),$$

где $|y|^2={y_1}^2+{y_2}^2$. Мы получим:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}K(t,y)\,f(x+y)\,dy\,,$$

где

$$K(t, y) = \int_{t-|y|}^{t+|y|} \frac{dp}{p\sqrt{|y|^2 - (p-t)^2}}$$

(при $t < |y|$ последний интеграл нужно понимать в смысле главного значения). Элементарное вычисление дает: $K(t, y) = 0$ при $t < |y|$, $K(t, y) = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - |y|^2}}$ при $t > |y|$. В результате получаем:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}}\, dy \tag{3.3}$$

(формула Пуассона).

Мы видим, что решение волнового уравнения в точке x в момент времени t зависит только от начальных данных в круге радиуса t с центром в x. Этот эффект называется эффектом конечной области зависимости для существования переднего фронта волны: сигнал движется со скоростью 1, и за время t он может дойти до x только из точек, находящихся от x на расстоянии не большем, чем 1.

3.2. Трехмерный случай. Теперь найдем решение задачи Коши (3.1) для трехмерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2}, \quad u(0, x) = 0, \quad u'_t(0, x) = f(x). \tag{3.4}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$u(t, x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\omega|=1} (\mathcal{R} f)'_p(\omega, t + \langle \omega, x \rangle)\, d\omega\,, \tag{3.5}$$

где $\mathcal{R} f(\omega, p)$ — преобразование Радона функции $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$. Эта функция, будучи суперпозицией плоских волн, удовлетворяет волновому уравнению. Убедимся, что она является решением задачи Коши (3.4). В самом деле, при $t = 0$ подынтегральная функция в (3.5) является нечетной функцией на сфере $|\omega| = 1$; значит, $u(0, x) = 0$. Далее, имеем:

$$u'_t(0, x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\omega|=1} (\mathcal{R} f)''_p(\omega, \langle \omega, x \rangle)\, d\omega \,=\, f(x),$$

где последнее равенство следует из формулы обращения для преобразования Радона в трехмерном пространстве.

Вернемся в (3.5) от функции $\mathcal{R}f$ к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением (2.9) между средними функций f и $\mathcal{R}f$:

$$\int\limits_{|\omega|=1} f(x+t\omega)\,d\omega = -\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{|\omega|=1} (\mathcal{R}f)'_p(\omega, t+\langle\omega, x\rangle)\,d\omega\,.$$

Мы получим:

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\omega|=1} f(x+t\omega)\,d\omega \tag{3.6}$$

(формула Кирхгофа).

Мы видим, что решение трехмерного волнового уравнения в точке x в момент времени t зависит только от начальных данных в точках, находящихся на расстоянии t от x (принцип Гюйгенса). Таким образом, имеет место не только эффект конечной области зависимости, но и более сильный эффект — выражен задний фронт волны: к моменту времени t сигнал от точек, находящихся от x на расстоянии, меньшем чем t, уже прошел через точку x в предыдущие моменты времени и не сохранился в ней. Это различие между двумерным и трехмерным случаями в точности отвечает тому факту, что формула обращения для преобразования Радона в трехмерном случае локальна, а в двумерном нелокальна.

§ 4. Условия Кавальери и теоремы Пэли — Винера для преобразования Радона

4.1. Условия Кавальери для быстро убывающих функций. Рассмотрим преобразование Радона $\mathcal{R}f(\xi_1,\xi_2;p)$ (в аффинном варианте) на функциях $f\in S(\mathbb{R}^2)$, см. формулу (1.12). Нас интересует, какой запас функций $\mathcal{R}f$ при этом получается.

Напомним, что функции $\mathcal{R}f$ удовлетворяют условию однородности:

$$\mathcal{R}f(\lambda\xi,\lambda p) = |\lambda|^{-1}\,\mathcal{R}f(\xi,\,p). \tag{4.1}$$

Далее, они бесконечно дифференцируемы на $(\mathbb{R}^2\setminus 0)\times\mathbb{R}$ и быстро убывают по p при $p\to\infty$ равномерно по ξ, $|\xi|=1$, вместе со всеми производными. Возникает вопрос: имеются ли какие-нибудь другие условия на функции $\mathcal{R}f$ из образа $S(\mathbb{R}^2)$?

Заметим прежде всего, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(\xi,\,p)\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx\,, \tag{4.2}$$

т.е. левая часть не зависит от ξ. Это соотношение тесно связано с классическим принципом Кавальери, позволяющим вычислять площадь плоской фигуры через длины ее пересечений с пучком параллельных прямых любого заданного направления. Именно, если f — характеристическая функция плоской фигуры, то $\mathcal{R}f(\xi, p)$ при $|\xi| = 1$ равно длине пересечения этой фигуры с прямой $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$, и тем самым равенство (4.2) выражает площадь плоской фигуры через длины ее пересечений с пучком параллельных прямых. В частности, левая часть равенства не зависит от направления пучка. По этой причине мы будем называть условие независимости от ξ интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi, p)\, dp$, а также некоторые обобщения этого условия условиями Кавальери.

Рассмотрим моменты функции $\mathcal{R}f(\xi, p)$ по p:

$$I_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi, p)\, p^k\, dp, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Подставив сюда выражение $\mathcal{R}f$ через исходную функцию $f(x)$, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi, p)\, p^k\, dp = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \langle \xi, x \rangle^k\, dx. \tag{4.4}$$

Из равенства (4.4) следуют

Условия Кавальери. *Интеграл $I_k(\xi)$ является однородным многочленом степени k от ξ_1, ξ_2 $(k = 0, 1, 2, \ldots)$* [1].

Дадим интерпретацию интегралов $I_k(\xi)$ на языке преобразования Фурье $\mathcal{F}f$ функции f. Как было показано в § 1, функции $\mathcal{F}f(\xi)$ и $\mathcal{R}f(\xi, p)$ связаны соотношением:

$$\mathcal{F}f(\lambda\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi, p)\, e^{i\lambda p}\, dp \qquad (\xi \neq 0).$$

Отсюда следует:

$$I_k(\xi) = 2\pi\, i^{-k}\, \frac{\partial^k \mathcal{F}f(\lambda\xi)}{\partial \lambda^k}\Big|_{\lambda=0}. \tag{4.5}$$

[1] Эти условия (для аффинных пространств произвольной размерности) впервые сформулированы в статье: Гельфанд И.М. и Граев М.И., Интегралы по гиперплоскостям основных и обобщенных функций // Доклады АН СССР. — 1960. — № 6. — С. 1307–1310.

Пусть теперь функция $\mathcal{F}f$ быстро убывает и бесконечно дифференцируема в точке 0 по каждому направлению, т.е. функция $\mathcal{F}f(\lambda\xi)$ бесконечно дифференцируема по λ в точке $\lambda = 0$ при любом $\xi \neq 0$. Покажем, что условия Кавальери эквивалентны условию бесконечной дифференцируемости $\mathcal{F}f(\xi)$ в точке $\xi = 0$.

В самом деле, пусть $\mathcal{F}f(\xi)$ бесконечно дифференцируема в точке $\xi = 0$. Тогда правая часть в (4.5) равна однородной составляющей степени k в разложении $\mathcal{F}f$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\xi = 0$; значит, из (4.5) следуют условия Кавальери. Обратно, пусть функция $\mathcal{F}f$ бесконечно дифференцируема в точке 0 по каждому направлению и выполнены условия Кавальери. Тогда по формуле Тейлора для $\mathcal{F}f(\lambda\xi)$ как функции от λ имеем при любом натуральном n и при $|\xi| = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\lambda\xi) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^k \mathcal{F}f(\lambda\xi)}{\partial\lambda^k}\Big|_{\lambda=0} + o(|\lambda|^n) = \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k \lambda^k}{k!} I_k(\xi) + o(|\lambda|^n)\,. \end{aligned}$$

Так как $I_k(\xi)$ — однородный многочлен степени k от ξ_1, ξ_2, это равенство можно записать в виде:

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} I_k(\xi) + o(|\xi|^n)\,. \tag{4.6}$$

В результате мы получили для $\mathcal{F}f(\xi)$ формулу Тейлора порядка k в точке 0. Отсюда следует, что $\mathcal{F}f(\xi)$ бесконечно дифференцируема по ξ_1, ξ_2 в точке 0.

4.2. Теорема Пэли — Винера для пространства $S(\mathbb{R}^2)$. Утверждения, содержащие описания образов различных функциональных пространств при преобразовании Радона, часто называют теоремами Пэли — Винера для этого преобразования.

Теорема 4.1. *Функция $\varphi(\xi_1, \xi_2; p)$ на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ является преобразованием Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$, если и только если*:

1) *φ удовлетворяет условию однородности* (4.1);

2) *φ бесконечно дифференцируема*;

3) *любая производная функции φ убывает при $|\xi| = 1$ и $p \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|p|$*;

4) *φ удовлетворяет условиям Кавальери.*

Доказательство. Нам нужно доказать только достаточность условий. Пусть функция $\varphi(\xi, p)$ удовлетворяет условиям теоремы. Определим функцию $F(\xi)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ равенством:

$$F(\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, p)\, e^{ip}\, dp\,.$$

Ввиду условия однородности 1), это равенство эквивалентно следующему:

$$F(\lambda\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, p)\, e^{i\lambda p}\, dp\,.$$

Из условий 2) и 3) следует, что функция F бесконечно дифференцируема во всех точках $\xi \neq 0$, а при $\xi = 0$ она бесконечно дифференцируема по всем направлениям; значит, в силу условий Кавальери, она бесконечно дифференцируема и в точке $\xi = 0$. Далее, из условий 2) и 3) следует, что функция F быстро убывает вместе со всеми производными. Таким образом, $F \in S(\mathbb{R}^2)$, а потому существует функция $f \in S(\mathbb{R}^2)$ такая, что $F = \mathcal{F} f$. Тогда $\varphi(\xi, p)$ совпадает с преобразованием Радона $\mathcal{R} f(\xi, p)$ функции f, поскольку их преобразования Фурье по p равны одной и той же функции $\mathcal{F} f(\lambda\xi)$.

4.3. Теорема Пэли — Винера для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций..

Теорема 4.2. *Функция $\varphi(\xi_1, \xi_2; p)$ на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ является преобразованием Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ в том и только том случае, когда*:

1) *φ удовлетворяет условию однородности* (4.1);
2) *φ бесконечно дифференцируема на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ и финитна по p*;
3) *φ удовлетворяет условиям Кавальери.*

Доказательство. Если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, то очевидно, что преобразование Радона $\mathcal{R} f$ функции f удовлетворяет условиям 1) и 2). Условия Кавальери следуют из того, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \subset S(\mathbb{R}^2)$.

Обратно, пусть функция φ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда φ удовлетворяет и условиям теоремы 4.1, а потому φ является преобразованием Радона некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Остается доказать только финитность функции f. Приведем доказательство финитности f, принадлежащее Хелгасону [1)].

[1)] Хелгасон С. Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983.

Итак, по условию, φ — финитная функция, т.е. для некоторого $a > 0$

$$\mathcal{R} f(\theta, p) = \mathcal{R} f(\cos\theta, \sin\theta; p) = 0 \quad \text{при} \quad |p| > a. \tag{4.7}$$

Докажем, что

$$F(x, r) \equiv \int_0^{2\pi} \mathcal{R} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta; p)\, d\theta \,=\, 0 \quad \text{при}\, r > |x| + a. \tag{4.8}$$

В самом деле, пусть $\widehat{F}(x, p)$ — среднее функции φ на множестве прямых, отстоящих от точки x на расстояние $|p|$. Из (4.7) следует, что $\widehat{F}(x, p) = 0$ при $|p| > |x| + a$. Но тогда, в силу соотношения Айсгейрссона (п. 1.2), $F(x, r) = 0$ при $r > |x| + a$.

Докажем далее, что если функция f удовлетворяет условию (4.8), то этому же условию удовлетворяют функции $x_i f$, $i = 1, 2$.

В самом деле, из (4.8) следует, что

$$\int\limits_{|y|>r} f(x + y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad r > |x| + a,$$

откуда

$$\int\limits_{|y|>r} f'_{x_i}(x + y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad r > |x| + a, \quad i = 1, 2.$$

Согласно теореме Стокса имеем:

$$\int\limits_{|y|>r} f'_{x_i}(x + y)\, dy = r \int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, \omega_i\, d\theta\,,$$

где $\omega = (\cos\theta, \sin\theta)$. Значит,

$$\int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, (x + r\omega)_i\, d\theta \equiv x_i \int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, d\theta \,+$$

$$+\, r \int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, \omega_i\, d\theta = 0 \quad \text{при} \quad r > |x| + a,$$

что и требовалось доказать.

В силу доказанного, среднее функции $P(x)\, f(x)$ по окружности радиуса $r > a$ с центром в точке 0 равно нулю для любого полинома $P(x)$. Следовательно, $f = 0$ на этой окружности, а значит, и во всей области $|x| > a$.

4.4. Обращение преобразования Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ при помощи моментов. Пусть f — финитная функция. Тогда ее преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ – целая функция, и, в силу (4.6), ряд Тэйлора функции $\mathcal{F} f$ задается формулой:

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} I_k(\xi)\,, \tag{4.9}$$

где $I_k(\xi)$ — k-й момент функции $\mathcal{R} f(\xi, p)$ по p, являющийся многочленом k-й степени. Беря от $\mathcal{F} f$ обратное преобразование Фурье, получаем способ восстановить функцию f по моментам I_k.

Итак, для функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ получена формула обращения, использующая только моменты I_k. Эта формула существенно отличается от формулы обращения, полученной в § 1.

Так как моменты I_k являются однородными многочленами, то для восстановления f их достаточно знать на сколь угодно малой дуге окружности $|\xi| = 1$ или даже на бесконечной последовательности точек (общего положения).

Замечание. Заслуживает внимания вопрос, чем отличаются различные формулы обращения. В формуле обращения мы имеем оператор, определенный на пространстве (вообще говоря, более широком, чем образ преобразования Радона) и заданный некоторым (вообще говоря, обобщенным) ядром. Разность операторов для различных формул обращения равна нулю на образе преобразования Радона. Из теоремы Пэли — Винера для пространства $S(\mathbb{R}^2)$ следует, что всякий функционал, равный нулю на образе $S(\mathbb{R}^2)$, получается из условий Кавальери и в существенном формула обращения для $S(\mathbb{R}^2)$ единственна. Образ же $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ состоит из финитных функций, и запас аннулирующих функционалов здесь более богат. Поэтому в случае $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ удается строить формулы обращения, отличные от формулы обращения из § 1. Один вариант такой формулы, использующий моменты, получен в этом пункте, другой вариант см. в п. 5.1.

4.5. Восстановление неизвестных направлений по заданным значениям $\mathcal{R} f$. Здесь мы изложим еще один пример на применение условий Кавальери при обращении преобразования Радона. Если преобразование Радона $\mathcal{R} f(\varphi, p)$ финитной функции f известно для некоторого набора углов φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то мы можем приближенно восстановить функцию f.

В электронной микроскопии для рибосом возникает следующая ситуация: известны значения $\mathcal{R} f(\varphi, p)$ для некоторых углов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и всех p, т.е. задано n функций от p, но значения самих углов φ_i неизвестны. Поэтому для восстановления f надо прежде всего восстановить неизвестные углы, более точно, восстановить их с точностью до общего поворота.

А.Б. Гончаров [1)] показал, что, пользуясь финитностью и опираясь на условия Кавальери, эту задачу можно решить — в случае общего положения — при достаточно большом n.

Пусть f — финитная функция, $\mathcal{R}f$ — ее преобразование Радона, $I_k(\varphi)$ — моменты функции $\mathcal{R}f$ ($k=1,2,\ldots$). В силу условий Кавальери, I_k является однородным многочленом степени k от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, в частности,

$$\begin{aligned} I_1(\varphi) &= \lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi\,,\\ I_2(\varphi) &= \mu_1\cos^2\varphi+\mu_2\cos\varphi\sin\varphi+\mu_3\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Заметим, что выражения для I_1 и I_2 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} I_1(\varphi) &= a\cos(\varphi-\alpha)\,,\\ I_2(\varphi) &= b\cos 2(\varphi-\beta)+c. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Все входящие в (4.10) и (4.11) параметры зависят от f.

Предположим, что $I_1(\varphi)\not\equiv 0$ и $I_2(\varphi)\not\equiv 0$, и рассмотрим в плоскости (y_1,y_2) кривую Γ_f, заданную параметрически:

$$y_1=I_1(\varphi),\quad y_2=I_2(\varphi).$$

Лемма. Γ_f — *алгебраическая кривая степени* 4.

В самом деле, степень кривой Γ_f определяется как число ее точек в пересечении с прямой общего положения $A\,y_1+B\,y_2+C=0$, т.е. число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} A\,(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2)+B\,(\mu_1t_1^2+\mu_2t_1t_2+\mu_3t_2^2)+C=0\\ t_1^2+t_2^2=1. \end{cases}$$

Подчеркнем, что различным функциям f отвечают различные кривые.

Кривая 4 степени определяется 15 своими точками общего положения (число коэффициентов полинома $P(y_1,y_2)$ четвертой степени). Поэтому, если функции $\mathcal{R}f(\varphi,p)$ известны для 15 значений φ, то известны 15 точек на кривой Γ_f, и мы знаем эту кривую. Если же

[1)] Гончаров А.Б. Трехмерная реконструкция неизвестным образом расположенных в пространстве идентичных частиц по их проекциям: В сб. Математические проблемы томографии / Под ред. И.М. Гельфанда и С.Г. Гиндикина. // Вопросы кибернетики. — М., 1990. — С.99–132.

кривая Γ_f известна, то коэффициенты a, b, c в (4.11) определяются равенствами:

$$a = (y_1)_{\max}, \quad b = \frac{1}{2}((y_2)_{\max} - (y_2)_{\min}), \quad c = \frac{1}{2}((y_2)_{\max} + (y_2)_{\min}).$$

Так как сдвиг параметра φ не меняет кривой Γ_f, то можно считать, что $\varphi_1 = 0$. В результате мы знаем $\cos\alpha, \cos 2\beta$ и $\cos(\varphi_i - \alpha), \cos 2(\varphi_i - \beta)$ при $i = 2, 3, \dots, 15$. Следовательно, как нетрудно убедиться,

> *если α, β и φ_i находятся в общем положении, то углы $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{15}$ однозначно определяются.*

Замечание. Число углов $n = 15$ является избыточным оттого, что получаются не все кривые Γ 4 степени, а лишь кривые Γ_f специального вида. На самом деле хватает 5 углов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5$ $(\varphi_1 = 0)$ по следующей причине. Так как угол φ_1 равен 0, в выражениях (4.10) нам известны коэффициенты λ_1, μ_1. В результате получаем переопределенную систему из $2 \cdot 4 = 8$ уравнений с 7 неизвестными λ_2, μ_2, μ_3 и $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$. Можно показать, что в случае общего положения эта система имеет единственное решение.

Примечание. Результаты этого параграфа непосредственно переносятся на многомерное преобразование Радона.

§ 5. Формула Пуассона для преобразования Радона и дискретное преобразование Радона

5.1. Формула Пуассона для преобразования Радона на плоскости. Наряду с интегралом Фурье существует его дискретный аналог — ряд Фурье. Мы увидим в этом параграфе, что существует и дискретный аналог преобразования Радона, который так же связан с рядом Фурье, как преобразование Радона с преобразованием Фурье.

Напомним, что ряд Фурье можно получить из формулы Пуассона для интеграла Фурье. Именно, пусть f — гладкая финитная функция на $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ — ее преобразование Фурье. Тогда, согласно формуле Пуассона,

$$\sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{+\infty} f(x_1 + k_1, x_2 + k_2) = 2\pi \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi k_1, 2\pi k_2)\, e^{-2\pi i\,(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \tag{5.1}$$

(оба ряда абсолютно сходятся). Если функция f сосредоточена в квадрате $0 < x_1, x_2 < 1,$, то для точек (x_1, x_2) этого квадрата в левой части отличен от нуля только член с $(k_1,k_2)=(0,0)$ и мы получаем представление функции f рядом Фурье:

$$f(x_1,x_2)=2\pi\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}f(2\pi k_1,2\pi k_2)\,e^{-2\pi i\,(k_1x_1+k_2x_2)}. \qquad (5.2)$$

Итак, функцию, сосредоточенную в квадрате, можно представить как интегралом так и рядом Фурье.

Приведем аналог формулы Пуассона для преобразования Радона. Введем подмножество A точек $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ таких, что либо $k_1>0$ и числа k_1, k_2 взаимно просты, либо $(k_1,k_2)=(0,1)$.

Теорема 5.1. *Пусть f — гладкая финитная функция на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $\mathcal{R}f(\xi_1,\xi_2;p)$ — ее преобразование Радона. Тогда*

$$\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty}f(x_1+k_1,x_2+k_2)=I(\mathcal{R}f)+$$

$$+\sum_{((k_1,k_2)\in A}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2+m)-I(\mathcal{R}f)\Big), \qquad (5.3)$$

где

$$I(\mathcal{R}f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(\xi_1,\xi_2;p)\,dp. \qquad (5.4)$$

Доказательство. Напомним, что преобразование Радона получается композицией двумерного и одномерного преобразований Фурье, а именно

$$\mathcal{R}f(\xi_1,\xi_2;p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}f(\lambda\xi)\,e^{-i\,\lambda\,p}\,d\lambda, \qquad (5.5)$$

где $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции f. Поэтому (5.3) можно получить, комбинируя формулы Пуассона для двумерного и одномерного преобразования Фурье. Предварительно заметим, что любую ненулевую точку из $\mathbb{Z}^2$ можно представить в виде $m(k_1,k_2)$, где $m\in\mathbb{Z}\setminus 0$, $(k_1,k_2)\in A$. Тем самым, формула Пуассона (5.1) может быть записана так:

$$\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty} f(x_1+k_1,x_2+k_2) = 2\pi\Big\{\mathcal{F}f(0) +$$
$$+\sum_{((k_1,k_2)\in A}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}f(2\pi m k_1, 2\pi m k_2)\, e^{-2\pi i m(k_1x_1+k_2x_2)} - \mathcal{F}f(0)\Big)\Big\}. \tag{5.6}$$

Из (5.5) на основании формулы Пуассона для одномерного преобразования Фурье получаем:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(\xi; p+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}f(2\pi m\xi)\, e^{-2\pi i m p}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}f(2\pi m k_1, 2\pi m k_2)\, e^{-2\pi i m(k_1x_1+k_2x_2)} &= \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2+m). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Так как, кроме того,

$$\mathcal{F}f(0) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(\xi,p)\,dp$$

для любого ξ, то из (5.6) и (5.7) следует равенство (5.3).

Следствие. *Если функция f сосредоточена в квадрате $0 < x_1, x_2 < 1$, то для любой точки (x_1, x_2) этого квадрата имеем:*

$$f(x_1,x_2) = I(\mathcal{R}f) + \sum_{(k_1,k_2)\in A}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2+m) - I(\mathcal{R}f)\Big), \tag{5.8}$$

где ряд справа сходится абсолютно.

Тем самым, мы получили для гладкой функции f, сосредоточенной в квадрате, еще одну формулу обращения. При этом в случае, когда $I(\mathcal{R} f) = 0$, функция f восстанавливается в точке x, если известны ее интегралы только по прямым с рациональными угловыми коэффициентами, проходящим через x, и их параллельным сдвигам, отвечающим целочисленным Δp. Заметим, что параллельные прямые $k_1 x_1 + k_2 x_2 = p$ и $k_1 x_1 + k_2 x_2 = p + 1$ находятся (относительно обычной евклидовой метрики) на расстоянии $({k_1}^2 + {k_2}^2)^{-1/2}$. Наличие интегралов по сдвинутым прямым отражает нелокальность формулы обращения.

Примечание. Формула (5.8) может быть использована для численного обращения преобразования Радона не только гладких функций.

5.2. Дискретное преобразование Радона; связь с рядами Фурье[1]**.** Пусть f — функция, сосредоточенная в квадрате $0 < x_1, x_2 < 1$, $\mathcal{R} f$ — ее преобразование Радона. Отправляясь от формулы (5.8), естественно, по аналогии с рядами Фурье , называть функцию F на $A \times \mathbb{R}$, заданную равенством

$$F(k_1 k_2; p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(k_1, k_2; p + m) - I(\mathcal{R} f), \tag{5.9}$$

дискретным преобразованием Радона функции f. Эта функция периодична по p с периодом 1.

В силу (5.8) функция f следующим образом выражается через свое дискретное преобразование Радона:

$$f(x_1, x_2) = I(\mathcal{R} f) + \sum_{(k_1, k_2) \in A} F(k_1, k_2; k_1 x_1 + k_2 x_2), \quad 0 < x_1, x_2 < 1. \tag{5.10}$$

Функция F так же связана с рядом Фурье функции f, как преобразование Радона $\mathcal{R} f$ с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$ функции f. Именно, пусть

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{+\infty} a(n_1, n_2)\, e^{2\pi i\, (n_1 x_1 + n_2 x_2)}$$

[1] Гиндикин С.Г. Дискретное преобразование Радона // Сиб. мат. журнал. — 1966. — № 3. — С. 708–712. См. также вычислительные применения в статье: Н.Д.Введенская, С.Г.Гиндикин. Дискретное преобразование Радона и реконструкция изображения: В сб. Математические проблемы томографии / Под ред. И.М.Гельфанда и С.Г.Гиндикина. // Вопросы кибернетики. — М., 1990, — С. 57–99.

— разложение f в ряд Фурье на $0 < x_1, x_2 < 1$,

$$F(k_1, k_2; p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(k_1, k_2)\, e^{2\pi i m p}$$

— разложение F в ряд Фурье по p на отрезке $0 < p < 1$. Заметим, что $b_0(k_1, k_2) = 0$. Подставляя эти ряды в (5.10), получаем:

$$\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} a(n_1, n_2)\, e^{2\pi i (n_1 x_1 + n_2 x_2)} =$$
$$= I(\mathcal{R} f) + \sum_{m\neq 0} \sum_{(k_1, k_2)\in A} b_m(k_1, k_2)\, e^{2\pi i m (k_1 x_1 + k_2 x_2)}.$$

Отсюда следует:

$$a(m k_1, m k_2) = b_m(k_1, k_2) \quad \text{при} \quad m \neq 0, \quad (k_1, k_2) \in A, \tag{5.11}$$
$$a(0,0) = I(\mathcal{R} f). \tag{5.12}$$

Равенство (5.11) — дискретный аналог формулы (5.5).

5.3. Задача интегральной геометрии на торе. Двумерные ряды Фурье можно интерпретировать двояко — как представление на квадрате $0 < x_1, x_2 < 1$ функции, сосредоточенной в этом квадрате, и как представление на всем $\mathbb{R}^2$ периодической функции f, т.е. такой, что $f(x + n) = f(x)$ для любого $n \in \mathbb{Z}^2$. Во втором случае ряд Фурье можно интерпретировать как разложение функции, заданной на торе $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Сделаем аналогичный переход для дискретного преобразования Радона.

Интерпретируем квадрат $0 < x_1, x_2 < 1$ как развертку тора $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Тогда для любых $k = (k_1, k_2) \in A$ и $p \in \mathbb{R}$ объединение отрезков прямых

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 = p + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

заключенных в этом квадрате, отвечает замкнутой геодезической $\gamma(k, p)$ на торе T. Обратно, любая замкнутая геодезическая на торе T представляется как объединение таких отрезков. Таким образом, дискретное преобразование Радона $F(k_1, k_2, p)$ для ограничения периодической функции f на квадрат $0 < x_1, x_2 < 1$ можно интерпретировать так:

$$F(k_1, k_2, p) = ({k_1}^2 + {k_2}^2)^{-1/2} \widehat{f}(k_1, k_2; p) - I(\widehat{f}),$$

где $\widehat{f}(k_1, k_2; p)$ — интеграл функции f на торе T по замкнутой геодезической $\gamma(k,p)$ (взятый по евклидовой длине на T), $I(\widehat{f})$ — интеграл функции $\widehat{f}$ по семейству параллельных замкнутых геодезических. Из (5.10) следует:

Теорема 5.2. *Любая гладкая функция f на торе $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ следующим образом восстанавливается через интегралы $\widehat{f}(k_1, k_2; p)$ по замкнутым геодезическим $\gamma(k,p)$:*

$$f(x) = I(\widehat{f}) + \sum_{(k_1,k_2)\in A} \Big(({k_1}^2 + {k_2}^2)^{-1/2}\, \widehat{f}(k_1, k_2; k_1 x_1 + k_2 x_2) - I(\widehat{f}) \Big). \tag{5.13}$$

Замечания. 1°. Длина геодезической $\gamma(k,p)$ равна $({k_1}^2 + {k_2}^2)^{-1/2}$. Поэтому если перенормировать меры на геодезических так, чтобы их длины равнялись 1 и обозначить через $\widehat{f}'(k_1, k_2; p)$ интеграл по геодезической $\gamma(k,p)$ относительно новой меры, то формула (5.13) примет более простой вид:

$$f(x) = I(\widehat{f}) + \sum_{(k_1,k_2)\in A} \Big(\widehat{f}'(k_1, k_2; k_1 x_1 + k_2 x_2) - I(\widehat{f}') \Big). \tag{5.14}$$

2°. Еще более простой вид принимает формула (5.13) для функций f со средним значением 0 на торе:

$$f(x) = \sum_{(k_1,k_2)\in A} \widehat{f}'(k_1, k_2; k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

В этом случае формула обращения локальна: для восстановления функции f в точке тора x нужно знать ее интегралы только по замкнутым геодезическим, проходящим через точку x.

§ 6. Преобразование Минковского — Функа

Этот параграф посвящен аналогу преобразования Радона для плоскости, где плоскость $\mathbb{R}^2$ заменена единичной сферой $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, а прямые в $\mathbb{R}^2$ — большими кругами на S^2.

Пусть f — четная гладкая функция на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^3$. Назовем преобразованием Минковского — Функа интегральное преобразование, относящее функции f ее интегралы по всевозможным большим кругам на сфере S. Возникает задача: восстановить функцию f по ее преобразованию Минковского — Функа. Впервые эта задача еще до появления статьи Радона была решена независимо Минковским и Функом. Аналогичная задача может быть сформулирована и для функций на трехмерной единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Замечание. Мы рассматриваем только четные функции на сфере, поскольку для нечетной функции ее интеграл по любому большому кругу равен 0.

Запишем преобразование Минковского — Функа явной формулой. Каждый большой круг на сфере S получается как пересечение этой сферы с плоскостью, проходящей через точку 0 :

$$\langle \xi, x\rangle = 0, \quad |\xi| = 1. \tag{6.1}$$

Таким образом, многообразие больших кругов параметризуется точками ξ единичной сферы $S' \subset (\mathbb{R}^3)'$, причем диаметрально противоположным точкам ξ и $-\xi$ отвечает один и тот же большой круг. Чтобы записать интеграл по кругу (6.1), зададим этот круг параметрически:

$$x = \cos\varphi \cdot \alpha + \sin\varphi \cdot \beta, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{6.2}$$

где α, β — единичные взаимно ортогональные векторы такие, что $\langle \xi, \alpha\rangle = \langle \xi, \beta\rangle = 0$. Преобразование Минковского — Функа задается следующим равенством:

$$\mathcal{M}f(\xi) = \int\limits_0^{2\pi} f(\cos\varphi \cdot \alpha + \sin\varphi \cdot \beta)\, d\varphi, \quad |\xi| = 1. \tag{6.3}$$

Ясно, что от выбора векторов α, β интеграл не зависит. Имеем: $\mathcal{M}f(-\xi) = \mathcal{M}f(\xi)$.

Итак, преобразование Минковского — Функа ставит в соответствие четной функции на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$ четную функцию на сфере $S' \subset (\mathbb{R}^3)'$.

Чтобы иметь возможность отождествлять функции на S и S',, отождествим сферы S и S'. Для определенности поставим в соответствие каждой точке $x \in S$ точку $\xi \in S'$, которой отвечает экваториальный большой круг, соответствующий полюсу x.

Из определения следует, что преобразование Минковского — Функа перестановочно с вращениями сферы. Это означает, что для любого вращения $g : \omega \mapsto \omega g$ сферы S преобразование Минковского — Функа $\mathcal{M}f_g(\xi)$ функции $f_g(\xi) = f(\xi g)$ есть $\mathcal{M}f(\xi g)$. Это свойство будет здесь существенно использовано для восстановления функции на сфере по ее преобразованию Минковского — Функа.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ четных функций на сфере S с интегрируемым квадратом модуля (относительно инвариантной меры на S). Построим спектральное разложение оператора $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$.

Введем в $\mathcal{H}$ фильтрацию подпространств, инвариантных относительно вращений. Именно, пусть $\mathcal{H}_{2n} \subset \mathcal{H}$ — пространство сферических полиномов степени $2n$, т.е. подпространство функций на S, являющихся ограничением на $S \subset \mathbb{R}^3$ однородных полиномов степени $2n$. Мы действительно имеем фильтрацию

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{H}_{2n} \subset \ldots \tag{6.4}$$

пространства $\mathcal{H}$, так как ограничение на S однородного полинома $P(x)$ степени $2n$ совпадает с ограничением на S полинома $(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)\,P(x)$ степени $2n+2$. Известно, кроме того, что замыкание пространства $\bigcup \mathcal{H}_{2n}$ совпадает с $\mathcal{H}$. Очевидно, что все пространства $\mathcal{H}_{2n}$ конечномерны и инвариантны относительно вращений, и оператор $\mathcal{M}$ определен на каждом $\mathcal{H}_{2n}$. Заметим, что при ограничении на S однородных полиномов степени $2n$ не возникает ненулевого ядра. Отсюда легко выводится, что

$$\dim \mathcal{H}_{2n} = (n+1)(2n+1). \tag{6.5}$$

Построим градуировку инвариантных подпространств в $\mathcal{H}$ относительно фильтрации (6.4):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{2n}\,, \tag{6.6}$$

где $H_0 = \mathcal{H}_0$ — подпространство констант, а H_{2n} при $n > 0$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}_{2n}$ к $\mathcal{H}_{2n-2}$, т.е.

$$\mathcal{H}_{2n} = \mathcal{H}_{2n-2} \oplus H_{2n}\,.$$

Из (6.5) следует, что $\dim H_{2n} = 4n+1$.

Пространство H_{2n} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ допускает следующее внутреннее описание. Оно состоит из функций на сфере S, являющихся ограничением на S однородных гармонических полиномов степени $2n$ (т.е. полиномов P, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 P}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3{}^2} = 0$).

Основной факт состоит в том, что *все H_{2n} являются собственными подпространствами оператора $\mathcal{M}$ Минковского — Функа.* Это утверждение следует непосредственно из того, что оператор $\mathcal{M}$ перестановочен с вращениями сферы S, а подпространства H_{2n} неприводимы (т.е. не содержат собственных инвариантных подпространств) и попарно не эквивалентны.

Для описания $\mathcal{M}$ остается сосчитать собственное значение λ_n оператора $\mathcal{M}$ на каждом подпространстве H_{2n}. Для этого рассмотрим функцию $f \in H_{2n}$, являющуюся ограничением на S полинома $(x_2 + i\,x_3)^{2n}$. Так как, очевидно, $(x_2 + i\,x_3)^{2n}$ — гармонический полином, то $f \in H_{2n}$; следовательно,

$$\mathcal{M} f = \lambda_n f.$$

Запишем выражение для f в сферических координатах θ, φ :

$$\omega_1 = \cos\theta,\ \omega_2 = \sin\theta\cos\varphi,\ \omega_3 = \sin\theta\sin\varphi \quad (0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi).$$

Имеем:

$$f(\theta, \varphi) = e^{2in\varphi}\sin^{2n}\theta\,.$$

В частности, $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$, а потому $\mathcal{M}f(\frac{\pi}{2}, 0) = \lambda_n$. С другой стороны, $\mathcal{M}f(\frac{\pi}{2}, 0)$ есть интеграл функции f по большому кругу, на котором $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\mathcal{M}f(\frac{\pi}{2}, 0) = 2(-1)^n\int\limits_0^{\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta = 2\sqrt{\pi}(-1)^n\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}.$$

Следовательно,

$$\lambda_n = 2\sqrt{\pi}(-1)^n\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}. \tag{6.7}$$

Из описания $\mathcal{M}$ следует, что для восстановления функции f на S по ее образу $\varphi = \mathcal{M}f$ достаточно разложить φ по собственным подпространствам оператора $\mathcal{M}$: $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n$, где $\varphi_n \in H_{2n}$. Тогда $f = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-1}\varphi_n$.

В § 8 будет получена другая формула обращения для преобразования Минковского — Функа, основанная на существовании простой связи между этим преобразованием и преобразованием Радона для проективной плоскости.

§ 7. Преобразование Радона дифференциальных форм

Преобразование Радона может быть определено не только для функций, но и для других объектов. В этом параграфе мы рассмотрим преобразование Радона дифференциальных форм на плоскости и в трехмерном пространстве. Основной задачей по-прежнему будет описание образа и восстановление исходной формы по ее преобразованию Радона.

7.1. Преобразование Радона 1-форм на плоскости. Рассмотрим произвольную дифференциальную 1-форму на $\mathbb{R}^2$

$$\omega = f_1(x_1, x_2)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2)\,dx_2$$

с коэффициентами из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Эту форму можно проинтегрировать по любой ориентированной прямой на плоскости $\mathbb{R}^2$. В результате получится функция на многообразии H всех ориентированных прямых, которую мы назовем преобразованием Радона исходной 1-формы ω и обозначим через $\mathcal{R}\omega$. Итак, по определению,

$$\mathcal{R}\omega(l) = \int\limits_l \omega, \qquad l \in H. \tag{7.1}$$

Напишем явное выражение для функции $\mathcal{R}\omega$ в координатах на H. Как и в § 1, будем задавать прямые на плоскости параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= -t\sin\varphi + p\cos\varphi, \\ x_2 &= t\cos\varphi + p\sin\varphi. \end{aligned} \tag{7.2}$$

За положительное направление прямой (7.2) примем то, в котором t возрастает. Тем самым параметры (φ, p) задают не только прямую, но и ее ориентацию, а потому их можно принять в качестве координат на многообразии H всех ориентированных прямых. Заметим, что та же прямая с противоположной ориентацией имеет координаты $(\varphi+\pi,\ -p)$.

В координатах (φ, p) выражение для $\mathcal{R}\omega$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\omega(\varphi, p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(-\sin\varphi\, f_1(-t\sin\varphi + p\cos\varphi, t\cos\varphi + p\sin\varphi) + \\ + \cos\varphi\, f_2(-t\sin\varphi + p\cos\varphi, t\cos\varphi + p\sin\varphi)\big)\, dt. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Мы хотим восстановить дифференциальную форму ω по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega$. Однозначное решение этой задачи получить невозможно ввиду следующего простого утверждения:

Лемма. *Если дифференциальная* 1*-форма* ω *замкнута, т.е.* $d\omega = 0$, *то* $\mathcal{R}\omega = 0$.

В самом деле, любая замкнутая форма $\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2$, где $f_1, f_2 \in S(\mathbb{R}^2)$, точна, т.е. представима в виде $\omega = du$, где $u \in S(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, интеграл от замкнутой формы ω по любой прямой равен нулю.

Решим другую геометрическую задачу: зная интегралы 1-формы $\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2$ по всем прямым в $\mathbb{R}^2$, т.е. ее преобразование Радона, найти ее внешний дифференциал $d\omega$, т.е. 2-форму

$$d\omega = \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big)\, dx_1 \wedge dx_2 = F(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2,,$$

или, короче, восстановить функцию F по $\mathcal{R}\omega$.

Предложение 7.1. *Для восстановления F нужно применить формулу обращения для преобразования Радона на плоскости к функции $\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{R}\,\omega(\varphi, p)$.*

Предложение следует из леммы:

Лемма. *Преобразование Радона $\mathcal{R}\omega$ формы $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$ связано с преобразованием Радона $\mathcal{R}F$ функции $F = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ соотношением*

$$\mathcal{R}\,F\,(\varphi, p) = \frac{\partial}{\partial p}\,\mathcal{R}\,\omega\,(\varphi, p). \tag{7.4}$$

Доказательство леммы. Ясно, что при фиксированном $\varphi = \varphi_0$ интеграл функции $\mathcal{R}\,F$ по p от p_1 до p_2 совпадает с интегралом 2-формы $d\omega$ по полосе $\pi \subset \mathbb{R}^2$ между прямыми $l_1 = (\varphi_0, p_1)$ и $l_2 = (\varphi_0, p_2)$; значит, по формуле Стокса

$$\int\limits_{p_1}^{p_2} \mathcal{R}\,F\,(\varphi_0, p)\,dp = \int\limits_{\pi} d\omega = \int\limits_{l_2} \omega - \int\limits_{l_1} \omega = \mathcal{R}\,\omega\,(\varphi_0, p_2) - \mathcal{R}\,\omega\,(\varphi_0, p_1).$$

Отсюда следует (7.4).

Следствие. *Любая дифференциальная 1-форма ω с коэффициентами из пространства $S(\mathbb{R}^2)$ содержится в ядре преобразования Радона в том и только том случае, когда она замкнута.*

7.2. Преобразование Радона 2-форм на плоскости. Обычно в анализе интегрируют дифференциальные k-формы по k-мерным подмногообразиям. Это отвечает содержанию п. 7.1, где интегрировались дифференциальные 1-формы по прямым на $\mathbb{R}^2$. Однако если фиксировано некоторое семейство подмногообразий размерности k, то по ним можно интегрировать m-формы, где $m \geqslant k$. Если $m > k$, то результатом будет не числовая функция, а дифференциальная $(m-k)$-форма на многообразии подмногообразий. Здесь принципиально, что при $m > k$ нельзя интегрировать m-форму по индивидуальному k-мерному подмногообразию.

В этом пункте рассматривается интегрирование 2-формы ω по прямым на $\mathbb{R}^2$; результатом интегрирования является 1-форма $\mathcal{R}\omega$ на многообразии прямых. Неформальная идея вычисления $\mathcal{R}\omega$ такова. Чтобы сосчитать $\mathcal{R}\omega(l, \tau)$, где l — прямая, а τ — касательный вектор к многообразию прямых, нужно инфинитезимально сдвинуть l в направлении τ и проинтегрировать ω по соответствующей 2-мерной области. Та же идея работает и в общей ситуации.

Перейдем к соответствующим выкладкам. Определим преобразование Радона дифференциальной 2-формы

$$\omega = f(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2, \quad f \in S(\mathbb{R}^2).$$

С этой целью введем трехмерное многообразие A флагов, элементы которого — пары: ориентированная прямая на плоскости и точка на этой прямой.

Поскольку точки на плоскости задаются координатами (x_1, x_2), а ориентированные прямые — координатами (φ, p), то на A можно ввести две системы координат. Одна система — координаты (x_1, x_2, φ), где (x_1, x_2) задают точку на плоскости, а φ — направление проходящей через эту точку прямой; другая система — (φ, p, t), где (φ, p) задают ориентированную прямую на плоскости, а t — точку на этой прямой. Координаты (x_1, x_2, φ) выражаются через координаты (φ, p, t) соотношениями (7.2). Обратные соотношения имеют вид:

$$t = x_2 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi, \quad p = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi.$$

Будем трактовать 2-форму $\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2$ как дифференциальную форму на многообразии A, заданную в координатах (x_1, x_2, φ). Чтобы определить преобразование Радона формы ω, представим ее сначала в координатах (φ, p, t), воспользовавшись выражениями (7.2) для x_1, x_2 и вытекающими из них выражениями для dx_1, dx_2:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\sin\varphi\, dt - t\cos\varphi\, d\varphi - p\sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dp, \\ dx_2 &= \cos\varphi\, dt - t\sin\varphi\, d\varphi + p\cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\, dp. \end{aligned}$$

Мы получим:

$$\begin{aligned} \omega = {} & f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\, dp \wedge dt - \\ & - t\, f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\, d\varphi \wedge dt + \ldots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие dt.

Обозначим через ω_0 дифференциальную форму, полученную из ω отбрасыванием всех слагаемых, не содержащих dt. При любых фиксированных φ, p, $d\varphi$ и dp форма ω_0 является дифференциальной 1-формой на ориентированной прямой с координатами (φ, p). Интегрируя ее по этой прямой, мы получаем дифференциальную 1-форму на многообразии ориентированных прямых, которую назовем преобразованием Радона исходной 2-формы ω и обозначим через $\mathcal{R}\omega$. Итак,

Определение. Преобразование Радона $\mathcal{R}\omega$ дифференциальной 2-формы $\omega = f(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$ на плоскости есть дифференциальная 1-форма на многообразии H ориентированных прямых на плоскости

$$\mathcal{R}\omega = a(\varphi, p)\, dp + b(\varphi, p)\, d\varphi, \tag{7.5}$$

где

$$
\begin{aligned}
a(\varphi, p) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dt, \\
b(\varphi, p) &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dt.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Установим свойства дифференциальной 1-формы $\mathcal{R}\omega$. Из явных выражений для функций a и b следует, что обе они — бесконечно дифференцируемые, быстро убывающие вместе со всеми своими производными функции на многообразии H ориентированных прямых, т.е. они принадлежат пространству Шварца $S(H)$. Далее, функция $a(\varphi, p)$ является преобразованием Радона функции f, $a = \mathcal{R}f$ и, значит, она удовлетворяет дополнительно условиям Кавальери (см. § 4). Наконец, легко непосредственно убедиться, что

$$
\frac{\partial a}{\partial \varphi} = \frac{\partial b}{\partial p},
$$

а потому дифференциальная форма $\mathcal{R}\omega$ замкнута.

Предложение 7.2. *Дифференциальная 1-форма $\Omega = a\,dp + b\,d\varphi$ с быстроубывающими коэффициентами $a, b \in S(H)$, заданная на многообразии H ориентированных прямых в $\mathbb{R}^2$, содержится в образе преобразования Радона 2-форм в том и только том случае, когда она замкнута и функция a удовлетворяет условиям Кавальери.*

Доказательство. В одну сторону утверждение уже доказано. Обратно, пусть $\Omega = a\,dp + b\,d\varphi$ — любая форма с перечисленными свойствами на многообразии $H = S^1 \times \mathbb{R}^1$. Тогда $a = \mathcal{R}f$ для некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Полагая $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2$, имеем $\Omega - \mathcal{R}\omega = c(\varphi, p)\,d\varphi$. Так как эта 1-форма замкнута, функция c не зависит от p, а из быстрого убывания следует, что $c = 0$. Значит, $\Omega = \mathcal{R}\omega$.

Замечание. Замкнутость формы $\mathcal{R}\omega$ следует также из общего факта о перестановочности оператора $\mathcal{R}$ с оператором d внешнего дифференцирования, если учесть, что сама форма ω замкнута как форма максимальной степени.

Чтобы восстановить дифференциальную форму $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2$ по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega = a\,dp + b\,d\varphi$, или, что равносильно, чтобы восстановить функцию f, нужно к функции $a(\varphi, p)$ применить формулу обращения для преобразования Радона на плоскости (см. § 1).

Мы видим, что преобразование Радона 2-форм, в отличие от 1-форм, имеет нулевое ядро. Отметим также, что задача о восстановлении дифференциальной 2-формы ω по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega$ является переопределенной: для этой цели нужно знать только один коэффициент формы $\mathcal{R}\omega$.

7.3. Преобразование Радона 2-форм в трехмерном пространстве. Рассмотрим произвольную дифференциальную 2-форму в $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2, \tag{7.7}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ с коэффициентами из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^3)$. Интегрируя ω по всевозможным ориентируемым плоскостям в $\mathbb{R}^3$, мы получим функцию на многообразии плоскостей. Эту функцию назовем преобразованием Радона формы ω и обозначим через $\mathcal{R}\omega$.

Приведем выражение для $\mathcal{R}\omega$ в координатах на многообразии плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Условимся задавать плоскости уравнениями вида

$$x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta. \tag{7.8}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ этих уравнений примем в качестве локальных координат на многообразии плоскостей. Примем далее (x_1, x_2) в качестве координат на каждой плоскости (7.8), задав тем самым и ориентацию этой плоскости. Тогда ограничение формы ω на плоскость (7.8) получается подстановкой в (7.7) выражений $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta$ и $dx_3 = \alpha_1\,dx_1 + \alpha_2\,dx_2$. В результате получаем:

$$\mathcal{R}\omega\,(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[(f_3 - \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2)(x_1, x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta)\big]\,dx_1\,dx_2.$$

Как и в аналогичной задаче для 1-форм на плоскости (см. п. 1), форму ω можно восстановить по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega$ только с точностью до слагаемого, являющегося замкнутой дифференциальной 2-формой. Поэтому поставим другую задачу: восстановить по функции $\mathcal{R}\omega$ внешний дифференциал формы ω:

$$d\omega = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

или, что эквивалентно, восстановить функцию $F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$.

Предложение 7.3. *Для того чтобы восстановить функцию F по функции $\mathcal{R}\omega$, нужно применить к $\frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{R}\omega(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ формулу обращения для преобразования Радона функций в трехмерном пространстве.*

Ядро преобразования Радона 2-форм в $\mathbb{R}^3$ с быстро убывающими коэффициентами состоит из замкнутых форм ω и только из них.

Предложение следует из леммы:

Лемма. *Преобразование Радона 2-формы $\omega = f_1\,dx_2\wedge dx_3 + f_2\,dx_3\wedge dx_1 + f_3\,dx_1\wedge dx_2$ связано с преобразованием Радона функции $F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ следующим соотношением:*

$$\mathcal{R}\,F(\alpha_1,\alpha_2,\beta) = \frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{R}\,\omega(\alpha_1,\alpha_2,\beta). \tag{7.9}$$

Доказательство формулы (7.9) в основном совпадает с доказательством формулы (7.4); при этом полоса между двумя параллельными прямыми в $\mathbb{R}^2$ заменяется областью в $\mathbb{R}^3$, заключенной между двумя параллельными плоскостями.

Замечание. Результаты пп. 7.1 и 7.3 легко обобщаются на дифференциальные $n-1$-формы в $\mathbb{R}^n$.

7.4. Преобразование Радона 3-форм в трехмерном пространстве. Преобразование Радона дифференциальной 3-формы в $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3, \quad f\in S(\mathbb{R}^3)$$

определяется аналогично преобразованию Радона дифференциальной 2-формы в $\mathbb{R}^2$, см. п. 7.2. Именно, введем 5-мерное многообразие флагов A, элементы которого — пары: плоскость в $\mathbb{R}^3$ и точка на этой плоскости. Поскольку точки в $\mathbb{R}^3$ задаются координатами (x_1,x_2,x_3), а плоскости — локальными координатами $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$, то на A можно задать две системы координат. Первая система — координаты $(x_1,x_2,x_3;\alpha_1,\alpha_2)$, где (x_1,x_2,x_3) задают точку в $\mathbb{R}^3$, а (α_1,α_2) — плоскость, проходящую через эту точку. Вторая система — координаты $(\alpha_1,\alpha_2,\beta;x_1,x_2)$, где $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ задают плоскость в $\mathbb{R}^3$, а (x_1,x_2) — точку на этой плоскости. Эти две системы координат связаны между собой соотношением (7.8).

Будем трактовать $\omega = f\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ как дифференциальную форму на A, заданную в координатах $(x_1,x_2,x_3;\alpha_1,\alpha_2)$. Чтобы определить ее преобразование Радона, запишем сначала форму ω в координатах $(\alpha_1,\alpha_2,\beta;x_1,x_2)$. Для этого в выражении для ω нужно заменить x_3 на $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\beta$ и dx_3 — на $\alpha_1\,dx_1+\alpha_2\,dx_2+x_1\,d\alpha_1+x_2\,d\alpha_2+d\beta$. Мы получим:

$$\omega = f(x_1,\,x_2,\,\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\beta)(d\beta + x_1\,d\alpha_1 + x_2\,d\alpha_2)\wedge dx_1\wedge dx_2.$$

Эта 3-форма при фиксированных $\alpha_1, \alpha_2, \beta, d\beta$ и переменных интегрирования x_1, x_2 может рассматриваться как дифференциальная 2-форма, заданная в плоскости с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \beta$. Интегрируя 2-форму по этой плоскости, мы получаем 1-форму в произвольной точке $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ многообразия плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Мы назовем полученную 1-форму преобразованием Радона исходной дифференциальной 3-формы ω и обозначим ее через $\mathcal{R}\omega$. Итак,

Определение. Преобразованием Радона дифференциальной 3-формы $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ $\mathbb{R}^3$ называется следующая дифференциальная 1-форма $\mathcal{R}\omega$ на многообразии плоскостей в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{R}\omega = a_1(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,d\alpha_1 + a_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,d\alpha_2 + b(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,d\beta, \tag{7.10}$$

где

$$a_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, f(x_1, x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta)\,dx_1\,dx_2, \quad i = 1, 2,$$

$$b(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta)\,dx_1\,dx_2. \tag{7.11}$$

Из определения 1-формы $\mathcal{R}\omega$ непосредственно следует:

1) Коэффициенты формы $\mathcal{R}\omega$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial a_i}{\partial \beta}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, форма $\mathcal{R}\omega$ замкнута.

2) Коэффициенты a_1, a_2, b формы $\mathcal{R}\omega$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, быстро убывающими вместе со всеми производными при $|\beta| \to \infty$.

3) Функция b является преобразованием Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$, т.е. $b = \mathcal{R}f$.

Нетрудно убедиться, что и обратно, если дифференциальная 1-форма $\Omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b\,d\beta$ на многообразии плоскостей в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то она является преобразованием Радона некоторой дифференциальной 3-формы $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $f \in S(\mathbb{R}^3)$ (ср. аналогичное утверждение в п. 2 для случая $\mathbb{R}^2$).

Из 3) следует также, что для восстановления формы ω по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b\,d\beta$ нужно применить к коэффициенту b формы $\mathcal{R}\omega$ формулу обращения для преобразования Радона функций в $\mathbb{R}^3$.

§ 8. Преобразование Радона для проективной плоскости и проективного пространства

Мы начинали с евклидовского определения преобразования Радона, но позднее установили, что это преобразование аффинно инвариантно. В этом параграфе мы покажем, что преобразование Радона является на самом деле проективно инвариантным объектом. Этим, кстати, оно существенно отличается от преобразования Фурье, для которого проективной версии не существует.

Мы рассматриваем преобразование Радона для вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ и вещественного проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Определения преобразований Радона для $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$ аналогичны, но, как и в случае аффинных пространств, формулы обращения для них существенно отличаются: в случае $\mathbb{P}^3$ формула локальна, а в случае $\mathbb{P}^2$ — нелокальна. Поэтому начнем со случая $\mathbb{P}^3$ как более простого.

8.1. Пространства $\mathbb{P}^3$ и $(\mathbb{P}^3)'$. Как обычно, будем задавать точки в $\mathbb{P}^3$ однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, т.е. векторами $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$, определенными с точностью до множителя. Другими словами, $\mathbb{P}^3$ задается как база естественного расслоения

$$\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3, \quad \lambda x \sim x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

Поскольку прообразы точек из $\mathbb{P}^3$ — одномерные подпространства в $\mathbb{R}^4$, то $\mathbb{P}^3$ можно интерпретировать как многообразие одномерных подпространств в $\mathbb{R}^4$.

Любая плоскость в $\mathbb{P}^3$ задается в однородных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 уравнением:

$$\langle \xi, x\rangle \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

где коэффициенты ξ_i определены с точностью до общего множителя. Таким образом, многообразие плоскостей в $\mathbb{P}^3$ само является трехмерным проективным пространством с однородными координатами $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Оно называется пространством, дуальным к $\mathbb{P}^3$, и обозначается через $(\mathbb{P}^3)'$.

8.2. Преобразование Радона для $\mathbb{P}^3$. Обозначим через $\mathcal{F}(m)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f(\lambda x) = |\lambda|^m f(x) \quad \text{для любого} \quad \lambda \neq 0. \tag{8.1}$$

Первый вопрос, возникающий при переходе от аффинного к проективному случаю, — на каком функциональном пространстве должно строиться преобразование Радона. Таким функциональным пространством является $\mathcal{F}(-3)$.

Причина, по которой берется $\mathcal{F}(-3)$ вместо пространства функций на самом $\mathbb{P}^3$, связана с тем, что на $\mathbb{P}^3$ не существует проективно инвариантной формы объема, т.е. дифференциальной 3-формы, инвариантной относительно действия на $\mathbb{P}^3$ группы $SL(4,\mathbb{R})$ проективных преобразований. Между тем, на одномерном расслоении $\mathbb{R}^4 \setminus 0$ над $\mathbb{P}^3$ такая 3-форма существует. Это дифференциальная форма Лере:

$$\omega(x) = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (\text{цикл. перест. индексов } 1,2,3,4), \tag{8.2}$$

которую удобно записывать в виде определителя с коммутирующими и антикоммутирующими элементами:

$$\omega(x) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & dx_1 & dx_1 & dx_1 \\ x_2 & dx_2 & dx_2 & dx_2 \\ x_3 & dx_3 & dx_3 & dx_3 \\ x_4 & dx_4 & dx_4 & dx_4 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем писать сокращенно:

$$\omega(x) = [x, dx, dx, dx].$$

Пусть $\xi \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$ и

$$h_\xi : \quad \langle \xi, x\rangle = 0$$

— подпространство в $\mathbb{R}^4$, отвечающее ξ. Обозначим через $\sigma_\xi(x)$ внутреннее произведение формы Лере $\omega(x)$ и формы $d(\langle \xi, x\rangle)$ на $\mathbb{R}^4$

$$\sigma_\xi(x) = d(\langle \xi, x\rangle) \rfloor \omega(x).$$

По определению, $\sigma_\xi(x)$ есть дифференциальная 2-форма на $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющая соотношению:

$$d(\langle \xi, x\rangle) \wedge \sigma_\xi(x) = \omega(x). \tag{8.3}$$

Известно, что на всем пространстве $\mathbb{R}^4$ такая форма не единственна, однако ее ограничение на подпространство h_ξ определено однозначно. Можно принять, например,

$$\sigma_\xi(x) = \frac{[x, u, dx, dx]}{\langle \xi, u\rangle},$$

где $u \in \mathbb{R}^4$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle \xi, u\rangle \neq 0$.

Пусть $f \in \mathcal{F}(-3)$. Тогда дифференциальная 2-форма на h_ξ

$$f(x)\,\sigma_\xi(x)$$

имеет степень однородности 0 и ортогональна слоям расслоения $h_\xi \to Ph_\xi$, где Ph_ξ — проективизация h_ξ. Следовательно, она опускается с h_ξ на Ph_ξ, т.е. на плоскость в $\mathbb{P}^3$.

Определение. Назовем преобразованием Радона функции $f \in \mathcal{F}(-3)$ функцию $\mathcal{R} f$ на $(\mathbb{R}^4)' \setminus 0$, заданную равенством:

$$\mathcal{R} f(\xi) = \int\limits_{\langle \xi,\, x\rangle = 0} f(x)\,\sigma_\xi(x). \tag{8.4}$$

Из определения следует, что $\varphi = \mathcal{R} f$ — бесконечно дифференцируемая функция на $(\mathbb{R}^4)' \setminus 0$, удовлетворяющая условию однородности: $\varphi(\lambda\xi) = |\lambda|^{-1}\varphi(\xi)$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$. Таким образом, преобразование Радона задает отображение:

$$\mathcal{R} : \mathcal{F}(-3) \to \mathcal{F}(-1).$$

Выражение для $\mathcal{R} f$ удобно представлять в следующем виде:

$$\mathcal{R} f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{P}^3} f(x)\,\delta(\langle \xi,\, x\rangle)\,\omega(x), \tag{8.5}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$. Интеграл следует понимать так. Сначала подинтегральную форму надо представить в произвольной системе переменных, включающей $t = \langle \xi, x\rangle$ в качестве одного из переменных, и затем применить $\delta(t)$ к переменному t (т.е. в полученной форме отбросить dt и положить $t = 0$). Замечательно, что получаемая в результате дифференциальная форма на плоскости $\langle \xi, x\rangle = 0$ не зависит от выбора исходных переменных.

8.3. Связь с аффинным преобразованием Радона для $\mathbb{R}^3$ и преобразованием Минковского — Функа для трехмерной сферы. Преобразование Радона для $\mathbb{R}^3$ и преобразование Минковского — Функа для трехмерной сферы получаются как специализация проективного преобразования Радона. Именно, для этого надо заменить однородные функции $f \in \mathcal{F}(-3)$ их ограничениями на подходящие сечения расслоения $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3$.

Чтобы получить аффинное преобразование Радона, возьмем в качестве такого сечения гиперплоскость $x_4 = 1$ и положим

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1).$$

Поскольку $\omega(x)\Big|_{x_4=1} = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, то формула (8.5) принимает вид:

$$\mathcal{R}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_0(x_1,x_2,x_3)\,\delta(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3+\xi_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

т.е. $\mathcal{R}f$ есть аффинное преобразование Радона функции f_0 на $\mathbb{R}^3$.

Чтобы получить преобразование Минковского — Функа, нужно заменить функции f и $\varphi = \mathcal{R}f$ их ограничениями соответственно на сферу $|x|=1$ в $\mathbb{R}^4$ и сферу $|\xi|=1$ в $(\mathbb{R}^4)'$. Тогда преобразование (8.5) совпадет с преобразованием Минковского — Функа $\mathcal{M}$ для функций на сфере $|x|=1$ в $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{M}f(\xi) = \mathcal{R}f(\xi)$ при $|\xi|=1$.

8.4. Формула обращения для преобразования Радона в $\mathbb{P}^3$. Наша задача — восстановить функцию $f \in \mathcal{F}(-3)$ по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}f$. Приведем сразу ответ.

$$f(x) = -(2\pi)^{-2}\int\limits_{\Gamma} \mathcal{R}f(\xi)\,\delta''(\langle\xi,x\rangle)\,\omega(\xi), \tag{8.6}$$

где $\delta''(t)$ — вторая производная дельта-функции на $\mathbb{R}$; интеграл берется по произвольному сечению Γ расслоения $\mathbb{R}^4\setminus 0 \to \mathbb{P}^3$.

Формально, стоящая под знаком интеграла дифференциальная 3-форма

$$\Omega_x = \mathcal{R}f(\xi)\,\delta''(\langle\xi,x\rangle)\,\omega(\xi)$$

имеет степень однородности 0 и ортогональна к слоям расслоения $\mathbb{R}^4\setminus 0\to\mathbb{P}^3$. Поэтому интеграл не зависит от выбора сечения Γ.

Мы должны придать смысл интегралу (8.6). С этой целью положим

$$\xi = \eta + p\zeta,$$

где $\eta\in(\mathbb{R}^4)'\setminus 0$ удовлетворяет условию $\langle\eta,x\rangle = 0$, $p\in\mathbb{R}$, а $\zeta\in(\mathbb{R}^4)'\setminus 0$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle\zeta,x\rangle\neq 0$.

Перейдем в выражении для Ω_x от переменных $\xi\in\mathbb{R}^4$ к переменным $\eta\in\mathbb{R}^4$ и $p\in\mathbb{R}$ и отбросим затем члены, не содержащие dp. Так как в новых переменных

$$\omega(\xi) = [\eta+p\zeta,\, d\eta+\zeta\,dp,\, d\eta+\zeta\,dp,\, d\eta+\zeta\,dp],$$
$$\delta''(\langle\xi,x\rangle) = |\langle\zeta,x\rangle|^{-3}\delta''(p),$$

то после отбрасывания этих членов мы получим:

$$\Omega'_x = |\langle\zeta, x\rangle|^{-3}\,\mathcal{R}f(\eta + p\zeta)\,\delta''(p)\,[\eta,\zeta,d\eta,d\eta]\wedge dp.$$

Проинтегрировав форму Ω'_x по p, получаем дифференциальную 2-форму на подпространстве $h_\xi : \langle\eta, x\rangle = 0$ в $(\mathbb{R}^4)'$:

$$|\langle\zeta, x\rangle|^{-3}(L^2\varphi)(\eta)\,[\eta,\zeta,d\eta,d\eta],$$

где

$$L = \zeta\,\frac{\partial}{\partial\eta} = \sum \zeta_i\,\frac{\partial}{\partial\eta_i}.$$

Эта форма имеет степень однородности 0 и ортогональна к слоям расслоения $h_\xi \to P(h_\xi)$, где $P(h_\xi)$ — проективизация h_ξ. Таким образом, ее можно рассматривать как форму на $P(h_\xi)$.

Итак, мы свели формулу обращения (8.6) к следующей:

Теорема 8.1. *Если $\varphi = \mathcal{R}f$, где $f \in \mathcal{F}(-3)$, то имеем:*

$$f(x) = -(2\pi)^{-2}|\langle\zeta, x\rangle|^{-3}\int\limits_{\langle\eta, x\rangle = 0}\Bigg(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4}\zeta_i\zeta_j\,\frac{\partial^2\varphi(\eta)}{\partial\eta_i\,\partial\eta_j}\Bigg)[\eta,\zeta,d\eta,d\eta], \quad (8.7)$$

где $\zeta \in \mathbb{R}^4$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle\zeta, x\rangle \neq 0$.

Замечание. В отличие от (8.5), определенное в (8.7) ограничение дифференциальной формы $\Omega_x = \mathcal{R}f(\xi)\,\delta''(\langle\xi, x\rangle)\,\omega(\xi)$ на подпространство $\langle\xi, x\rangle = 0$ не единственно, поскольку оно зависит от выбора вектора ζ. Однако все получающиеся так формы различаются между собой на точную форму.

Доказательство формулы обращения (8.7). Обозначим через $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2,3,4$, подпространство функций $f \in \mathcal{F}(-3)$, равных нулю вместе со всеми производными на подпространстве $x_i = 0$. Поскольку сумма подпространств $\mathcal{F}_i$ есть все пространство $\mathcal{F}(-3)$, то равенство (8.7) достаточно доказать для функций, принадлежащих этим подпространствам. Пусть для определенности $f \in \mathcal{F}_4$. Тогда функция на $\mathbb{R}^3$

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1)$$

принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^3)$, а из п. 8.3 следует, что $\varphi = \mathcal{R}f$ является аффинным преобразованием Радона функции f_0.

Значит, по формуле обращения для аффинного преобразования Радона имеем:

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = -(2\pi)^{-2} \int\limits_{\gamma} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_4^2}\Big|_{\eta_4 = -\eta_1 x_1 - \eta_2 x_2 - \eta_3 x_3} \Big) \, \omega_0(\eta),$$

где $\omega_0(\eta) = \eta_1 \, d\eta_2 \wedge d\eta_3 - \eta_2 \, d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \eta_3 \, d\eta_1 \wedge d\eta_2$. Отсюда следует, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_4|^{-3} f_0\big(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\big) = -(2\pi)^{-2} |x_4|^{-3} \int\limits_{\langle \eta, x \rangle = 0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_4} \, \omega_0(\eta).$$

Полученное равенство совпадает с (8.7) для случая $\zeta = (0,0,0,1)$. Таким образом, для случая $\zeta = (0,0,0,1)$ формула обращения доказана. Случай произвольного вектора ζ, для которого $\langle \zeta, x \rangle \neq 0$, сводится к этому случаю преобразованием координат в $\mathbb{R}^4$ и $(\mathbb{R}^4)'$.

Замечание. Можно было бы не предполагать, что $\zeta = \mathrm{const}$. Тогда получается формула обращения более общая, чем (8.7), в которой интегрирование ведется по двумерному циклу в многообразии пар η, ζ.

8.5. О формулах обращения для аффинного преобразования Радона в $\mathbb{R}^3$ и преобразования Минковского — Функа для S^3. Мы уже убедились в п. 8.4, что из проективной формулы обращения (8.7) при $\zeta = (0,0,0,1)$ получается формула обращения для аффинного преобразования Радона из § 2. Если в качестве ζ взять произвольный фиксированный вектор в $\mathbb{R}^4$, для которого

$$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 + \zeta_4 = c > 0,$$

то на основании (8.7) мы получаем новую формулу обращения для аффинного преобразования Радона $\mathcal{R}$, отличную от формулы обращения из § 2. Именно, пусть $\pi_x \subset (\mathbb{R}^4)'$ — подпространство, ортогональное к $(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4$, $P(\pi_x)$ — его проективизация и γ_x — любое сечение расслоения $\pi_x \to P(\pi_x)$. Тогда если $f \in S(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi = \mathcal{R} f$ — аффинное преобразование Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$, то

$$f(x) = -(2\pi)^{-2} \, c^{-3} \int\limits_{\gamma_x} \sum_{i,j=1}^{4} \zeta_i \zeta_j \, \frac{\partial^2 \varphi(\eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \, [\eta, \zeta, d\eta, d\eta].$$

Примечание. Еще более общий класс формул обращения для аффинного преобразования Радона можно получить, задавая в точках $\eta \in \pi_x \setminus 0$ гладкое векторное поле $\eta \mapsto \zeta \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$, трансверсальное к $\pi_x \setminus 0$, т.е. $\langle x, \zeta(\eta) \rangle > 0$ для любого $\eta \in \pi_x \setminus 0$. Каждому такому полю отвечает формула обращения для аффинного преобразования Радона.

Перейдем теперь к преобразованию Минковского — Функа для трехмерной сферы. Если интерпретировать элементы из $\mathcal{F}(-3)$ как четные функции на сфере $|x|=1$ в $\mathbb{R}^4$, то проективное преобразование Радона $\mathcal{R}f$ и преобразование Минковского — Функа $\mathcal{M}f$ функции $f\in\mathcal{F}(-3)$ связаны соотношением:

$$\mathcal{R}f(\xi)=|\xi|^{-1}\mathcal{M}f\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big).$$

Следовательно, формула обращения для преобразования Минковского — Функа M получается из формулы обращения (8.7) для преобразования Радона $\mathcal{R}$ заменой $\mathcal{R}f(\xi)$ на $|\xi|^{-1}\mathcal{M}f(\frac{\xi}{|\xi|})$.

8.6. Описание образа преобразования Радона для $\mathbb{P}^3$.

Теорема 8.2. *Преобразование Радона задает изоморфизм пространств*:

$$\mathcal{R}:\mathcal{F}(-3)\to\mathcal{F}(-1).$$

Доказательство. Введем оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{F}(-1)$ по формуле:

$$(\widetilde{\mathcal{R}}\varphi)(x)=-(2\pi)^{-2}\int\limits_{(\mathbb{P}^3)'}\varphi(\xi)\,\delta''(\langle\xi,x\rangle)\,\omega(\xi).$$

Из этого определения следует, что $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi\in\mathcal{F}(-3)$ для любой функции $\varphi\in\mathcal{F}(-1)$.

В силу доказанного в п. 8.4 оператор $\mathcal{R}$ инъективен и композиция $\widetilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ есть тождественный оператор на $\mathcal{F}(-3)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ имеет нулевое ядро.

Итак, пусть $\varphi\in\mathcal{F}(-1)$ и $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi=0$. Заметим, что все производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$ функции φ принадлежат $\mathcal{F}(-3)$, а потому для них определено преобразование Радона.

Так как $\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\delta(\langle\xi,x\rangle)=x_ix_j\delta''(\langle\xi,x\rangle)$, то интегрированием по частям получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{P}^3}\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\delta(\langle\xi,x\rangle)\,\omega(\xi)=x_ix_j\int\limits_{\mathbb{P}^3}\varphi(\xi)\,\delta''(\langle\xi,x\rangle)\,\omega(\xi)=0.$$

Отсюда, ввиду инъективности преобразования Радона, следует, что $\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}=0$, $i,j=1,2,3,4$, т.е. φ — полином. Поскольку, с другой стороны, φ имеет степень однородности -1, это возможно лишь при $\varphi=0$.

8.7. Преобразование Радона для проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Описание преобразования Радона для $\mathbb{P}^2$ аналогично рассмотренному уже случаю проективного пространства $\mathbb{P}^3$, а потому мы изложим его более кратко. Единственное существенное различие между случаем $\mathbb{P}^3$ и случаем $\mathbb{P}^2$ в том, что для $\mathbb{P}^3$ формула обращения локальна, а для $\mathbb{P}^2$ она нелокальна.

Обозначим по аналогии с проективным пространством $\mathbb{P}^3$ через $\mathcal{F}(m)$ пространство C^∞ функций на $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности (8.1).

Преобразование Радона для $\mathbb{P}^2$ задается в функциональном пространстве $\mathcal{F}(-2)$.

Пусть $\omega(x)$ — дифференциальная форма Лере на $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 - x_2\,dx_1 \wedge dx_3 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2,$$

или, короче, $\omega(x) = [x, dx, dx]$. Зададим на каждом подпространстве

$$h_\xi\,:\,\langle \xi, x\rangle \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

в $\mathbb{R}^3$ дифференциальную 1-форму $\sigma_\xi(x)$, определенную равенством:

$$\sigma_\xi(x) = d(\langle \xi, x\rangle) \rfloor \omega(x),$$

т.е.

$$d(\langle \xi, x\rangle) \wedge \sigma_\xi(x) = \omega(x).$$

Если $f \in \mathcal{F}(-2)$, то дифференциальная форма $f(x)\sigma_\xi(x)$ имеет степень однородности 0 и ортогональна слоям расслоения $h_\xi \to Ph_\xi$, где Ph_ξ — проективизация h_ξ. Следовательно, она опускается на Ph_ξ, т.е. на прямую в $\mathbb{P}^2$.

Определение. Назовем преобразованием Радона функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ функцию $\mathcal{R} f$ на $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, заданную равенством:

$$\mathcal{R} f(\xi) = \int\limits_{\langle \xi, x\rangle = 0} f(x)\,\sigma_\xi(x). \tag{8.8}$$

Из определения следует, что $\varphi = \mathcal{R} f$ принадлежит $\mathcal{F}(-1)$; таким образом, преобразование Радона задает отображение:

$$\mathcal{R}\,:\,\mathcal{F}(-2) \to \mathcal{F}(-1).$$

Подобно случаю проективного пространства $\mathbb{P}^3$, выражение для $\mathcal{R}f$ удобно представлять в виде:

$$\mathcal{R}f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{P}^2} f(x)\,\delta(\,\langle\xi, x\rangle\,)\,\omega(x), \tag{8.9}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$.

Перейдем к построению формулы обращения для $\mathcal{R}$.

Сначала, как и в случае пространства $\mathbb{P}^3$, приведем формальный ответ:

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\Gamma} \mathcal{R}f(\xi)\,\langle\xi, x\rangle^{-2}\omega(\xi), \tag{8.10}$$

где Γ — произвольное сечение расслоения $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{P}^2$.

Чтобы придать смысл этому интегралу, повторим рассуждения, приведенные в п. 8.4 для случая $\mathbb{P}^3$. Именно, положим $\xi = \eta + p\zeta$, где $\eta \in (\mathbb{R}^3)' \setminus 0$ удовлетворяет условию $\langle\eta, x\rangle = 0$, $p \in \mathbb{R}$, а $\zeta \in (\mathbb{R}^3)' \setminus 0$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle\zeta, x\rangle \neq 0$.

Перейдем в выражении для дифференциальной формы

$$\Omega_x = \mathcal{R}f(\xi)\langle\xi, x\rangle^{-2}\omega(\xi)$$

от переменных $\xi \in \mathbb{R}^3$ к переменным $\eta \in \mathbb{R}^3$ и $p \in \mathbb{R}$ и отбросим затем члены, не содержащие dp. Мы получим:

$$\Omega'_x = \langle\zeta, x\rangle^{-2}\,\mathcal{R}f(\eta + p\zeta)\,p^{-2}\,[\eta, \zeta, d\eta] \wedge dp.$$

Интеграл от этой формы будем понимать так. Сначала берется интеграл по p в соответствии с определением обобщенной функции p^{-2}:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p)\,p^{-2}\,dp = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F'(p)\,p^{-1}\,dp,$$

где интеграл справа нужно понимать в смысле главного значения. В результате получается дифференциальная 1-форма на прямой, которая затем интегрируется по этой прямой.

Итак, в результате формула обращения (8.10) сведена к следующей:

Теорема 8.3. *Если $\varphi = \mathcal{R}f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$, то*

$$f(x) = (2\pi)^{-1}\,\langle\zeta, x\rangle^{-2} \int\limits_{\langle\eta, x\rangle = 0} \psi(\eta, \zeta)\,[\eta, \zeta, d\eta], \tag{8.11}$$

где

$$\psi(\eta,\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{3} \zeta_i \, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi=\eta+p\zeta} \Big) \, p^{-1} \, dp, \tag{8.12}$$

$\zeta \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ *произвольный фиксированный вектор, удовлетворяющий условию* $\langle \zeta, x\rangle \neq 0$; *интеграл* (8.12) *нужно понимать в смысле главного значения.*

Подобно случаю проективного пространства (см. п. 8.4, стр. 59), доказательство формулы обращения (8.11), (8.12) сводится к формуле обращения для аффинного преобразования Радона на плоскости, полученной в § 1.

Теорема 8.4. *Преобразование Радона* $\mathcal{R}$ *для проективной плоскости* $\mathbb{P}^2$ *задает изоморфизм пространств*:

$$\mathcal{R} : \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{F}(-1).$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{R}} : \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F}(-2)$$

— оператор, заданный равенством (8.10). В силу доказанного, композиция $\widetilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ является единичным оператором на $\mathcal{F}(-2)$. Поэтому для доказательства теоремы нужно только убедиться, что оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ инъективен.

Воспользуемся тем, что $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi\Big|_{x_3=1}$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\mathcal{R}}\varphi(x_1,x_2,1) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\Gamma} \psi(\xi) \, \delta'(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3) \, \omega(\xi), \tag{8.13}$$

где

$$\psi(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_1,\xi_2,p) \, (p-\xi_3)^{-1} \, dp. \tag{8.14}$$

В самом деле, подставив (8.14) в (8.13) и проинтегрировав по ξ_3, мы получим исходное выражение для $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi\Big|_{x_3=1}$.

Равенство (8.14) задает преобразование Гильберта функции $\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ по ξ_3. Известно, что это преобразование инъективно. Далее, если $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$, то ψ — нечетная однородная C^∞-функция на $(\mathbb{R}^3)' \setminus 0$, той же степени однородности -1, что и функция φ. Поэтому все ее производные $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$ принадлежат $\mathcal{F}(-2)$.

Предположим, что $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi = 0$. Тогда интегрированием по частям получаем:

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\delta(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3)\,\omega(\xi) =$$

$$= -\xi_i \int\limits_\Gamma \psi(\xi)\,\delta'(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3)\,\omega(\xi) = 0,$$

$i = 1, 2, 3$, т.е. преобразование Радона функции $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$ равно нулю. Отсюда, ввиду инъективности преобразования Радона, следует, что $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, и, значит, $\psi = \mathrm{const}$. Поскольку, с другой стороны, функция ψ имеет степень однородности -1, то $\psi = 0$. Отсюда, ввиду инъективности преобразования (8.14), следует, что $\varphi = 0$.

Подобно трехмерному случаю, из формул обращения (8.11), (8.12) для проективного преобразования Радона получаются как следствие новые формулы обращения для преобразования Радона, связанного с аффинной плоскостью, и для преобразования Минковского — Функа, связанного с двумерной сферой.

Чтобы получить формулу обращения для преобразования Минковского — Функа, достаточно интерпретировать элементы из $\mathcal{F}(-2)$ и $\mathcal{F}(-1)$ как функции на двумерной сфере S^2. Тогда, если $\varphi = \mathcal{M}f$ — преобразование Минковского — Функа функции f на S^2, то формула обращения для f получается из (8.11), (8.12) заменой $\varphi(\xi)$ на $|\xi|^{-1}\varphi(\frac{\xi}{|\xi|})$.

§ 9. Преобразование Радона в комплексном аффинном пространстве

Определения и результаты этой главы можно перенести с вещественного на комплексный случай. В этом параграфе мы кратко излагаем определение преобразования Радона для комплексного аффинного пространства, его связь с преобразованием Фурье и формулу обращения для преобразования Радона.

По существу единственное различие между преобразованиями Радона в вещественном и комплексном пространствах в том, что в комплексном случае формула обращения для преобразования Радона всегда локальна и имеет одну и ту же структуру для пространств любой размерности. Поэтому мы излагаем результаты сразу для пространства произвольной размерности $n>1$. Приводятся только формулировки теорем.

9.1. Определение преобразования Радона. Будем задавать гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$ уравнениями

$$\langle \xi, x\rangle - p = 0,$$

где $\langle \xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$.

Преобразование Радона функции f на $\mathbb{C}^n$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R} f(\xi, p) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int\limits_{\langle \xi, x\rangle = p} f(x)\,\sigma(x) \wedge \overline{\sigma(x)}, \tag{9.1}$$

где σ — голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма на гиперплоскости $\langle \xi, x\rangle = p$, определяемая из соотношения

$$dx = d\langle \xi, x\rangle \wedge \sigma \qquad (dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n).$$

В координатах $x_1, \ldots, x_n$ форма σ задается так:

$$\sigma = (-1)^{k-1} \xi_k^{-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Выражение для $\mathcal{R} f$ удобно также записывать в виде:

$$\mathcal{R} f(\xi,p) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle - p)\, dx\, d\overline{x}, \tag{9.2}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{C}^n$.

Функция $\mathcal{R} f$ удовлетворяет условию однородности:

$$\mathcal{R} f(\lambda\xi, \lambda p) = |\lambda|^{-2}\, \mathcal{R} f(\xi, p), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0. \tag{9.3}$$

9.2. Связь с преобразованием Фурье. Преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ функции f на $\mathbb{C}^n$ определяется так:

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(x)\, e^{i\,\mathrm{Re}\,\langle \xi, x\rangle}\, dx\, d\overline{x}.$$

Оно связано с преобразованием Радона следующим соотношением:

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n}\, \frac{i}{2} \int \mathcal{R} f(\xi, p)\, e^{i\,\mathrm{Re}\, p}\, dp\, d\overline{p}. \tag{9.4}$$

Используя свойство однородности (9.3) функции $\mathcal{R} f$, соотношение между $\mathcal{R} f$ и $\mathcal{F} f$ можно записать в виде:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi) = (2\pi)^{-n} \frac{i}{2} \int \mathcal{R} f(\xi, p)\, e^{i \operatorname{Re} \lambda p}\, dp\, d\overline{p}. \tag{9.5}$$

Отсюда по формуле обращения для одномерного преобразования Фурье получаем:

$$\mathcal{R} f(\xi, p) = (2\pi)^{n-2} \frac{i}{2} \int \mathcal{F} f(\lambda\xi) e^{-i \operatorname{Re} \lambda p}\, d\lambda\, d\overline{\lambda}.$$

9.3. Формула обращения для преобразования Радона. Известно, что оператор $\mathcal{F}^{-1}$, обратный к $\mathcal{F}$, имеет вид:

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} \varphi(\xi)\, e^{-i \operatorname{Re} \langle \xi, x\rangle}\, d\xi\, d\overline{\xi}. \tag{9.6}$$

На основании равенств (9.6) и (9.4) получаем следующую формулу обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}$:

$$f(x) = (-1)^{n-1} \pi^{-2n+2} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial p^{n-1}\, \partial \overline{p}^{n-1}}\, \mathcal{R} f(\xi, \langle \xi, x\rangle)\, \omega(\xi) \wedge \overline{\omega(\xi)}, \tag{9.7}$$

где $\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \xi_k\, d\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_k} \wedge \ldots \wedge d\xi_n$, интеграл берется по произвольной поверхности $\Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую комплексную прямую, проходящую через точку 0.

Замечание. Гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$ можно интерпретировать как плоскости размерности $2(n-1)$ в вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Эти плоскости образуют $2n$-мерное подмногообразие K в многообразии H всех $2(n-1)$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^{2n}$ ($\dim H = 2(2n-1)$). Таким образом, формула обращения (9.7) дает решение следующей задачи в вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$: восстановить функцию f на $\mathbb{R}^{2n}$, если известны ее интегралы по $2(n-1)$-мерным плоскостям, входящим в $2n$-мерное семейство K.

9.4. Случай $n = 2$. При $n = 2$ формула обращения для преобразования Радона имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = -\pi^{-2} \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma} (\mathcal{R} f)''_{p,\bar{p}}(\xi_1, \xi_2; \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \times \\ \times (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1) \wedge (\overline{\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1}). \tag{9.8}$$

Запишем эту формулу в другой системе координат на многообразии прямых. Пусть прямые в $\mathbb{C}^2$ заданы уравнениями

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta \tag{9.9}$$

и коэффициенты α, β этих уравнений взяты в качестве локальных координат на многообразии прямых.

Зададим интеграл функции f на $\mathbb{C}^2$ по прямой (9.9) равенством

$$\widehat{\mathcal{R}} f(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int f(t, \alpha t + \beta)\, dt\, d\bar{t}. \tag{9.10}$$

Очевидно, что функции $\widehat{\mathcal{R}} f(\alpha, \beta)$ и $\mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2; p)$ связаны соотношением:

$$\mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2; p) = |\xi|^{-2} \widehat{\mathcal{R}} f(-\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{p}{\xi_2}).$$

Если подставить в (9.8) это выражение для $\mathcal{R} f$ и принять в качестве Γ прямую $\xi_2 = 1$, то мы получим формулу обращения в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) = -\pi^{-2} \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} (\widehat{\mathcal{R}} f)''_{\beta, \bar{\beta}}(\alpha, x_2 - \alpha x_1)\, d\alpha\, d\overline{\alpha}. \tag{9.11}$$