

## Прямоугольники на кривой и вложения листа Мёбиуса

В. В. Прасолов

В 1929 г. советский математик Л. Г. Шнирельман доказал, что на любой гладкой несамопересекающейся кривой на плоскости можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами квадрата.<sup>1)</sup> Его статья была напечатана малым тиражом в сборнике Комакадемии и впоследствии была перепечатана в журнале «Успехи математических наук» (см. [3]). Это доказательство довольно трудное, оно занимает 5 страниц.

Несколько неожиданные топологические рассуждения позволяют доказать более слабое утверждение: на любой гладкой несамопересекающейся кривой на плоскости можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами прямоугольника. Это доказательство<sup>2)</sup> основано на том, что при любом вложении листа Мёбиуса в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  его средняя линия и край зацеплены<sup>3)</sup>. Это свойство листа Мёбиуса давно было известно топологам, но недавно появилось очень простое его доказательство, одна из важнейших составных частей которого восходит к знаменитому математику Конвею. Это доказательство мы тоже здесь приведем, но сначала объясним, как из указанного свойства листа Мёбиуса следует существование прямоугольника.

**ТЕОРЕМА 1.** *На любой гладкой замкнутой плоской кривой  $\gamma$  можно выбрать 4 точки, являющиеся вершинами прямоугольника.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждой паре точек  $A, B$  кривой  $\gamma$  сопоставим точку  $f(A, B)$  следующим образом. Из середины отрезка  $AB$  проведем перпендикуляр к плоскости кривой  $\gamma$  и отложим на нем отрезок длины  $AB$ . Конец этого отрезка — это и есть  $f(A, B)$ . (Все точки  $f(A, B)$  мы выбираем в одном и том же полупространстве.) Случай  $A = B$  не исключается; в этом случае  $f(A, A) = A$ .

<sup>1)</sup>Точнее говоря, Шнирельман доказал свою теорему для замкнутых несамопересекающихся кривых, имеющих непрерывную кривизну или состоящих из конечного числа дуг таких кривых.

<sup>2)</sup>Его изложение можно найти на сс. 82–88 книги [5].

<sup>3)</sup>Из этого, кстати сказать, очевидным образом следует, что проективную плоскость  $\mathbb{RP}^2$  нельзя вложить в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ .

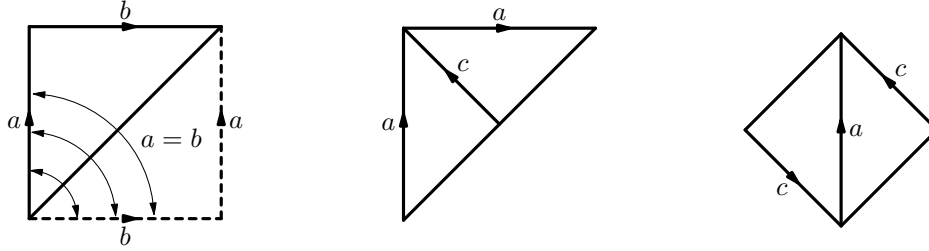


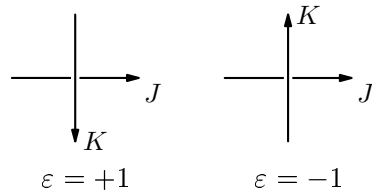
Рис. 1. Лист Мёбиуса

Мы получили отображение в  $\mathbb{R}^3$  некоторого топологического пространства. Легко видеть, что это пространство представляет собой тор  $S^1 \times S^1$ , точки которого отождествлены по следующему правилу:  $(x, y) \sim (y, x)$  (мы не различаем пары  $A, B$  и  $B, A$ ). Это пространство является листом Мёбиуса. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на рис. 1.

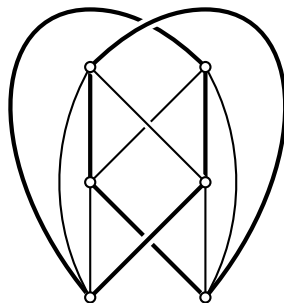
Предположим, что отображение  $f$  является биекцией на свой образ. Тогда, в частности, мы получим вложение листа Мёбиуса в трехмерное пространство, которое устроено следующим образом: край листа Мёбиуса лежит в некоторой плоскости, а остальная его часть лежит по одну сторону от этой плоскости. В таком случае край листа Мёбиуса и его средняя линия не зацеплены (чуть позже мы поясним, что это означает). Приходим к противоречию.

Следовательно, найдутся две пары точек  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$ , для которых  $f(A_1, B_1) = f(A_2, B_2)$ . Это означает, что середины отрезков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  совпадают и их длины равны. В таком случае  $A_1A_2B_1B_2$  — прямоугольник.

Чтобы двигаться дальше, нужно объяснить, что такое коэффициент зацепления двух гладких ориентированных замкнутых кривых  $J$  и  $K$  в трехмерном пространстве, которые не имеют самопересечений и попарно не пересекаются. Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления, состоящего из двух кривых  $J$  и  $K$ , т.е. рассмотрим проекцию кривых  $J$  и  $K$  на некоторую плоскость и на перекрестках будем отмечать, какая дуга проходит сверху. Будем обращать внимание лишь на те перекрестки, где кривая  $K$  проходит над  $J$ . Такие перекрестки бывают двух типов (рис. 2). Для каждого рассматриваемого перекрестка возьмем соответствующее значение  $\varepsilon_i = \pm 1$  и сложим все числа  $\varepsilon_i$ . Полученное в результате целое число называют *коэффициентом зацепления* замкнутых ориентированных кривых  $J$  и  $K$  в  $S^3$  и обозначают  $\text{lk}(J, K)$ . Можно доказать, что коэффициент зацепления является инвариантом зацепления  $\{J, K\}$ , т.е.



**Рис. 2.** Два типа перекрестков



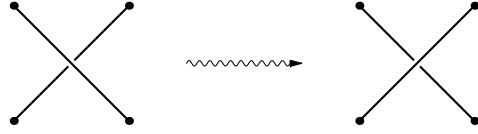
**Рис. 3.** Граф  $K_6$  с двумя зацепленными циклами

он не зависит от выбора диаграммы этого зацепления. (Другие подходы к определению коэффициента зацепления обсуждаются в моей статье [1] в одном из предыдущих выпусков этого журнала; подробно коэффициент зацепления обсуждается в книге [2]).

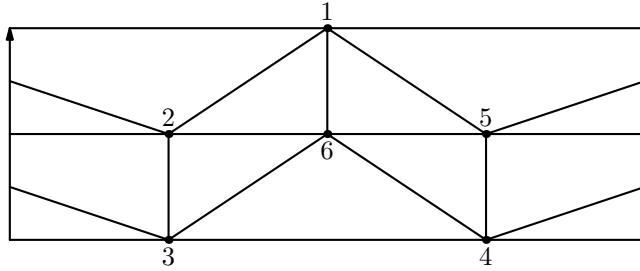
Рассмотрим вложение в  $\mathbb{R}^3$  графа  $K_6$ , состоящего из шести вершин, попарно соединенных ребрами. Выберем в графе  $K_6$  три вершины и рассмотрим цикл  $C_1$ , порожденный этими тремя вершинами, и цикл  $C_2$ , порожденный тремя остальными вершинами. Фиксируем проекцию вложенного в  $\mathbb{R}^3$  графа  $K_6$  и определим  $\omega(C_1, C_2)$  как остаток от деления на 2 количества перекрестков, на которых цикл  $C_1$  проходит над  $C_2$ . Иными словами,  $\omega(C_1, C_2) = \text{lk}(C_1, C_2) \pmod{2}$ , где  $\text{lk}$  — коэффициент зацепления. В частности,  $\omega(C_1, C_2) = \omega(C_2, C_1)$  (доказательство этого свойства коэффициента зацепления приведено в [2]). Поэтому можно рассмотреть число  $\lambda(K_6) = \sum \omega(C_i, C_j)$ , где суммирование ведется по всем  $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$  неупорядоченным парам непересекающихся циклов из трех элементов.

**ТЕОРЕМА 2** ([7] и [4]). *Для любого вложения графа  $K_6$  в трехмерное пространство  $\lambda(K_6) \equiv 1 \pmod{2}$ . В частности, для любого такого вложения найдется пара зацепленных циклов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** У графа  $K_6$  есть вложение в  $\mathbb{R}^3$ , для которого ровно два цикла зацеплены, а все остальные циклы незацеплены (рис. 3).



**Рис. 4.** Изменение типа перекрестка (пересечение пары ребер)



**Рис. 5.** Вложение графа  $K_6$  в лист Мёбиуса

Любое вложение графа  $K_6$  в  $\mathbb{R}^3$  можно преобразовать в данное вложение, если при этом допускаются преобразования ребер, изображенные на рис. 4.

Посмотрим, что происходит с  $\lambda(K_6)$  при пересечении пары ребер  $e_i$  и  $e_j$ . Число  $\omega(C_p, C_q)$  при этом изменяется лишь в том случае, когда  $e_i \subset C_p$  и  $e_j \subset C_q$  (или  $e_j \subset C_p$  и  $e_i \subset C_q$ ). Непересекающиеся циклы  $C_p$  и  $C_q$ , содержащие пару ребер  $e_i$  и  $e_j$ , существуют тогда и только тогда, когда ребра  $e_i$  и  $e_j$  несмежные. Таких пар циклов для данных ребер  $e_i$  и  $e_j$  ровно две: к ребру  $e_i$  можно добавить одну из двух вершин, которые не входят в  $e_i$  и  $e_j$ . Таким образом, при пересечении ребра с самим собой или со смежным ребром число  $\sum \text{lk}(C_i, C_j)$  не изменяется, а при пересечении ребра с несмежным ребром это число изменяется на  $\pm 2$ . Поэтому число  $\lambda(K_6) = \sum \text{lk}(C_i, C_j) \pmod{2}$  не изменяется при всех преобразованиях вложения графа  $K_6$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.** При любом вложении листа Мёбиуса в  $\mathbb{R}^3$  его край зацеплен со средней линией.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** ([6]) Вложим в лист Мёбиуса граф  $K_6$ , как показано на рис. 5.

Циклы 134 и 256 соответствуют краю листа Мёбиуса и его средней линии. Несложно проверить, что во всех других парах несамопересекающихся циклов один из циклов заклеен треугольной областью, принадлежащей листу Мёбиуса. Такие циклы не могут быть зацеплены, потому

что иначе возникли бы самопересечения листа Мёбиуса. Если циклы  $C_i$  и  $C_j$  не зацеплены, то  $\omega(C_i, C_j) = 0$ . Поэтому циклы 134 и 256 зацеплены.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Проективную плоскость  $\mathbb{R}P^2$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^3$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вырежем из вложенной в  $\mathbb{R}^3$  проективной плоскости диск  $D^2$ . В результате получим лист Мёбиуса. Его средняя линия  $C$  зацеплена с  $S^1 = \partial D^2$ , поэтому  $C$  пересекает  $D^2$ , чего не может быть.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прасолов В. В. *Поверхность Зейферта* // Математическое просвещение, вып. 3, 1999. С. 116–126.
- [2] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. М.: МЦНМО, 1997.
- [3] Шнирельман Л. Г., *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых* // Успехи математических наук, выпуск X, 1944. С. 34–44.
- [4] Conway J. H., Gordon C. McA. *Knots and links in spatial graphs* // J. Graph Theory **7**, 1983. P. 445–453.
- [5] Krantz S. G. *Techniques of problem solving*. AMS, 1997.
- [6] Maehara H. *Why is  $P^2$  not embedable in  $\mathbb{R}^3$ ?* // Amer. Math. Monthly **100**, 1993. P. 862–864.
- [7] Sachs H. *On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem* // Lecture Notes Math., **1018**, 1982. P. 231–240.