Предисловие

Интегральная геометрия рассматривает в первую очередь интегральные преобразования, ставящие в соответствие функциям на многообразии X их интегралы по подмногообразиям из какого-либо семейства M. Считается, что само семейство M наделено структурой многообразия. Так возникает соответствие между функциями на многообразии X и функциями на некотором многообразии M его подмногообразий. Например, функциям на евклидовом пространстве E^n ставятся в соответствие их интегралы по всевозможным прямым; в результате возникает интегральное преобразование, переводящее функции на E^n в функции на многообразии прямых.

Кроме интегрирования функций на X по подмногообразиям из семейства M, интегральная геометрия рассматривает аналогичные интегральные преобразования других объектов (плотностей на X, дифференциальных форм и т.д.). Основные задачи состоят в описании образов и ядер этих преобразований и в построении явных формул обращения, восстанавливающих исходные объекты по их образам[1]. Первой книгой, посвященной этому направлению в математике, стала монография И.М. Гельфанда, М.И. Граева и Н.Я. Виленкина[2].

Интегральная геометрия переплетается с классическим направлением в геометрии, которое начинали Плюккер, Клейн и Ли и которое ставит во главу угла различные многообразия подмногообразий и специфические структуры таких многообразий, определяемые геометрической природой их элементов. На языке этих геометрических структур и исследуются преобразования в интегральной геометрии. Исходные примеры таких многообразий — 4-мерное многообразие всех

---

[1] Называть этот круг задач интегральной геометрией предложил И.М. Гельфанд. Ранее Бляшке использовал термин “интегральная геометрия” для несколько иной проблематики, связанной с изучением инвариантного интегрирования на однородных пространствах.

[2] Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып. 5.

прямых в 3-мерном проективном пространстве (квадрика Плюккера — Клейна) и более общо многообразие Грассмана k-мерных плоскостей в n-мерном проективном пространстве, многообразие сфер Ли и т.д. Все эти многообразия играют существенную роль в интегральной геометрии.

Наиболее известный пример интегрально-геометрического преобразования — преобразование Радона — появилось в 1917 г. в статье Радона[1)], стоящей особняком в его математическом наследии. Радон рассматривает оператор интегрирования по гиперплоскостям в евклидовом пространстве и строит изложение в удивительно совершенной форме, необычно для того времени объединяя аналитические и геометрические рассмотрения и предвидя возможность рассматривать аналоги этого преобразования для других однородных пространств. В центре его внимания формула обращения — реконструкция функции через ее интегралы по гиперплоскостям. Замечательно, что получается абсолютно явная формула, имеющая принципиально разный вид в зависимости от того, является ли размерность пространства четной или нечетной. В нечетномерном случае она локальна: усредняется некоторый дифференциальный оператор вдоль семейства параллельных гиперплоскостей (для восстановления функции в точке достаточно знать интегралы лишь по гиперплоскостям, близким к этой точке). В четномерном случае формула обращения нелокальна: усредняется некоторый интегральный оператор вдоль семейства параллельных гиперплоскостей (в отличие от дифференциального в нечетномерном случае) и мы нуждаемся в интегралах по далеким плоскостям. Это соответствует тому, что принцип Гюйгенса верен для распространения волн в нечетномерном пространстве, но не верен в четномерном.

Еще до Радона Минковский и Функ рассмотрели аналог его преобразования для сферы, когда четная функция на сфере восстанавливается через ее интегралы по большим кругам. Эту реконструкцию можно осуществить, пользуясь сферическими полиномами. Радон знал об этих результатах, но он, по-видимому, не знал, что оба эти преобразования проективно эквивалентны (см. гл. I).

В 1938 г. Йон [2)] рассмотрел естественное обобщение преобразования Радона, когда функции в трехмерном пространстве интегрируются по всевозможным прямым вместо плоскостей. В этой конструкции появляется новый исключительно важный момент. Семейство прямых зависит от 4 параметров. Тем самым преобразование Йона действует из

[1)] Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwärte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. — Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. *69* (1917), 262–277.

[2)] John F. The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables. Duke Math. J., 1938, 300-322.

функций 3 переменных в функции 4 переменных, а потому естественно ожидать, что функции из образа удовлетворяют дополнительному условию. Центральное наблюдение Йона в том, что они удовлетворяют ультрагиперболическому дифференциальному уравнению, которое полностью описывает образ. Это важнейшее для будущего интегральной геометрии наблюдение не только ввело в обращение переопределенные задачи, но и определило ее связи с дифференциальными уравнениями.

Начиная с 40-х гг. одной из центральных задач в математике была задача развить аналог интеграла Фурье для некоммутативных групп Ли. Одной из первых в поле зрения (в первую очередь из-за физических применений) попала группа Лоренца $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. группа комплексных матриц 2-го порядка с определителем 1. Для этой группы И.М. Гельфанду и М.А. Наймарку[1)] удалось построить теорию, в которой роль экспонент играли неприводимые бесконечномерные унитарные представления группы Лоренца, и в то же время сохранялись все основные черты классического интеграла Фурье. Ее высшей точкой были аналоги формулы обращения и формулы Планшереля для интеграла Фурье.

Как выяснилось позже, основной момент в доказательстве этих формул состоял в восстановлении функции в $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым, пересекающим гиперболу. Таким образом, рассматривался комплексный вариант преобразования Йона, но для восстановления функции использовались интегралы не по всем комплексным прямым (4-параметрическое семейство), а лишь по прямым из 3-параметрического семейства прямых, пересекающих гиперболу. Такая постановка задачи естественна, поскольку восстанавливалась функция от 3 переменных. Сам же аналог преобразования Фурье на группе Лоренца связан с указанным преобразованием интегральной геометрии при помощи обычного одномерного преобразования Фурье.

Это наблюдение открыло новые возможности для интегральной геометрии. Прежде всего возник вопрос, насколько общим является феномен, подмеченный в случае группы Лоренца. Оказалось, что для широкого класса однородных пространств, включающего комплексные полупростые группы Ли и римановы симметрические пространства, существует преобразование интегральной геометрии — орисферическое преобразование, связанное с аналогом преобразования Фурье для этих однородных пространств при помощи обычного преобразования Фурье. Эта связь аналогична связи между преобразованием Радона и классическим n-мерным преобразованием Фурье при помощи одномерного преобразования Фурье. С другой стороны, контекст интегральной геометрии оказался значительно более широким

[1)] Гельфанд И.М., Наймарк М.А. Унитарные представления группы Лоренца. — Известия АН СССР. —1947. — № 11. — С. 411–504. — (Сер. матем.).

по сравнению с теорией представлений. Например, вместо семейства прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих гиперболу, можно рассмотреть семейство прямых, пересекающих любую другую алгебраическую кривую, и получить аналогичную явную формулу обращения, хотя никаких связей с группами или однородными пространствами здесь уже не будет. Это наводит на мысль, что по-видимому естественная общность для многомерного гармонического анализа это не только группы или однородные пространства, но и какие-то более общие геометрические структуры, в частности, "хорошие" многообразия подмногообразий, для которых существуют явные формулы обращения.

Стало естественным развивать методы геометрического анализа, ориентированные на интегральную геометрию и позволяющие, в частности, построить гармонический анализ на широком классе однородных пространств, включающем симметрические пространства. Этот ориентир стал главным для дальнейшего развития интегральной геометрии. За последующие годы многое в этом направлении уже удалось сделать, но многое еще остается неясным. Довольно полная картина имеется в задаче о "хороших" (допустимых) семействах комплексных кривых, для которых существует явная локальная формула обращения. Однако значительно менее полны результаты о семействах комплексных подмногообразий размерности бóльшей 1 (хотя и того, что известно, достаточно, чтобы получить формулу Планшереля на комплексных полупростых группах Ли средствами интегральной геометрии). Много нерешенных проблем остается в вещественном случае; это в особенности построение нелокальных формул обращения и выяснение связи дискретных серий представлений с интегральной геометрией.

С другой стороны, обнаружились интересные и глубокие связи интегральной геометрии с многомерным комплексным анализом, симплектической геометрией, нелинейными дифференциальными уравнениями, точно интегрируемыми методами обратной задачи. Заметим также, что имеются и прикладные аспекты интегральной геометрии. Обращение преобразования Радона лежит в основе компьютерной томографии. Имеются и другие физические задачи (в астрофизике, геофизике, электронной микроскопии и т.д.), в которых данные могут быть интерпретированы как преобразование Радона.

Эта книга преследует очень скромные цели. Мы хотим на примере самых элементарных задач показать некоторые идеи и конструкции в интегральной геометрии. Мы надеемся, что основная часть материала будет доступна студентам, которые смогут увидеть на этих примерах, как взаимодействие элементарного анализа и геометрии приводит к красивым и важным результатам. Четыре главы этой книги посвящены четырем преобразованиям. Мы начинаем с преобразования Радона (глава I). Существенный момент, который часто игнорируется, здесь состоит в том, что преобразование Радона имеет проективную природу и что в проективной версии оно включает в себя не только аффинное преобразование Радона, но и преобразование Минковского—Функа на сфере. В главе II исследуется преобразование Йона (лучевое преобразование). Как мы уже отмечали, задача обращения для него переопределена, поэтому важно понять, как ее поставить и как описать некоторый класс формул обращения для подходящих трехпараметрических семейств прямых. Эта задача решается здесь в комплексном случае. В главе III излагается интегральная геометрия на 2-мерном и 3-мерном пространствах Лобачевского. Ненулевая кривизна этих пространств приводит к большему разнообразию задач. В частности, имеются две версии преобразования Радона: геодезическая и орисферическая. Однако формулы обращения похожи на евклидовские, и их вывод лишь ненамного сложнее. Вообще для интегральной геометрии типично, что явные формулы обращения имеют некоторую стандартную структуру и мало меняются при усложнении геометрии (в отличие от формул в теории представлений групп). На это есть серьезные причины, которые во многом поняты, но их обсуждение выходит за рамки нашей книги. Мы рассматриваем также аналог преобразования Фурье в пространстве Лобачевского; результаты для него получаются на основе орисферического преобразования Радона. Наконец в главе IV развивается интегральная геометрия на группе $SL(2,\mathbb{C})$, которая, как мы упоминали выше, была стартовым примером для современного развития интегральной геометрии.

Ввиду элементарной природы книги мы не приводим подробную библиографию по интегральной геометрии и ограничиваемся подстрочными ссылками на публикации, которые упоминаются по ходу изложения.

Авторы выражают глубокую благодарность М. М. Граеву (младшему) за помощь при оформлении рукописи и ряд полезных замечаний.