ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Я испытывал двойственные чувства, готовя книгу ко второму изданию. Мне было ясно, что надо исправить все ошибки и опечатки, найденные со времени первого издания. Это было легко, потому что ошибки были незначительны, а опечатки немногочисленны.

Труднее было решить, надо ли дополнить текст или хотя бы список литературы. В конце концов я решил, что книга в этом не нуждается. Главная ценность математической книги состоит в том, что она учит читателя элементам математического языка и некоторым навыкам. Ни одна книга не может полностью исчерпать сколько-нибудь серьезную область математики, как бы ни старался автор.

Псевдодифференциальные операторы давным давно стали языком и полезным орудием в уравнениях с частными производными. Поэтому бессмысленно пытаться исчерпать эту область. Вот простое доказательства этого факта. В июле 2000 года в MathSciNet, базе данных Американского математического ощества, построенной на основе реферативного журнала Mathematical Reviews, за несколько секунд компьютерного поиска слов «pseudodifferential operator» (псевдодифференциальный оператор) я нашел 3695 источников (в том числе 363 книги), в которых такая комбинация слов встречается в названии или реферате. (Там же нашлось 963 источника со словами «pseudo-differential operator», но я не смог выяснить, каково пересечение соответствующих списков.)

Вот результаты поиска по другим важнейшим темам этой книги:

Fourier Integral operator: 1022 источника (в том числе 105 книг),
Microlocal analysis: 500 источников (82 книги),
Spectral asymptotic: 367 источников (56 книг),
Eigenvalue asymptotic: 127 источников (21 книга),
Pseudodifferential operator AND spectral theory: 142 источника (36 книг).

Аналогичные результаты получились у меня при поиске в базе данных издающегося в Германии реферативного журнала Zentralblatt. И всего лишь 132 источника содержала библиография первого издания, которую я считал более или менее исчерпывающей. Несмотря на это, я не могу удержаться от того, чтобы упомянуть следующие три книги (в хронологическом порядке):

Brüning J., Guillemin V. (eds.) Mathematics Past and Present. Fourier Integral Operators. Selected Classical Articles by J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin and L. Hörmander, Springer-Verlag, 1994.

Safarov Yu., Vassiliev D. The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators, Amer. Math. Soc., 1997.

Ivrii V. Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics. Springer-Verlag, 1998.

Эти книги содержат материал, которого, по-моему, недоставало уже в первом издании: получение уточненных спектральных асимптотик методами более продвинутого микролокального анализа (в частности, в помощью глобальных интегральных операторов Фурье).

По вышеуказанным причинам я решил не дополнять библиографию, приведенную в конце книги, а лишь уточнил ее (в частности, добавил ссылки на новые издания старых книг в тех случаях, когда мне было известно о существовании новых изданий).

Я добавил некоторые объяснения в тех местах, где это казалось необходимым. Я очень благодарен читателям русского и английского изданий, указавшим мне неясные места в первом издании. К сожалению, у меня не сохранились имена всех читателей, которые помогли мне выявить все неясные места. Все же я хочу упомянуть Пабло Рамахера (Pablo Ramacher, Humboldt University, Berlin) как недавнего и весьма добросовестного читателя, замечания которого было мне весьма полезны.

Я надеюсь, что эта книга и сейчас может выполнять свою главную роль: учить читателей красивой и интересной математике.

М. А. Шубин
9 апреля 2001 года

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ (1987)

К настоящему моменту вышло уже много книг по псевдодифференциальным операторам (в то время как их почти не существовало в момент появления русского издания). Поэтому естественным образом возникает сомнение в том, что нужна еще одна такая книга. Тем не менее, я думаю, что эта книга может быть полезна ввиду ее замкнутости и подхода, нацеленного на приложения к спектральной теории. Кроме того, она содержит некоторые идеи, не описанные ни в какой другой книге на английском языке. Это относится, например, к методу приближенного спектрального проектора, который является универсальным методом исследования спектральных асимптотик — см. главу IV, а также обзор С. Левендорского в Acta Applicandae Mathematicae *).

Разумеется, много нового появилось в теории с момента выхода русского издания. Самые важные новые моменты отражены в перечисленных ниже монографиях.

М. А. Шубин
3 сентября 1985 года

Литература

Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные управления в частных производных главного типа. М., Мир, 1984.

Хёрмандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 1—4. М., Мир, 1986—1988.

Helffer, B. Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques. Astérisque, 112. Société Mathématique de France, Paris, 1984.

Ivrii, V. Precise spectral asymptotics for elliptic operators. Lecture Notes in Mathematics, 1100. Springer — Verlag, Berlin, 1984.

Kumano-go, H. Pseudodifferential operators. MIT Press, Cambridge, Mass. London, 1981.

Рид, М., Саймон, Б.. Методы современной математической физики, т. 1—4, М., Мир, 1977—1982.

Ремпель Ш., Шульце, Б. В. Теория индекса эллиптических краевых задач. М., Мир, 1986.

Тейлор, М. Псевдодифференциальные операторы. М., Мир, 1985.

Трев, Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, 2. М., Мир, 1984.

*) Теперь вышла и монография: Levendorskii S. Asymptotic distribution of eigenvalues of differential operators. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Теория псевдодифференциальных операторов (сокращенно ПДО) сравнительно молода: в своей современной форме она была создана в середине шестидесятых годов. Однако полученные с ее помощью продвижения столь существенны, что без ПДО уже трудно себе представить современный анализ и математическую физику. Особенно важны ПДО для изучения эллиптических уравнений. Уже простейшие преобразования эллиптических операторов (например, взятие обратного оператора или извлечение корня) выводят за класс дифференциальных операторов, однако при разумных условиях сохраняют класс ПДО. Важна роль ПДО в теории индекса эллиптических операторов, где они нужны для расширения класса возможных деформаций оператора. ПДО появляются при сведении на границу какой-либо граничной задачи для эллиптического уравнения. Таким образом, ПДО возникают не как самоцель, а как мощное и естественное средство изучения дифференциальных операторов с частными производными (прежде всего эллиптических и гипоэллиптических). В очень многих случаях ПДО позволяют не только сформулировать новые теоремы, но и иначе взглянуть на старые, получить более простое и прозрачное изложение уже известных фактов. Так обстоит дело, например, в теории пространств Соболева.

Естественным обобщением ПДО являются интегральные операторы Фурье (сокращенно ИОФ), первоначальным вариантом которых был канонический оператор В. П. Маслова. Примером ИОФ является разрешающий оператор задачи Коши для гиперболического уравнения. Таким образом, ИОФ играют ту же роль в теории гиперболических уравнений, что ПДО в теории эллиптических уравнений.

Одной из наиболее существенных областей приложения ПДО и ИОФ является спектральная теория эллиптических операторов. Здесь важна возможность описания структуры различных нетривиальных функций от оператора (резольвенты, комплексных степеней, экспоненты, спектрального почти-проектора). С помощью ПДО н ИОФ получается теорема об аналитическом продолжении ζ-функции оператора, ряд существенных теорем об асимптотике собственных значений.

В этой книге представлено в несколько переработанном и расширенном виде содержание курса лекций по ПДО и спектральной теории, прочитанных автором на механико-математическом факультете МГУ. Цель этого курса состояла в замкнутом и систематическом изложении теории ПДО и ИОФ в связи со спектральной теорией эллиптических и гипоэллиптических операторов. При этом автор старался, с одной стороны, сделать изложение доступным для студентов, знакомых с обязательным курсом анализа-III (включая элементарную теорию обобщенных функций), и, с другой стороны, довести изложение до уровня современных журнальных статей. Все это потребовало достаточно жесткого отбора материала, на который, естественно, повлияли и личные интересы автора.

Наиболее существенный материал учебного характера расположен в главе I и в добавлении 1, использующем также теоремы из § 17 и § 18 главы III (отметим, что § 17 вообще не опирается ни на какой предшествующий материал, а § 18 опирается лишь на главу I). Все это мы условно объединим в первый концентр, который составляет некоторое замкнутое введение в теорию ПДО и волновых фронтов обобщенных функций. По мнению автора, этот концентр полезен всем математикам, специализирующимся по функциональному анализу и уравнениям с частными производными. Подчеркнем еще раз, что первый концентр может изучаться независимо от всего остального.

Главы II и III составляют, соответственно, второй и третий концентры. Из главы II читатель узнает теорию комплексных степеней и ζ-функции эллиптического оператора. Теорема о полюсах ζ-функции является, по-видимому, одним из самых замечательных применений псевдодифференциальных операторов. В этой же главе показано, как из этой теоремы можно вывести грубую асимптотику собственных значений. В главе III можно найти более точную теорему об асимптотике собственных значений. Эта теорема использует ряд изложенных здесь же существенных фактов теории ИОФ. Отметим, что именно на этом пути, хотя и с использованием более полной теории ИОФ, выходящей за рамки этой книги, были получены дальнейшие существенные продвижения в спектральной теории (см. раздел «Краткие литературные указания»).

Наконец, глава IV и добавления 2 и 3 *) составляют последний (четвертый) концентр. Здесь изложена теория ПДО в $\mathbb{R}^n$, возникшая в связи с некоторыми математическими вопросами квантовой механики.

---

*) Добавление 3 содержит вспомогательный материал из функционального анализа, используемый в главе IV и выделенный в добавление лишь для удобства. Продвинутый читатель, знакомый с этим материалом, может не заглядывать в добавление 3 или использовать его для справок, а начинающему будет полезно прочесть добавление 3 целиком.

Необходимо сказать о месте в этой книге упражнений и задач. Вкрапленные в текст упражнения являются его неотъемлемой частью, и, как правило, сформулированные в них утверждения используются в дальнейшем. Все эти утвержения проверяются непосредственно и не доказаны в тексте лишь потому, что их проще понять самостоятельно, чем прочесть. Содержание же задач, обычно более трудных, чем упражнения, в тексте не используется, хотя и развивает основной материал в полезных напрвлениях. Задачи можно использовать для контроля понимания прочитанного, их решение полезно для лучшего усвоения понятий и методов. Однако вряд ли стоит решать все задачи подряд, так как это может сильно затормозить продвижение вперед. Вероятно, при первом чтении следует решать те задачи, содержание которых кажется читателю наиболее интересным. В задачах, как и в основном тексте, помимо уже изложенного материала, не используются никакие сведения, выходящие за рамки обычного университетского курса.

Автор надеется, что предлагаемая книга будет полезна как начинающим, так и более опытным математикам, желающим быстро ознакомиться с ПДО и их наиболее важными приложениями, а также всем, кто интересуется спектральной теорией или применяет ее.

В заключение я хочу поблагодарить В. И. Безяева, Т. Е. Богородскую, Т. В. Гирю, А. И. Гусева, В. Ю. Киселева, С. М. Козлова, М. Д. Миссарова и А. Г. Сергеева, которые помогли записать и обработать предлагаемые лекции; В. Н. Туловского, рассказавшего мне свое доказательство теоремы о распространении особенностей и разрешившего привести его в этой книге; В. Л. Ройтбурда, написавшего по моей просьбе добавление 2; В. Я. Иврия и В. П. Паламодова, прочитавших рукопись и сделавших ряд полезных замечаний, а также всех, кто тем или иным способом помогал мне в работе.

М. А. Шубин

Схема зависимости