Теорема Неймана о минимаксе — общеизвестная и неизвестная

Б. Р. Френкин

Теорема Неймана о минимаксе по праву считается ключевым результатом теории игр, но распространено мнение, что Нейман доказал ее лишь для билинейного случая, причем сложным способом. В действительности Нейман доказал эту теорему для широкого класса функций, с чем и связан его метод — прозрачный по идее, родственный доказательствам целого ряда последующих обобщений и по сути своей топологический. По той же принципиальной схеме доказывается и теорема Хана–Банаха. Как известно, другой подход к теореме о минимаксе связан с теоремой Какутани, первоначально также полученной (в других терминах) Нейманом; в заметке приводится наиболее простое ее доказательство, принадлежащее Какутани.

1.

28 декабря 2003 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Джона (Яноша, Иоганна) фон Неймана — одного из величайших математиков XX века. Ему принадлежат основополагающие результаты во многих областях, и одним из первых стала теорема о минимаксе, доказанная в его статье „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele“, Mathematische Annalen, 100 (1928), 295–320 (русский перевод [3]). Появление этой работы считается моментом рождения теории игр как самостоятельной математической дисциплины. Нейман сформулировал основные понятия теории игр и постановку ее задач, доказал ее ключевую теорему, которая затем получила разнообразные применения и обобщения. Однако именно принципиальная новизна этого результата привела к тому, что нередко он не воспринимался в полном объеме — это относится и к общности формулировки, и к методу доказательства.

Можно встретить утверждения, что первоначальное доказательство Неймана излишне усложнено. Источником такой оценки служит не что иное, как книга Неймана и Моргенштерна [4], где на с. 178 говорится следующее: «Доказательство нашей теоремы, приведённое в первой статье [т. е. статье 1928 г.], довольно запутанным образом использует аппарат топологии и теории функций». Иногда полагают также, что результат Неймана относится только к билинейным функциям. (Однако необходимо отметить, что, например, Какутани [9] формулирует — и доказывает своим методом — теорему Неймана в полной общности.) Для билинейного случая впоследствии появились более элементарные доказательства, чем в действительности и вызвано цитированное замечание.

На самом деле Нейман доказал теорему о минимаксе в гораздо большей общности: для функций, которые непрерывны на прямом произведении симплексов, квазивогнуты на одном из них и квазивыпуклы на другом, причем симплексы в этом доказательстве можно заменить произвольными выпуклыми компактами в конечномерном вещественном пространстве (см. п. 3)[1]. Теоремой Неймана охватывается, в частности, популярный впоследствии случай непрерывных вогнуто-выпуклых функций.

Именно с общностью результата и связан метод Неймана, прозрачный по идее и родственный доказательствам ряда позднейших обобщений (см. пп. 3, 4). С другой стороны, более элементарные доказательства для билинейного случая (см., например, [4, с. 163–167, 178–179]) опираются на теорему о разделяющей (или опорной) гиперплоскости, тесно связанную с теоремой Хана – Банаха. Однако анализ доказательства теоремы Хана – Банаха показывает, что оно само строится по той же принципиальной схеме, что и доказательство Неймана (см. пп. 4, 5). Интересно отметить, что обе теоремы были получены практически одновременно (работа Хана появилась в 1927, Неймана в 1928 и Банаха в 1929), но в совершенно разном контексте, и их связь вначале не осознавалась.

2.

Что же в действительности доказал Нейман и в чем состоит его метод?

В статье [1] формулируется следующая

Теорема о минимаксе для билинейных функций. Пусть $h(\xi,\eta)$ — вещественная билинейная функция от векторов ξ и η в конечномерных вещественных пространствах, причем эти векторы пробегают симплексы, натянутые на нулевой вектор и координатные орты. Тогда

$$\max_{\xi}\min_{\eta}\ h(\xi,\eta) = \min_{\eta}\max_{\xi}\ h(\xi,\eta)\ . \qquad (*)$$

Различные теоремы о минимаксе отличаются от вышеприведенной, во-первых, классом рассматриваемых функций, а во-вторых, характером их области определения. Заключение теоремы обычно имеет вид «максмин равен минимаксу». (В равенстве (*) максмин или максимин — это левая часть, а минимакс — правая. Разумеется, в доказательстве нуждается лишь то, что максмин не меньше минимакса. Обратное неравенство всегда справедливо: «самый длинный среди самых коротких по шеренгам не длиннее, чем самый короткий среди самых длинных по колоннам».)

В дальнейшем появились варианты теоремы, где речь идет о супремумах и инфимумах. Если же минимакс и максмин действительно достигаются, то, как легко проверить, их равенство эквивалентно существованию *седловой точки*, где одновременно достигается максимум по ξ и минимум по η. Действительно,

---

[1] Отметим, что по этому поводу в заметке [8] допущена неточность: доказательство Неймана требует именно непрерывности на произведении компактов, а не только полунепрерывности с соответствующей стороны на каждом из них. Обобщение на случай полунепрерывности (для квазивогнуто-квазивыпуклых функций, при возможной некомпактности одного из двух множеств определения) принадлежит М. Сайону (см. [1, с. 259-260]).

пусть минимакс достигается в точке (x, y_0), а максмин — в точке (x_0, y). Тогда $f(x, y_0) \geqslant f(x_0, y_0) \geqslant f(x_0, y)$. Если минимакс равен максмину, то двойное неравенство обращается в равенство и точка (x_0, y_0) — седловая. Обратно, если седловая точка существует, то значение функции в ней не меньше минимакса и не больше максмина. Так как минимакс не может быть меньше максмина, то они равны.

Нейман формулирует свое утверждение для билинейной функции, но пишет, что при доказательстве требуются лишь некоторые из ее свойств (видимо, с этой формулировкой и связана иллюзия, что его теорема доказана только для билинейного случая). Роль билинейных функций определяется тем, что в игре двух участников с конечным числом вариантов ходов (*чистых стратегий*) игроки могут выбирать их с некоторыми вероятностями — использовать *смешанные стратегии*; тогда выигрыш игрока (и проигрыш его противника) является билинейной функцией от этих вероятностей. Для такой ситуации теорема о минимаксе означает, что существует *решение игры* — такая пара смешанных стратегий, когда каждый игрок получает результат, наилучший при данных действиях противника.

Развитие теории игр заставило рассматривать и другие функции выигрыша. Начало этому положил Нейман в статье [10], где применяется теорема Брауэра о неподвижной точке и доказано ее обобщение, которое позже получил другим способом Какутани (см. п. 6). Затем был доказан ряд вариантов теоремы о минимаксе, ориентированных на максимальную общность либо, наоборот, на конкретные приложения (см. [1, с. 238–267, 362]). В 1959 У Вэнь-цзюнь (см. [1, с. 258–259]) впервые опубликовал чисто топологический вариант теоремы — непростой по формулировке и (как следствие) по доказательству, но зато охвативший множество известных вариантов. Эту теорему обобщил Хоанг Туй (см. [1, с. 253–258]), а позднее и другие авторы.

3.

Вернемся к статье Неймана. Он отмечает, что в доказательстве требуется не билинейность функции, а (в современной терминологии) ее квазивогнутость по ξ, квазивыпуклость по η и непрерывность по совокупности переменных. Квазивогнутость (соответственно квазивыпуклость) означает, что если функция на обоих концах отрезка не меньше (соответственно не больше) некоторого значения, то это верно на всём отрезке. Таким свойством обладает любая вогнутая (соответственно выпуклая) функция. Но классы квазивогнутых и квазивыпуклых функций гораздо шире; например, им принадлежит любая монотонная функция.

Как отмечено в п. 1, симплексы, служащие областью изменения переменных ξ и η, можно заменить любыми выпуклыми компактами в конечномерных вещественных пространствах. Что же касается «запутанного» доказательства теоремы Неймана, то оно состоит в следующем (некоторые обозначения отличаются от авторских).

Доказательство теоремы Неймана для квазивогнуто-квазивыпуклых непрерывных функций. Выберем в пространствах переменных ξ и η

по одной координате ξ_r и η_s и рассмотрим функции (от остальных координат) $\max\limits_{\xi_r}\min\limits_{\eta_s} f(\xi,\eta)$ и $\min\limits_{\eta_s}\max\limits_{\xi_r} f(\xi,\eta)$, где переменные меняются в пределах области определения функции $f(\xi,\eta)$. Непосредственно проверяется, что введённые функции обладают перечисленными выше свойствами (непрерывностью, квазивогнутостью и квазивыпуклостью по соответствующим группам переменных). Если мы докажем, что эти две функции тождественно совпадают, то теорема будет следовать из очевидной индукции.

Зафиксируем значения всех переменных, кроме ξ_r и η_s, и будем считать f функцией от двух последних. Далее, зафиксируем некоторое значение x переменного ξ_r и рассмотрим множество тех значений η_s, при которых $f(x,\eta_s)$ достигает минимума. Из непрерывности функции f вытекает, что это множество непусто и замкнуто, а из ее квазивыпуклости по η_s — что оно выпукло. Кроме того, оно ограниченно, так как ограниченна область определения функции. Значит, это некоторый отрезок (возможно, сводящийся к точке) $[K'(x),K''(x)]$.

Зафиксируем значение y переменного η_s и рассмотрим множество тех значений переменного ξ_r, при которых $f(\xi_r,y)$ достигает максимума. Аналогично предыдущему получаем, что это некоторый отрезок $[L'(y),L''(y)]$. Из непрерывности функции f вытекает, что функции $K'(\xi_r), L'(\eta_s)$ полунепрерывны снизу, а $K''(\xi_r), L''(\eta_s)$ полунепрерывны сверху[2)]. Действительно, пусть $\xi_r \to x$, $K'(\xi_r) \to y$. Тогда $f(\xi_r,K'(\xi_r)) \to f(x,y)$, поскольку функция f непрерывна. Но вместе с ней непрерывна и $f(\xi_r,K'(\xi_r)) = \min_{\eta_s} f(\xi_r,\eta_s)$; значит, $f(x,y) = f(x,K'(x))$, откуда $y \geqslant K'(x)$, т. е. функция K' полунепрерывна снизу. Полунепрерывность K'', L', L'' доказывается аналогично.

Рассмотрим объединение всех отрезков $[L'(\eta_s),L''(\eta_s)]$, где η_s пробегает $[K'(x),K''(x)]$. На этом отрезке полунепрерывная снизу функция $L'(\eta_s)$ достигает минимума $H'(x)$, а полунепрерывная сверху функция $L''(\eta_s)$ — максимума $H''(x)$. Предположим, что некоторое число x', промежуточное между $H'(x)$ и $H''(x)$, не принадлежит указанному объединению. Тогда каждый отрезок $[L'(\eta_s),L''(\eta_s)]$ целиком расположен либо слева, либо справа от x', причем существуют отрезки обоих видов (например, те, которые содержат $H'(x)$ и $H''(x)$ соответственно). На отрезке $[K'(x),K''(x)]$ найдется значение $\eta_s = y$, в любой окрестности которого встречаются оба случая. Так как функция $L'(\eta_s)$ (соответственно $L''(\eta_s)$) полунепрерывна снизу (соответственно сверху), то $L'(y) \leqslant x'$, $L''(y) \geqslant x'$, т. е. x' принадлежит отрезку $[L'(y),L''(y)]$, в противоречии с предположением. Значит, в действительности объединение отрезков $[L'(\eta_s),L''(\eta_s)]$ заполняет весь отрезок $[H'(x),H''(x)]$.

Из полунепрерывности с соответствующей стороны функций K', K'', L', L'' нетрудно получить, что функция $H'(\xi_r)$ полунепрерывна снизу, а $H''(\xi_r)$ — сверху. Рассуждая как в предыдущем абзаце, убеждаемся в существовании такого x, что $H'(x) \leqslant x \leqslant H''(x)$. Это означает существование такого y, что (x,y) является точкой минимума по η_s и точкой максимума по ξ_r, т. е. седловой точкой для f. Как отмечено выше, отсюда вытекает равенство минимакса и максмина. $\square$

[2)]Функция $f(x)$ полунепрерывна снизу в точке x_0, если из $x \to x_0$, $f(x) \to y$ следует $y \geqslant f(x_0)$. Полунепрерывность сверху определяется аналогично.

4.

Принципиальную схему, лежащую в основе изложенного доказательства, можно сформулировать следующим образом (см. [8], где по этой схеме доказано одно топологическое обобщение теоремы Неймана). Пусть топологическое пространство S (в данном случае это отрезок с выколотой точкой x') состоит из двух открытых непересекающихся множеств S^+ и S^-. Имеется семейство $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ связных подмножеств пространства S; в данном случае это отрезки $[L'(\eta_s)], L''(\eta_s)]$ — в предположении, что x' не принадлежит их объединению. При этом множество индексов I является связным топологическим пространством (в данном случае — отрезком). Пусть I^+ и I^- — множества тех индексов $\alpha \in I$, для которых M_α не пересекается соответственно с S^+ и с S^-. Будучи связными, M_α не могут пересекаться одновременно с S^+ и S^-. Поэтому объединение множеств I^+ и I^- совпадает с I. Для конкретной ситуации доказывается, что оба множества замкнуты. Ввиду связности пространства I отсюда вытекает, что либо одно из них пусто, либо они пересекаются, и тогда должно быть пустым хотя бы одно из M_α. (В данном случае получаем противоречие, которое показывает, что точки x' не существует. Затем эта схема применяется еще раз — к отрезкам $[H'(x), H''(x)]$.)

Описанное рассуждение лежит в основе доказательств У Вэнь-цзюня, Хоанг Туя, а также всех доказательств теорем о минимаксе, которые опираются на теорему о разделяющей гиперплоскости. Дело в том, что она является модификацией теоремы Хана – Банаха, а в доказательстве последней мы находим ту же схему! Так что по существу теорема Неймана — не следствие (в билинейном случае), а аналог теоремы Хана – Банаха.

5.

Читателю, знакомому со стандартным доказательством теоремы Хана – Банаха, последнее утверждение может показаться странным. В этом доказательстве речь идет о функционалах в линейном нормированном пространстве, над которыми выполняются алгебраические операции. На самом деле, как мы сейчас увидим, это доказательство допускает прозрачное изложение на основе описанной выше топологической схемы. Мы следуем заметке [8].

Будем доказывать теорему в следующей формулировке.

Теорема Хана – Банаха. Пусть на вещественном линейном пространстве N задан выпуклый функционал $P(x)$, а на некотором его подпространстве M — линейный функционал $F(x)$, подчиненный условию

$$F(x) \leqslant P(x) \tag{$**$}$$

(оба функционала — вещественные). Тогда $F(x)$ продолжается до линейного функционала на всём пространстве, удовлетворяющего условию $(**)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда M — гиперплоскость: далее проводится (трансфинитная) индукция по размерности. Выберем точку $a \in N$, не принадлежащую M. Продолжение функционала $F(x)$ с M на

N может принимать любое значение в точке a и определяется им однозначно. Точки, в которых данное продолжение нарушает $(**)$, назовем *недопустимыми*. Вследствие выпуклости $P(x)$ множество таких точек выпукло. Поэтому оно лежит по одну сторону от M либо пусто. С каждой стороны от M какое-то продолжение имеет недопустимые точки (и потому не имеет их с другой стороны): достаточно положить в одном случае $F(a) > P(a)$, в другом $F(a) < -P(-a)$.

Пусть теперь I^+ и I^- - множества значений в точке a тех продолжений функционала $F(x)$, у которых нет недопустимых точек соответственно по одну и по другую сторону от M. В силу сказанного эти множества непусты и их объединением служит вещественная прямая. Нетрудно видеть, что I^+ и I^- замкнуты. Поэтому они пересекаются; точки пересечения соответствуют искомым продолжениям функционала $F(x)$. □

Мы видим, что в связи с теоремой о минимаксе Нейман сделал существенно больше, чем нередко считается. Он доказал эту теорему для широкого класса ситуаций и создал метод, важнейший в подобных вопросах. (Тут уместно вспомнить слова, сказанные С. Б. Стечкиным по поводу теоретико-числовых проблем в 1970 г. на заседании Московского математического общества: «У классиков всегда написано несколько больше, чем у тех, кто их переписывал».) Создавая теорию для описания нового класса ситуаций, Нейман не стремился достичь максимальной «привязки к местности», к наличным примерам. Наоборот, он хотел выявить принципиальную суть явлений, их логическую схему. И при этом обнаружилось родство с существенными фактами из различных разделов математики. Наглядно подтвердились слова Пуанкаре [7, с.388]: «...Математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам.»

6.

После сказанного будет нелишне подчеркнуть, что различные методы доказательства теорем о минимаксе имеют свои преимущества. В частности, теорема Неймана легко следует из теоремы Какутани о неподвижной точке. Последний результат имеет большое значение и в других вопросах — например, в связи с проблемами экономического равновесия. Однако на русском языке в течение долгого времени доказательство теоремы Какутани (не самое прозрачное) имелось лишь в одном общедоступном источнике, а именно [5, с. 97–99]. Лишь совсем недавно первоначальное, более простое доказательство Какутани было изложено в книге [6, с. 96–97]. Поэтому представляется полезным дополнить эту заметку доказательством теоремы Какутани, включив вывод из нее теоремы Неймана. Как и [6], мы в основном следуем первоисточнику [9].

Теорема Какутани. Пусть в r-мерном вещественном пространстве дан выпуклый компакт S и каждой его точке x поставлено в соответствие выпуклое подмножество $\Phi(x) \subset S$, причем отображение Φ *замкнуто* (в иной терминологии *полунепрерывно сверху*): если $x_i \to x$, $y_i \to y$ и $y_i \in \Phi(x_i)$ при всех i, то $y \in \Phi(x)$ («предел образов содержится в образе предела»). Тогда у отображения Φ имеется *неподвижная точка* — такая точка x, что $x \in \Phi(x)$.

Доказательство. Поместим S внутрь r-мерного симплекса S'. Как известно, существует непрерывное отображение $\psi : S' \to S$, при котором $\psi(x) = x$ для всех $x \in S$ (*ретракция* симплекса S' на S). Положив $\Phi(x) = \Phi(\psi(x))$ для всех $x \in S'$, мы продолжим отображение Φ на весь симплекс, причем замкнутость отображения и выпуклость образов сохранится. Теперь достаточно найти неподвижную точку на S': она будет принадлежать S, поскольку $\Phi(S') \subseteq S$.

Разобьем S' на маленькие симплексы. Если v — вершина одного из них, то выберем точку $v' \in \Phi(v)$ и положим $\varphi_1(v) = v'$. Сделаем так для всех вершин разбиения и продолжим отображение φ_1 на остальные точки каждого маленького симплекса по линейности. Мы получим непрерывное отображение симплекса S' в себя. Согласно теореме Брауэра (см., например, [2, с. 502–507]) оно имеет неподвижную точку $x_1 = \lambda_{1,0}x_{1,0} + \dots + \lambda_{1,r}x_{1,r}$, где $x_{1,0}, \dots, x_{1,r}$ — вершины одного из симплексов разбиения, $\lambda_{1,0} + \dots + \lambda_{1,r} = 1,\ \lambda_{1,0} \geqslant 0, \dots, \lambda_{1,r} \geqslant 0$. При этом $x_1 = \varphi_1(x_1) = \lambda_{1,0}\varphi_1(x_{1,0}) + \dots + \lambda_{1,r}\varphi_1(x_{1,r})$.

Взяв более мелкое разбиение симплекса, построим аналогичное отображение φ_2 с неподвижной точкой $x_2 = \lambda_{2,0}x_{2,0} + \dots + \lambda_{2,r}x_{2,r}$. Продолжим процесс, устремив диаметр разбиения к нулю. Можно выбрать такую подпоследовательность номеров i, для которой: x_i сходятся к некоторой точке x (как следствие, $x_{i,0}, \dots, x_{i,r}$ сходятся к той же точке); $\lambda_{i,0}, \dots, \lambda_{i,r}$ сходятся соответственно к некоторым $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, где $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 1,\ \lambda_0 \geqslant 0, \dots, \lambda_r \geqslant 0$; $\varphi_i(x_{i,0}), \dots, \varphi_i(x_{i,r})$ сходятся к некоторым $y_0, \dots, y_r$. Тогда $x = \lambda_0 y_0 + \dots + \lambda_r y_r$. Из замкнутости отображения Φ следует, что $y_0, \dots, y_r$ принадлежат $\Phi(x)$. Так как это множество выпукло, то x также ему принадлежит, т.е. является неподвижной точкой отображения Φ. □

Вывод теоремы Неймана из теоремы Какутани. Пусть на прямом произведении выпуклых компактов K и L в конечномерном вещественном пространстве задана непрерывная функция $f(x, y)$, квазивогнутая на K при каждом y и квазивыпуклая на L при каждом x. Для всех $x \in K$ положим

$$L_x = \{y' \in L \mid f(x, y') = \min_{y'' \in L} f(x, y'')\};$$

$$K_y = \{x' \in K \mid f(x', y) = \max_{x'' \in K} f(x'', y)\};$$

$$\Phi(x, y) = K_y \times L_x.$$

Легко проверить, что точечно-множественное отображение Φ удовлетворяет условиям теоремы Какутани и, значит, имеет неподвижную точку. Она является седловой точкой функции $f(x, y)$, откуда (см. п. 2) вытекает равенство минимакса и максмина. □

Автор благодарен В. М. Тихомирову за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] Воробьёв Н. Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* М.: Наука, 1984.

[2] Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа*. М.: Наука, 1965.

[3] Нейман Дж. фон. *К теории стратегических игр* // Матричные игры. М.: Физматлит, 1961. С. 173–204.

[4] Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука, 1970.

[5] Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. М.: Мир, 1972.

[6] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.

[7] Пуанкаре А. *О науке*. М.: Наука, 1990.

[8] Френкин Б. Р. *Некоторые топологические теоремы о минимаксе* // Матем. заметки, 2000. Т. 67, №1. С. 141–149.

[9] Kakutani S. *A generalization of Brouwer's fixed point theorem* // Duke Math. Journ., 1941. Vol. 8, no 3. P. 457–459.

[10] Neumann J. von. *A Model of General Economic Equilibrium* // The Review of Economic Studies, 1946. Vol. 13(1), No 33. P. 1–9.

Б. Р. Френкин, ЦЭМИ РАН
e-mail: `frenkin@mccme.ru`