О матрицах Грама

В. А. Юдин

Рассмотрим несколько известных задач из дискретной геометрии. Решения практически всех сегодня неизвестны.

Через $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ обозначим скалярные произведения векторов x и y из n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Для произвольного набора $W = \{e_1, \ldots, e_q\}$ различных единичных векторов выпишем их матрицу Грама

$$G(W) = \begin{bmatrix} 1 & e_1e_2 & \ldots & e_1e_q \\ e_2e_1 & 1 & \ldots & e_2e_q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_qe_1 & e_qe_2 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(в дальнейшем будем отождествлять единичные векторы с точками единичной сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ xx = 1\}$).

1. Восстанавливаемые конфигурации

Все различные скалярные произведения, встречающиеся в (1), запишем в строчку

$$S(W) = \{1, t_1, \ldots, t_s\}, \quad 1 > t_1 > \ldots > t_s. \tag{2}$$

Например, если W состоит из $(n+1)$-й вершины правильного симплекса, вписанного в S^{n-1}, то $S(W)$ состоит всего из двух чисел $\{1, -1/n\}$. Если W — совокупность вершин правильного $2q$-угольника, то

$$S(W) = \{1, \cos\frac{\pi}{q}, \cos\frac{2\pi}{q}, \ldots, -1\}.$$

Пусть мы знаем всю строчку (2) для некоторой сферической конфигурации W. Можем ли мы единственным образом восстановить W?

Вначале определимся с единственностью. Две конфигурации W_1, W_2 считаем одинаковыми, если существует вращение ρ такое, что $W_1 = \rho W_2$. Под вращением ρ понимаем линейное преобразование $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, осуществляемое посредством ортогональной матрицы T, $TT' = T'T = E$ с $\det T = \pm 1$. Изменение ориентации допускается. Ортогональная матрица «сохраняет» скалярные произведения

$$TxTy = xT'Ty = xEy = xy,$$

следовательно, для «поворота» ρ строчки $S(W)$ и $S(\rho W)$ одинаковы.

В общей ситуации ответ на вопрос, конечно, отрицательный. Однако некоторым загадочным образом сферические конфигурации делятся на два класса: восстанавливаемые по $S(W)$ и невосстанавливаемые.

Утверждение 1. Любая сферическая конфигурация $W = \{e_1, e_2, e_3\}$ из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ по $S(W)$ восстанавливается единственным образом.

Утверждение 2. Пусть сферическая конфигурация $W = \{e_1, \ldots, e_8\}$ из $\mathbb{R}^3$ такова, что

$$S(W) = \{1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\}.$$

Тогда W — восемь вершин куба.

Утверждение 3. (Hantjes, 1948) Пусть сферическая конфигурация $W = \{e_1, \ldots, e_{12}\}$ из $\mathbb{R}^3$ такова, что

$$S(W) = \{1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -1\}.$$

Тогда W — двенадцать вершин икосаэдра. Скалярные произведения его полностью характеризуют.

Доказательства первых двух утверждений несложны, относительного третьего см. [1], где также обсуждается ряд близких вопросов. Наша цель — показать, что при $n \geqslant 3$ невосстанавливаемая конфигурация существует уже при $q = 4$. Достаточно в $\mathbb{R}^3$ привести две разные конфигурации W_1, W_2 с одинаковыми строчками (2). Пусть W_1 состоит из векторов $e_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\}$, $e_2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\}$, $e_3 = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $e_4 = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, а W_2 — из векторов $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 0, 1\}$, $e_3 = \{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\}$, $e_4 = \{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\}$. Вычислим их матрицы Грама

$$G(W_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G(W_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

и увидим, что $S(W_1) = S(W_2) = \{1, 0, -1/2\}$. Однако W_1 и W_2 — разные конфигурации, поскольку нулей в $G(W_1)$ четыре, а в $G(W_2)$ — шесть.

Усложним теперь вопрос. Поставим набору W в соответствие таблицу

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & t_1 & t_2 & \ldots & t_s \\ \hline q & N_1 & N_2 & \ldots & N_s \end{array}, \tag{3}$$

где верхняя строка есть $S(W)$, а нижняя определяется кратностями

$$N_i = \sum_{x,y \in W,\ xy = t_i} 1; \qquad N_1 + \ldots + N_s = q^2 - q.$$

Для какого наименьшего q можно построить два разных набора W_1, W_2, имеющих одну и ту же таблицу (3).

2. Количество различных элементов матрицы Грама

Сколько различных элементов содержится в матрице (1)? Если не учитывать главную диагональ, то верхняя граница $(q^2 - q)/2$ очевидна, и она достигается. При $q \to \infty$ относительно нижней границы при $n \geqslant 3$ неизвестен даже ее порядок роста. Случай $n = 2$ прост.

Утверждение 4. Пусть на единичной окружности расположено q различных точек. Тогда количество s различных расстояний между ними удовлетворяет неравенству

$$s \geqslant \begin{cases} \dfrac{q-1}{2}, & q \text{ — нечетно,} \\ \dfrac{q}{2}, & q \text{ — четно.} \end{cases} \tag{4}$$

Действительно, возьмем произвольную точку x нашей конфигурации W и проведем через нее диаметр. Он разобьет окружность на две дуги. Нужно рассмотреть два случая: точка $-x \in W$ и $-x \notin W$. Если $-x \in W$, то на одной из дуг будет располагаться не менее чем $(q-2)/2$ точек W, если q — четно, и не менее $(q-1)/2$ точек W, если q — нечетно. Поскольку все расстояния от x до этих точек разные, то получается оценка

$$s \geqslant \begin{cases} \dfrac{q+1}{2}, & q \text{ — нечетно,} \\ \dfrac{q}{2}, & q \text{ — четно.} \end{cases}$$

Аналогично рассматривается и второй случай. Нижняя оценка (4) точна, она достигается для q вершин правильного q-угольника.

Воспользуемся одним соображением П. Эрдёша [2] и для размерности $n = 3$ дадим «слабую» оценку снизу длины строчки (2).

Утверждение 5. Пусть $W = \{e_1, \dots, e_q\} \subset S^2$. Тогда

$$s = s(q) \gg q^{1/2}.$$

Все оценки будем проводить, учитывая лишь порядок. Возьмем произвольную точку $x \in W$ и соединим ее со всеми остальными. Пусть оказалось m различных расстояний, значит имеем оценку

$$s \gg m, \tag{5}$$

но она плоха, если m «мало». В этой ситуации продолжим рассуждения. Всего в W имеется q точек, $q-1$ из них располагаются на m окружностях. Значит, на одной из них расположено не менее чем $[\frac{q-1}{m}]$ точек. Из предыдущего утверждения находим

$$s \gg q/m. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получим

$$s \gg \max\{m, q/m\} \gg q^{1/2}.$$

Поднимаясь по размерности, повторяем рассуждения и находим, что при $n = 4$ $s \gg q^{1/4}$ и т. д.

В евклидовых пространствах на рассматриваемый выше вопрос смотрят и с другой стороны. Множество W из $\mathbb{R}^n$ называется множеством с двумя расстояниями, если всевозможные расстояния между точками W равны только d_1 и d_2, $0 < d_1 < d_2$. Каково наибольшее количество точек $N = N(n)$ содержится в таких множествах? Точные значения известны [3, 4] лишь для малых размерностей. Порядок роста $N(n)$ при $n \to \infty$ известен, это n^2. Нижняя оценка делается так: в $\mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим совокупность $n(n+1)/2$ точек $W = \{1^2, 0^{n-1}\}$ — две произвольные координаты равны 1, а остальные $n-1$ координаты равны 0. Можно считать, что $W \subset \mathbb{R}^n$, так как каждая точка x из W лежит на гиперплоскости $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 2$. W есть множество с двумя расстояниями $d_1 = \sqrt{2}$ и $d_2 = 2$. Верхняя оценка $N(n) \leqslant (n+1)(n+2)/2$ (A. Blokhuis) выводится труднее (подробности в [4]).

3. Множества с одним расстоянием

В этом разделе мы остаемся в конечномерном банаховом пространстве, но уже не обязательно евклидовом. Будем оценивать мощность множества, у которого все взаимные расстояния равны одному и тому же числу. Использовать терминологию функционального анализа не хочется. Обсуждение будем вести в терминах разностных множеств. Множество

$$M^* = \{z = x - y \ : \ x \in M, \ y \in M, \ x \neq y\}, \quad M \subset \mathbb{R}^n,$$

называется разностным. В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим выпуклую, центрально-симметричную относительно нуля область D с границей Γ.

Задача. Для заданной Γ найти в $\mathbb{R}^n$ множество M наибольшей мощности $N = N(n)$, удовлетворяющее условию $M^* \subset \Gamma$.

Если $\Gamma = S^{n-1}$ — сфера, то очевидно, что $N(n) \leqslant n+1$, и оценка достигается на вершинах правильного симплекса. Если Γ — граница куба, то $N(n) \leqslant 2^n$. Оценка точная, в качестве M следует взять 2^n вершин куба. Если

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x_1| + \ldots + |x_n| = 1\}, \tag{7}$$

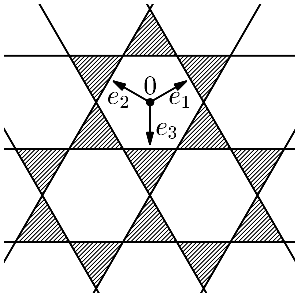
то задача решена лишь при размерностях $n = 1, 2, 3, 4$, причем последний случай разобран совсем недавно [5]. Рассматривая в качестве M $2n$ точек с координатами $\{\pm\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, \ldots, 0, \pm\frac{1}{2}\}$ получаем оценку снизу $N(n) \geqslant 2n$. Она служит основанием для гипотезы $N(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Постановка задачи довольно близка к аналогичным из теории кодирования. Попробуем использовать известные методы гармонического анализа, связанные с положительной определенностью.

Утверждение 6. Пусть тригонометрическая сумма

$$f(x) = \sum_s \lambda_s e^{2\pi i s x}, \quad sx = s_1 x_1 + \ldots + s_n x_n$$

удовлетворяет условиям 1) $\lambda_s \geqslant 0$, $\lambda_0 > 0$; 2) $f(x) \leqslant 0$, $x \in \Gamma$.



Тогда

$$N(n) \leqslant \frac{f(0)}{\lambda_0}. \tag{8}$$

Действительно, пусть $M = \{x^{(k)}\}_1^N$ и $M^* \subset \Gamma$, тогда по условию 2

$$I = \sum_{k,l=1}^{N} f(x^{(k)} - x^{(l)}) = Nf(0) + \sum_{k \neq l} f(x^{(k)} - x^{(l)}) \leqslant Nf(0).$$

С другой стороны, по условию 1

$$I = \sum_s \lambda_s \sum_{k,l=1}^{N} e^{2\pi i s(x^{(k)} - x^{(l)})} = \sum_s \lambda_s \Big| \sum_{x \in M} e^{2\pi i s x} \Big|^2 \geqslant \lambda_0 N^2,$$

откуда вытекает (8).

Для $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = 1\}$ нужная тригонометрическая сумма строится мгновенно

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} \cos^2 \frac{\pi x_i}{2} = 2^{-n} \prod_{j=1}^{n} (1 + \cos \pi x_j).$$

Имеем $f(x) = 0$, $x \in \Gamma$; в силу формул тригонометрии все коэффициенты λ_s неотрицательны, $\lambda_0 = 2^{-n}$. Значит, из (8) находим требуемую оценку $N(n) \leqslant 2^n$.

Для различных Γ можно построить соответствующие тригонометрические суммы, которые приводят к хорошим оценкам $N(n)$, но для Γ, определенной (7), нужная тригонометрическая сумма строиться почему-то не хочет.

Рассмотрим еще один пример. Пусть e_1, e_2, e_3 — нормали к различным сторонам правильного шестиугольника (см. рис.) Положим

$$f(x) = \cos e_1 x \, \cos e_2 x \, \cos e_3 x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2e_1 x + \cos 2e_2 x + \cos e_3 x).$$

На рисунке заштриховано множество

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leqslant 0\}.$$

Выбрав в качестве Γ произвольное подмножество из F, из неравенства (8) получаем, что мощность любого множества M такого, что $M^* \subset \Gamma$, не превосходит четырех. Из этого примера видно, что «гладкость» Γ и выпуклость D особенно и «не при чём».

Список литературы

[1] Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. of the Amer. Math. Soc., 1992. V. 96, N. 3.

[2] Erdös P. *On sets of distances of n points* // Amer. Math. Monthly, 1946. V. 53. P. 248–250.

[3] Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K. *Unsolved problems in Geometry.* New York: Springer, 1991.

[4] Koolen J., Laurent M., Schrijver A. *Equilateral dimension of the rectilinear space* // Designs, Codes and Crypt., 2000. V. 21. P. 149–164.

[5] Lisoněk P. *New maximal Two-Distance Sets* // J. Combin. Theory. Ser. A, 1997. V. 77. P. 318–338.

В. А. Юдин, Московский Энергетический институт