ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Осциллирующие интегралы

1.1. Преобразование Фурье. Простейшим примером осциллирующего интеграла является преобразование Фурье функции (или обобщенной функции) умеренного роста.

Пусть $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца функций $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, у которых каждая производная убывает при $|x| \to +\infty$ быстрее любой степени $|x|$, т. е. для любых α, β

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta u)(x)| < +\infty. \tag{1.1}$$

Здесь, как обычно, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; α, β — мультииндексы, т. е., например, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \geqslant 0$ и α_j — целое; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$; $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, где $\partial_j = \partial / \partial x_j$; $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n} = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$, где $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Левые части (1.1) определяют в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$ набор полунорм, превращающих его в пространство Фреше.

Преобразование Фурье функции $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ дается формулой

$$(Fu)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x)\, dx, \tag{1.2}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \ldots + x_n \xi_n$, $i = \sqrt{-1}$ и $dx = dx_1 \ldots dx_n$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Интеграл в (1.2) берется по всему пространству $\mathbb{R}^n$, что всегда будет подразумеваться, если явно не указана область интегрирования.

Известно, что оператор F определяет линейный топологический изоморфизм $F\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, причем обратный оператор (обратное преобразование Фурье) дается формулой обращения

$$(F^{-1} \hat{u})(x) = u(x) = \int e^{ix \cdot \xi}\, \hat{u}(\xi)\, d\!\!{}^-\xi, \tag{1.3}$$

где $d\!\!{}^-\xi = (2\pi)^{-n} d\xi_1 \ldots d\xi_n$.

Мы покажем сейчас, как распространить преобразование Фурье (1.2) на непрерывные функции $u(x)$, удовлетворяющие условию: существуют такие $C > 0$ и $N > 0$, что

$$|u(x)| \leqslant C \langle x \rangle^N, \tag{1.4}$$

где $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$, $|x|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. При этом мы получим $\hat{u}(\xi)\in S'(\mathbb{R}^n)$, где $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство, двойственное к $S(\mathbb{R}^n)$, т. е. состоящее из линейных непрерывных функционалов на $S(\mathbb{R}^n)$. Мы хотим, таким образом, регуляризовать интеграл

$$\langle\hat{u},\,\psi\rangle=\iint e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi, \tag{1.5}$$

где $\psi(\xi)\in S(\mathbb{R}^n)$, который и будем считать значением функционала $\hat{u}$ на элементе $\psi(\xi)$. Если $u(x)\in S(\mathbb{R}^n)$, то ясно, что

$$\langle\hat{u},\,\psi\rangle=\int\hat{u}(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

ибо интеграл (1.5) в этом случае абсолютно сходится.

Мы укажем два равносильных способа регуляризации интеграла (1.5), отличных от известного способа, основанного на равенстве Парсеваля, и обобщающихся на значительно более общую ситуацию.

1-й способ. Положим $D_j=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $D=(D_1,\,\ldots,\,D_n)$, $\langle D\rangle=(1+D_1^2+\ldots+D_n^2)^{1/2}$ (обычно мы будем употреблять $\langle D\rangle^k$, где k — четное неотрицательное число, так что $\langle D\rangle^k$ будет дифференциальным оператором). Вектор D будет употребляться и для дифференцирования по ξ. Во избежание путаницы мы будем тогда обозначать через D_x только что написанный вектор D, а через D_ξ — такой же вектор, в котором производные берутся по ξ. Имеем

$$e^{-ix\cdot\xi}=\langle x\rangle^{-k}\langle D_\xi\rangle^k e^{-ix\cdot\xi}. \tag{1.6}$$

Пусть сначала $u(x)\in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда, подставляя это выражение для $e^{-ix\cdot\xi}$ в интеграл (1.5), получим, интегрируя по частям,

$$\langle\hat{u},\,\psi\rangle=\iint e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,\langle x\rangle^{-k}\langle D_\xi\rangle^k\psi(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{1.7}$$

Этот интеграл определен уже не только при $u(x)\in S(\mathbb{R}^n)$ и даже не только для абсолютно интегрируемых $u(x)$. Именно, если $u(x)$ удовлетворяет оценке (1.4) и $k>N+n$, то интеграл (1.7) абсолютно сходится и мы можем считать его требуемой регуляризацией (1.5).

Упражнение 1.1. Проверить, что формула (1.7) при $k>N+n$ определяет непрерывный линейный функционал $\hat{u}\in S'(\mathbb{R}^n)$.

2-й способ. Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$) и $\varphi(0)=1$. Положим

$$I_\varepsilon=\iint e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\varepsilon x)\,u(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi,\quad \varepsilon>0. \tag{1.8}$$

Этот интеграл абсолютно сходится. Оказывается, что существует предел $I = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$, не зависящий от выбора $\varphi(x)$. В самом деле, выполняя в (1.8) то же интегрирование по частям, что и раньше, мы получаем

$$I_\varepsilon = \iint e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\varepsilon x)\,u(x)\,\langle x\rangle^{-k}\langle D_\xi\rangle^k\psi(\xi)\,dx\,d\xi,$$

и если $k > N+n$, то предел при $\varepsilon\to 0$ существует по теореме Лебега и равен выражению $\langle\hat u,\,\psi\rangle$, определенному формулой (1.7).

Упражнение 1.2. Проверить, что формула (1.7), написанная при разных k, приводит к одному и тому же функционалу $\hat u$.

1.2. Определение осциллирующего интеграла и его регуляризация. Рассмотрим теперь более общий, чем (1.5), интеграл вида

$$I_\Phi(au) = \iint e^{i\Phi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,u(x)\,dx\,d\theta. \tag{1.9}$$

Здесь $\theta\in\mathbb{R}^N$ и $x\in X$, где X — область в $\mathbb{R}^n$; $u(x)\in C_0^\infty(X)$, т. е. $u(x)\in C^\infty(X)$ и существует такой компакт $K\subset X$, что $u|_{X\setminus K}=0$. Для описания $a(x,\,\theta)$ и $\Phi(x,\,\theta)$ введем ряд определений.

Определение 1.1. Пусть m, ρ и δ — вещественные числа, $0\leqslant\delta\leqslant 1$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Класс $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ состоит из таких функций $a(x,\,\theta)\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$, что для любых мультииндексов α, β и для любого компакта $K\subset X$ существует такая постоянная $C_{\alpha,\,\beta,\,K}$, что при $x\in K$, $\theta\in\mathbb{R}^N$ справедлива оценка

$$|\,\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\,a(x,\,\theta)\,| \leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,K}\langle\theta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{1.10}$$

Вместо $S^m_{1,\,0}(X\times\mathbb{R}^N)$ мы будем писать просто $S^m(X\times\mathbb{R}^N)$. Далее, вместо $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ мы будем писать иногда просто $S^m_{\rho,\,\delta}$. Положим также $S^{-\infty} = \bigcap\limits_m S^m$.

Определение 1.2. Функция $\Phi(x,\,\theta)$ называется *фазовой функцией*, если $\Phi(x,\,\theta)\in C^\infty(X\times(\mathbb{R}^N\setminus 0))$ вещественнозначна и положительно однородна 1-го порядка по θ (т. е. $\Phi(x,\,t\theta)=t\Phi(x,\,\theta)$ для любых $x\in X$, $\theta\in\mathbb{R}^N$ и $t>0$) и $\Phi(x,\,\theta)$ не имеет критических точек при $\theta\neq 0$, т. е. $\Phi'_{x,\,\theta}(x,\,\theta)\neq 0$ при $x\in X$, $\theta\in\mathbb{R}^N\setminus 0$ (здесь $\Phi'_{x,\,\theta}$ означает градиент функции $\Phi(x,\,\theta)$ по переменным x, θ).

Определение 1.3. Интеграл (1.9), в котором $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, а $\Phi(x,\,\theta)$ — фазовая функция, называется *осциллирующим интегралом.*

Упражнение 1.3. Проверить, что если $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, то $\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\,a(x,\,\theta)\in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$. Если еще $b(x,\,\theta)\in S^{m'}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, то $a(x,\,\theta)\cdot b(x,\,\theta)\in S^{m+m'}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$.

Наша ближайшая цель — регуляризация осциллирующего интеграла (1.9), не являющегося, вообще говоря, абсолютно сходящимся. Следующая лемма позволяет написать в общем случае равенство типа (1.6).

Лемма 1.1. *На $X\times\mathbb{R}^N$ существует такой оператор*

$$L=\sum_{j=1}^{N} a_j(x,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n} b_k(x,\theta)\,\frac{\partial}{\partial x_k}+c(x,\theta), \tag{1.11}$$

что $a_j(x,\theta)\in S^0(X\times\mathbb{R}^N)$, $b_k(x,\theta)\in S^{-1}(X\times\mathbb{R}^N)$, $c(x,\theta)\in S^{-1}(X\times\mathbb{R}^N)$, и если определить формально сопряженный оператор ${}^tL$ формулой

$${}^tLu(x,\theta)=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(a_ju)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(b_ku)+cu, \tag{1.12}$$

то имеет место тождество

$${}^tLe^{i\Phi}=e^{i\Phi}. \tag{1.13}$$

Упражнение 1.4. Оператор ${}^tL$ также можно записать в виде (1.11) с другими a_j, b_k, c, принадлежащими, однако, тем же классам, которые были указаны в формулировке для L.

Упражнение 1.5. Доказать, что если $M={}^tL$, то $L={}^tM$.

Доказательство леммы 1.1. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\,e^{i\Phi}=i\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\,e^{i\Phi},\qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\,e^{i\Phi}=i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\,e^{i\Phi}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{j=1}^{N}-i\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}|\theta|^2\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n}-i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)e^{i\Phi}=$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{N}|\theta|^2\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right|^2\right)e^{i\Phi}=\frac{1}{\psi}\,e^{i\Phi},$$

где $\psi(x,\theta)\in C^\infty(X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0))$ и $\psi(x,\theta)$ положительно однородна по θ порядка -2. Поэтому

$$-i\psi\left\{\sum_{j=1}^{N}|\theta|^2\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right\}e^{i\Phi}=e^{i\Phi}$$

и остается только ликвидировать особенность при $\theta=0$. Пусть $\chi(\theta)\in\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi(\theta)=1$ при $|\theta|<1/4$ и $\chi(\theta)=0$ при $|\theta|>1/2$. Положим

$$M=-\sum_{j=1}^{N}i(1-\chi)\,\psi|\theta|^2\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}-\sum_{k=1}^{n}i(1-\chi)\,\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}+\chi.$$

Ясно, что $Me^{i\Phi}=e^{i\Phi}$, и легко проверить, что все коэффициенты оператора M обладают требуемыми свойствами. То же самое верно и для $L={}^tM$ (см. упражнение 1.4). Остается заметить, что ${}^tL=M$ в силу упражнения 1.5. ■

Регуляризация интеграла (1.9) будет проведена двумя способами.

1-й способ. Пусть вначале $m<-N$, так что интеграл (1.9) абсолютно сходится. Используя тождество (1.13), напишем в этом интеграле $({}^tL)^k e^{i\Phi}$ вместо $e^{i\Phi}$ и проинтегрируем по частям k раз. Получим

$$I_\Phi(au)=\iint e^{i\Phi(x,\,\theta)}L^k(a(x,\,\theta)\,u(x))\,dx\,d\theta. \tag{1.14}$$

Упражнение 1.6. Проверьте законность этой операции.

Полагая теперь $s=\min(\rho,\,1-\delta)$, мы получим из упражнения 1.3, что $L^k(au)\in S^{m-ks}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$. Если $\rho>0$ и $\delta<1$ (так что $s>0$), что будет предполагаться всюду в дальнейшем, то формула (1.14) позволяет определить интеграл $I_\Phi(au)$ уже при любом m, выбирая k так, что $m-ks<-N$. При этом интеграл (1.14) уже абсолютно сходится.

Упражнение 1.7. Показать, что при фиксированных a и Φ интеграл $I_\Phi(au)$, рассматриваемый как функционал от элемента $u\in C_0^\infty(X)$, определяет обобщенную функцию на X — элемент $\mathscr{D}'(X)$ (пространства, сопряженного к $C_0^\infty(X)$).

2-й способ. Выбирая $\chi(\theta)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi(\theta)=1$ в окрестности точки $0\in\mathbb{R}^N$, положим

$$I_{\Phi,\,\varepsilon}(au)=\iint \chi(\varepsilon\theta)\,e^{i\Phi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,u(x)\,dx\,d\theta,\quad \varepsilon>0. \tag{1.15}$$

Интегрируя по частям аналогично 1-му способу, получим

$$I_{\Phi,\,\varepsilon}(au)=\iint e^{i\Phi(x,\,\theta)}L^k(\chi(\varepsilon\theta)\,a(x,\,\theta)\,u(x))\,dx\,d\theta. \tag{1.16}$$

Заметим, что

$$|\,\partial_\theta^\gamma\,\chi(\varepsilon\theta)\,|\leqslant C_\gamma\langle\theta\rangle^{-|\gamma|}, \tag{1.17}$$

где постоянные C_γ не зависят от ε при $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Упражнение 1.8. Проверьте справедливость оценок (1.17).

Мы видим теперь, что в (1.16) можно перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, используя теорему Лебега. Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_{\Phi,\,\varepsilon}(au)$ существует и равен $I_\Phi(au)$ в смысле формулы (1.14). Отсюда, в частности, следует, что интеграл (1.14) не зависит от k (если только k достаточно велико), а предел интегралов (1.15) при $\varepsilon\to 0$ не зависит от выбора срезающей функции χ.

В дальнейшем мы будем более или менее свободно обращаться с осциллирующими интегралами, подразумевая возможность их регуляризации одним из указанных способов.

Упражнение 1.9. Доказать, что при фиксированных Φ и u осциллирующий интеграл $I_\Phi(au)$ представляет собой непрерывный линейный функционал на пространстве Фреше $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, в котором топология задается полунормами, равными точным нижним граням возможных постоянных $C_{\alpha,\,\beta,\,K}$ в оценках (1.10). Проверить, что замыкание $S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^N)$ в $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ содержит $S^{m'}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ при любом $m'<m$. Таким образом, регуляризацию можно рассматривать как продолжение линейного функционала по непрерывности.

1.3. Гладкость обобщенной функции, определяемой осциллирующим интегралом. Введем важное обозначение:

$$C_\Phi=\{(x,\,\theta)\colon\, x\in X,\ \theta\in\mathbb{R}^N\backslash 0,\ \Phi'_\theta(x,\,\theta)=0\} \tag{1.18}$$

$\left(\text{здесь } \Phi'_\theta \text{ — градиент функции } \Phi \text{ по } \theta, \text{ т. е. вектор } \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_1},\,\ldots,\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_N}\right)\right)$.

Множество C_Φ является коническим подмножеством $X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$, т. е. вместе с точкой $(x_0,\,\theta_0)$ содержит также все точки вида $(x_0,\,t\theta_0)$, где $t>0$.

Обозначая через π естественную проекцию $\pi\colon X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)\to X$, положим

$$S_\Phi=\pi C_\Phi,\qquad R_\Phi=X\backslash S_\Phi. \tag{1.19}$$

Рассмотрим обобщенную функцию $A\in\mathscr{D}'(X)$, определяемую осциллирующим интегралом $I_\Phi(au)$ по формуле

$$\langle A,\,u\rangle=I_\Phi(au).$$

Теорема 1.1. *Имеет место включение*

$$\operatorname{sing\,supp} A\subset S_\Phi$$

или, что то же самое, $A\in C^\infty(R_\Phi)$.

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно тому, что существует такая функция $A\in C^\infty(R_\Phi)$, что если $u\in C_0^\infty(R_\Phi)$, то

$$I_\Phi(au)=\int A(x)\,u(x)\,dx. \tag{1.20}$$

Положим

$$A(x)=\int e^{i\Phi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,d\theta. \tag{1.21}$$

Последний интеграл при $x\in R_\Phi$ представляет собой осциллирующий интеграл, зависящий от параметра x. При дифференцировании по этому параметру получаются интегралы того же типа. По существу, речь идет здесь о дифференцировании по параметру сходящегося интеграла, получающегося из (1.21) описанным выше преобразованием. Поэтому $A(x) \in C^\infty(R_\Phi)$. Формула (1.20) теперь получается тривиально. ■

Теорема 1.2. *Если $a \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ и $a = 0$ в конической окрестности множества C_Φ, то $A \in C^\infty(X)$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.1, поскольку дело опять-таки сводится к изучению осциллирующего интеграла (1.21), ввиду того что $\Phi'_\theta(x,\,\theta) \neq 0$ на носителе $a(x,\,\theta)$. ■

Определение 1.4. Фазовая функция $\Phi(x,\,\theta)$ называется *невырожденной*, если дифференциалы $d\Big(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta_j}\Big)$, $j = 1,\,\ldots,\,N$, линейно независимы на C_Φ или, что то же самое, $\operatorname{rank} \|\Phi''_{\theta\theta}\,\Phi''_{\theta x}\| = N$ (rank здесь обозначает ранг матрицы, а сама матрица в более подробной записи имеет вид

$$\|\Phi''_{\theta\theta}\,\Phi''_{\theta x}\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1\,\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1\,\partial \theta_N} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1\,\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1\,\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_N\,\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_N\,\partial \theta_N} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_N\,\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_N\,\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

и размеры $N \times (N+n)$).

Предложение 1.1. *Если Φ — невырожденная фазовая функция, то C_Φ — подмногообразие размерности n в $X \times (\mathbb{R}^N \backslash 0)$.*

Доказательство банально получится из теоремы о неявной функции. ■

Следующая теорема уточняет теорему 1.2 в случае невырожденной фазовой функции.

Теорема 1.3. *Пусть Φ невырождена, $a \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, причем выполнено условие*:

$$\text{«либо } \rho > \delta \text{ и } \rho + \delta = 1, \text{ либо } \rho > \delta \text{ и } \Phi \text{ линейна по } \theta\text{».} \tag{1.22}$$

Тогда

1) *если a имеет на C_Φ нуль бесконечного порядка, то $A(x) \in C^\infty(X)$;*

2) *если $a = 0$ на C_Φ, то существует такое $b \in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, что $I_\Phi(au) = I_\Phi(bu)$ при любом $u \in C_0^\infty(X)$.*

Замечание. Последнее утверждение показывает, что если $a|_{C_\Phi} = 0$, то обобщенную функцию A можно также определить, заменив $a(x,\,\theta)$ на $b(x,\,\theta)$ с той же фазовой функцией. При этом $b(x,\,\theta)$ имеет меньший порядок роста по θ, что означает бóльшую регулярность $A(x)$.

Для доказательства теоремы 1.3 нам понадобится ряд лемм. Первая из них относится к заменам переменных в функциях класса $S^m_{\rho,\,\delta}$. Прежде всего заметим, что имеет смысл говорить, что $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(U)$, где U — любая коническая по θ область в пространстве $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$. Именно, мы будем писать, что $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(U)$, если для любого компакта $K\subset(\mathbb{R}^n\times S^{N-1})\cap U$ (здесь S^{N-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^N$) и для любых мультииндексов α, β существует такая постоянная $C_{\alpha,\,\beta,\,K}>0$, что оценка (1.10) выполнена при $(x,\,\theta/|\,\theta\,|)\in K$ и при $|\,\theta\,|\geqslant 1$. Предположим теперь, что задан диффеоморфизм конической области $V\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{N_1}$ на коническую область $U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$, перестановочный с естественным действием мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных чисел, т. е. диффеоморфизм, переводящий точку $(y,\,\eta)\in V$ в точку $(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta))\in U$, где $x(y,\,\eta)$ и $\theta(y,\,\eta)$ положительно однородны по η порядков 0 и 1 соответственно. Сделаем в функции $a(x,\,\theta)$ замену переменной, полагая

$$b(y,\,\eta)=a(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta)). \tag{1.23}$$

Л е м м а 1.2. *Пусть* $a(x,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}(U)$ *и выполнено одно из следующих трех условий*:

а) $\rho+\delta=1$;

б) $\rho+\delta\geqslant 1$ *и* $x=x(y)$ *не зависит от* η;

в) $x=x(y)$, $\xi=\xi(\eta)$.

Тогда $b(y,\,\eta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя $b(y,\,\eta)$, получаем из (1.23)

$$\frac{\partial b}{\partial\eta_l}=\sum_j b^{(j)}\frac{\partial\theta_j}{\partial\eta_l}+\sum_k b_{(k)}\frac{\partial x_k}{\partial\eta_l}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_r}=\sum_j b^{(j)}\frac{\partial\theta_j}{\partial y_r}+\sum_k b_{(k)}\frac{\partial x_k}{\partial y_r}, \tag{1.25}$$

где $b^{(j)}=\dfrac{\partial a}{\partial\theta_j}(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta))$, $b_{(k)}=\dfrac{\partial a}{\partial x_k}(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta))$. Функции $\dfrac{\partial\theta_j}{\partial\eta_l}$, $\dfrac{\partial x_k}{\partial\eta_l}$, $\dfrac{\partial\theta_j}{\partial y_r}$ и $\dfrac{\partial x_k}{\partial y_r}$ положительно однородны по η порядков, соответственно, 0, -1, 1 и 0. Поэтому они принадлежат, соответственно, классам S^0, S^{-1}, S^1 и S^0 (в области V). Учитывая оценки производных функции a, мы получим легко при $|\,\eta\,|\geqslant 1$

$$\left|\frac{\partial b}{\partial\eta_l}\right|\leqslant C_k(|\eta|^{m-\rho}+|\,\eta\,|^{m+\delta-1}),\qquad \left(x,\,\frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K,$$

$$\left|\frac{\partial b}{\partial y_r}\right|\leqslant C_k(|\,\eta\,|^{m-\rho+1}+|\,\eta\,|^{m+\delta}),\qquad \left(x,\,\frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K,$$

где K — некоторый компакт в V. Если $m+\delta-1\leqslant m-\rho$, т. е. $\rho+\delta\leqslant 1$, то из (1.24) получается оценка $\left|\dfrac{\partial b}{\partial\eta_l}\right|\leqslant 2C_K\langle\eta\rangle^{m-\rho}$. Если $x=x(y)$, то $\dfrac{\partial x_k}{\partial\eta_l}=0$ и эта оценка получается из (1.24) без предположения $\rho+\delta\leqslant 1$.

Аналогично, если $m-\rho+1\leqslant m+\delta$, т. е. $\rho+\delta\geqslant 1$, то из (1.25) следует $\left|\dfrac{\partial b}{\partial y_r}\right|\leqslant 2C_K\langle\eta\rangle^{m+\delta}$. Эта же оценка получается без дополнительного предположения $\rho+\delta\geqslant 1$, если $\theta=\theta(\eta)$.

Итак, нижние оценки вида (1.10) проверены при $|\alpha+\beta|\leqslant 1$ для любой функции $a(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(U)$ сразу то всех трех случаях а), б), в). Теперь, действуя по индукции, будем считать, что они проверены при $|\alpha+\beta|\leqslant k$ для любых $a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$. В частности, мы получаем, что для производных порядка $\leqslant k$ от функций $b^{(j)}$ и $b_{(j)}$ верны оценки классов $S^{m-\rho}(V)$ и $S^{m+\delta}(V)$ соответственно. Но тогда из (1.24), (1.25) аналогичным рассуждением получим справедливость этих оценок для производных порядка $\leqslant(k+1)$ для любой функции $a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$. ■

Лемма 1.3 (вариант леммы Адамара). *Пусть функции* $\Phi_1(x,\theta),\ldots,\Phi_k(x,\theta)$ *принадлежат* $C^\infty(U)$, *где* U — *коническая область в* $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$, *и положительно однородны по* θ *степени* 0, *причем* $d\Phi_1,\ldots,d\Phi_k$ *линейно независимы в точках множества*

$$C=\{(x,\theta)\in U,\ \ \Phi_j(x,\theta)=0,\ \ j=1,\ldots,k\}.$$

Пусть теперь $a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$, $a|_C=0$ *и* $\rho+\delta=1$. *Тогда существует представление*

$$a=\sum_{j=1}^{k}a_j\Phi_j,\tag{1.26}$$

где $a_j(x,\theta)\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$, $j=1,\ldots,k$. *Если при этом функция* $a(x,\theta)$ *имела* 0 *бесконечного порядка на* C, *то все функции* $a_j(x,\theta)$, $j=1,\ldots,k$, *также имеют* 0 *бесконечного порядка на* C.

Доказательство. Заметим, что (1.26) является линейным уравнением относительно функций a_j. Поэтому достаточно уметь находить функции a_j локально (при $(x,\theta/|\theta|)$, близком к $(x_0,\theta_0/|\theta_0|)$, где (x_0,θ_0) — некоторая произвольно фиксированная точка из U). Глобальное решение можно склеить на всем U, пользуясь разбиением единицы на U, состоящим из функций нулевой однородности и подчиненным покрытию U коническими областями, в которых требуемые функции a_j уже построены.

Итак, пусть $(x_0,\theta_0)\in U$. Если $(x_0,\theta_0)\notin C$, то существует такое j_0, что $\Phi_{j_0}(x_0,\theta_0)\neq 0$. Мы можем тогда при $(x,\theta/|\theta|)$, близком к $(x_0,\theta_0/|\theta_0|)$, положить $a_{j_0}=a/\Phi_{j_0}$ и $a_j=0$ при $j\neq j_0$. Таким образом, остается проверить существование a_j локально при $(x,\,\theta/|\theta|)$, близком к $(x_0,\,\theta_0/|\theta_0|)\in C$. По теореме о неявной функции $\Phi_1,\,\ldots,\,\Phi_k$ можно дополнить функциями $\Phi_{k+1},\,\ldots,\,\Phi_l$ $(l=n+N-1)$ нулевой однородности так, что $\Phi_1,\,\ldots,\,\Phi_l$ — локальные координаты на многообразии $\{(x,\,\theta)\colon |\theta|=1\}$ в окрестности точки $(x_0,\,\theta_0/|\theta_0|)$. Тогда отображение

$$(x,\,\theta)\mapsto(\Phi_1(x,\,\theta),\,\ldots,\,\Phi_l(x,\,\theta),\,|\theta|)\in\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}_+$$

является диффеоморфизмом конической окрестности луча $(x_0,\,t\theta_0)$ на открытое коническое множество $B\times\mathbb{R}_+$, где B можно считать шаром в $\mathbb{R}^l$. При этом образ C имеет вид $\{(\Phi,\,|\theta|)\colon \Phi_1=\ldots=\Phi_k=0\}$. Рассмотрим теперь символ

$$\tilde a(\Phi,\,|\theta|)=a(x(\Phi,\,|\theta|),\;\;\theta(\Phi,\,|\theta|)),$$

получающийся из $a(x,\,\theta)$ под действием этого диффеоморфизма. Из леммы 1.2 следует, что $\tilde a(\Phi,\,|\theta|)\in S^m_{\rho,\,\delta}(B\times\mathbb{R}_+)$. Но тогда по формуле Ньютона—Лейбница

$$\tilde a(\Phi,\,|\theta|)=\sum_{j=1}^{k}\Phi_j\int\limits_0^1\tilde a_{(j)}(t\Phi_1,\,\ldots,\,t\Phi_k,\,\Phi_{k+1},\,\ldots,\,\Phi_l,\,|\theta|)\,dt,$$

где $\tilde a_{(j)}=\dfrac{\partial\tilde a}{\partial\Phi_j}\in S^{m+\delta}_{\rho,\,\delta}(B\times\mathbb{R}_+)$. Остается произвести обратную замену. ■

Доказательство теоремы 1.3. Будем считать, что $\rho+\delta=1$. Тогда, если $a|_{C_\Phi}=0$, то по лемме 1.3 с $\Phi_j=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}$ можно представить $a(x,\,\theta)$ в виде

$$a=\sum_{j=1}^{N}a_j\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j},\qquad a_j\in S^{m+\delta}_{\rho,\,\delta}(U). \tag{1.27}$$

Однако, учитывая соотношение $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\,e^{i\Phi}=-i\,\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\,e^{i\Phi}$, мы можем, интегрируя по частям, получить, что

$$I_\Phi(au)=\sum_{j=1}^{N}I_\Phi\Big(i\,\frac{\partial a_j}{\partial\theta_j}\,u\Big).$$

Но $\dfrac{\partial a_j}{\partial\theta_j}\in S^{m+\delta-\rho}_{\rho,\,\delta}(U)$, что доказывает второе утверждение теоремы. Из этого доказательства видно, что если функция $a(x,\,\theta)$ имела 0 бесконечного порядка на C_Φ, то $b(x,\,\theta)$ также можно выбрать обладающей этим свойством. Поэтому при доказательстве первого утверждения можно считать, что $a(x,\,\theta)\in S^{-M}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, где M сколь угодно велико. Но тогда интеграл (1.21) абсолютно сходится равномерно по x, как и интегралы, полученные из него дифференцированием порядка $\leqslant l(M)$, где $l(M)\to+\infty$ при $M\to+\infty$, откуда и следует гладкость $A(x)$. ■

Упражнение 1.10. Доказать теорему 1.3 в случае, когда выполнено второе из предположений (1.22) ($\Phi(x,\,\theta)$ линейна по θ).

Указание. Дело сводится к применению п. в) из леммы 1.2.

§ 2. Интегральные операторы Фурье (определение и простейшие свойства)

2.1. Определение интегрального оператора Фурье и его ядра. Пусть X, Y — область в $\mathbb{R}^{n_X}$ и $\mathbb{R}^{n_Y}$. Рассмотрим выражение

$$Au(x)=\int e^{i\Phi(x,\,y,\,\theta)}\,a(x,\,y,\,\theta)\,u(y)\,dy\,d\theta, \tag{2.1}$$

где $u(y)\in C_0^\infty(Y)$, $x\in X$, $\Phi(x,\,y,\,\theta)$ — фазовая функция на $X\times Y\times\mathbb{R}^N$, $a(x,\,y,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times Y\times\mathbb{R}^N)$, причем $\rho>0$, $\delta<1$.

При указанных предположениях определен интеграл

$$\langle Au,\,v\rangle=\iiint e^{i\Phi(x,\,y,\,\theta)}\,a(x,\,y,\,\theta)\,u(y)\,v(x)\,dx\,dy\,d\theta,\qquad v\in C_0^\infty(X), \tag{2.2}$$

являющийся обычным осциллирующим интегралом. Легко проверить, что при фиксированном u выражение (2.2), рассматриваемое как функционал от v, определяет обобщенную функцию $Au\in\mathscr{D}'(X)$. Таким образом, определен линейный оператор

$$A\colon C_0^\infty(Y)\to\mathscr{D}'(X), \tag{2.3}$$

который мы будем формально записывать в виде интеграла (2.1).

Определение 2.1. Оператор A вида (2.1) называется *интегральным оператором Фурье* (сокращенно ИОФ) с фазовой функцией $\Phi(x,\,y,\,\theta)$.

Определение 2.2. Обобщенная функция $K_A\in\mathscr{D}'(X\times Y)$, определяемая осциллирующим интегралом

$$\langle K_A,\,w\rangle=\iiint e^{i\Phi(x,\,y,\,\theta)}\,a(x,\,y,\,\theta)\,w(x,\,y)\,dx\,dy\,d\theta,\qquad w\in C_0^\infty(X\times Y), \tag{2.4}$$

называется *ядром* оператора A.

Предложение 2.1. а) $K_A\in C^\infty(R_\Phi)$, *где*

$$R_\Phi=\{(x,\,y)\colon \Phi'_\theta(x,\,y,\,\theta)\neq0\ \textit{для любого}\ \theta\in\mathbb{R}^N\backslash0\}.$$

б) *Если* $a(x, y, \theta) = 0$ *в конической окрестности множества*

$$C_\Phi = \{(x, y, \theta) \colon \Phi'_\theta(x, y, \theta) = 0\},$$

то $K_A \in C^\infty(X \times Y)$.

Доказательство немедленно получается из теорем 1.1 и 1.2. ■

Ядро K_A является обычным ядром оператора A в смысле Л. Шварца ввиду очевидной формулы

$$\langle Au, v\rangle = \langle K_A, u(y)\, v(x)\rangle, \quad u \in C_0^\infty(Y), \ v \in C_0^\infty(X). \tag{2.5}$$

Упражнение 2.1. Проверить, что ядро K_A однозначно определяется отображением (2.3), задаваемым оператором A, и, наоборот, однозначно определяет это отображение.

Замечание. Легко привести пример двух различных пар фазовая функция — функция $a(x, y, \theta)$, определяющих одно и то же отображение (2.3). Более того, как правило, функция $a(x, y, \theta)$ неоднозначно определена оператором A даже при одной и той же фазовой функции Φ.

2.2. Операторные фазовые функции.

Определение 2.3. Фазовая функция $\Phi(x, y, \theta)$ называется *операторной фазовой функцией*, если выполнены следующие два условия:

$$\Phi'_{y,\theta}(x, y, \theta) \neq 0 \quad \text{при} \quad \theta \neq 0, \ x \in X, \ y \in Y; \tag{2.6}$$

$$\Phi'_{x,\theta}(x, y, \theta) \neq 0 \quad \text{при} \quad \theta \neq 0, \ x \in X, \ y \in Y. \tag{2.7}$$

Роль этих условий выясняется в следующих двух предложениях.

Предложение 2.2. *Если выполнено условие* (2.6), *то оператор вида* (2.1) *непрерывно отображает* $C_0^\infty(Y)$ *в* $C^\infty(X)$.

Доказательство. Интеграл (2.1) сам уже определен как осциллирующий интеграл, зависящий от параметра x. Его производные по x имеют аналогичный вид. ■

В дальнейшем $\mathscr{E}'(Y)$ означает дуальное пространство к $C^\infty(Y)$ (пространство обобщенных функций с компактным носителем в Y).

Предложение 2.3. *Если выполнено условие* (2.7), *то отображение* (2.3), *определяемое интегралом* (2.1), *продолжается до линейного непрерывного отображения*

$$A \colon \mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X) \tag{2.8}$$

(*непрерывность можно понимать, вводя в* $\mathscr{E}'(Y)$ *и* $\mathscr{D}'(X)$ *слабые топологии* *)).

*) Напомним, что слабая топология в пространстве E', состоящем из линейных функционалов на пространстве E, определяется набором полунорм $p_\varphi(f) = |\langle f, \varphi\rangle|$, где $f \in E'$, φ — любой фиксированный элемент пространства E.

Доказательство. Транспонированный оператор

$$ {}^tAv(y) = \iint e^{i\Phi(x,y,\theta)}\, a(x,\, y,\, \theta)\, v(x)\, dx\, d\theta \tag{2.9} $$

в силу предложения 2.2 определяет отображение

$$ {}^tA\colon C_0^\infty(X) \to C^\infty(Y), $$

и остается определить A формулой

$$ \langle Au,\, v\rangle = \langle u,\, {}^tAv\rangle, $$

где $u \in \mathscr{E}'(Y)$, $v \in C_0^\infty(X)$. ■

Упражнение 2.2. Проверить, что определенный таким образом оператор A действительно является продолжением отображения (2.3) по непрерывности.

Таким образом, ИОФ A с операторной фазовой функцией Φ отображает $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$. Мы изучим сейчас изменение носителя сингулярности под действием A.

Условимся об одном обозначении. Если X, Y — два множества, S — подмножество в $X \times Y$ и K — подмножество в Y, то $S \circ K$ — подмножество в X, состоящее из тех точек $x \in X$, для которых существует такое $y \in K$, что $(x,\, y) \in S$.

Теорема 2.1. *Имеет место включение*

$$ \operatorname{sing\,supp} Au \subset S_\Phi \circ \operatorname{sing\,supp} u, \tag{2.10} $$

где $S_\Phi = (X \times Y)\backslash R_\Phi$ состоит из тех пар $(x,\, y)$, для которых существует такое $\theta \in \mathbb{R}^N\backslash 0$, что $\Phi'_\theta(x,\, y,\, \theta) = 0$.

Доказательство. Разбивая обобщенную функцию $u \in \mathscr{E}'(Y)$ в сумму функции из $C_0^\infty(Y)$ и обобщенной функции, сосредоточенной в окрестности $\operatorname{sing\,supp} u$, мы видим, что достаточно проверить, что

$$ \operatorname{sing\,supp}(Au) \subset S_\Phi \circ \operatorname{supp} u. $$

Положим $K = \operatorname{supp} u$, и пусть K' — произвольный компакт в X, не пересекающийся с $S_\Phi \circ K$, так что $K' \times K \subset R_\Phi$. Так как R_Φ открыто, то существуют такие открытые окрестности Ω и Ω' компактов K и K', что $\Omega' \times \Omega \subset R_\Phi$. Достаточно проверить, что $Au \in C^\infty(\Omega')$. Но это ясно, так как $K_A(x,\, y) \in C^\infty(R_\Phi)$ и, в частности, $K_A(x,\, y) \in C^\infty(\Omega' \times \Omega)$. ■

Упражнение 2.3. Проверить использованное выше утверждение о том, что если $K_A \in C^\infty(\Omega' \times \Omega)$, то оператор A отображает $\mathscr{E}'(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega')$.

2.3. Пример 1: задача Коши для волнового уравнения. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f; \tag{2.11}$$

$$f|_{t=0} = 0, \quad f'_t|_{t=0} = u(x), \tag{2.12}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f = f(t, x)$, Δ — лапласиан по x, и пусть вначале $u(x) \in \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Будем решать задачу (2.11)—(2.12) с помощью преобразования Фурье по x, полагая

$$\tilde{f}(t, \xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} f(t, y)\, dy.$$

Тогда имеем, очевидно,

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} = -|\xi|^2 \tilde{f}(t, \xi), \tag{2.13}$$

$$\tilde{f}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{f}'_t|_{t=0} = \tilde{u}(\xi), \tag{2.14}$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$. Из (2.13) и (2.14) легко следует, что

$$\tilde{f}(t, \xi) = \tilde{u}(\xi)\, \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}.$$

Следовательно, по формуле обращения преобразования Фурье

$$f(t, x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} |\xi|^{-1} \sin t|\xi|\, u(y)\, dy\, d\!\!\bar{}\xi =$$
$$= \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} (2i|\xi|)^{-1} (e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|})\, u(y)\, dy\, d\!\!\bar{}\xi.$$

Мы хотим разбить последний интеграл в сумму двух интегралов, каждый из которых содержит одну из экспонент $e^{it|\xi|}$ и $e^{-it|\xi|}$. Однако это приведет к появлению особенности при $\xi = 0$. Чтобы избежать этого, введем такую срезающую функцию $\chi = \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\chi(\xi) = 1$ вблизи 0 и разобьем интеграл на три части

$$f(t, x) = f_+(t, x) - f_-(t, x) + r(t, x), \tag{2.15}$$

где

$$f_+(t, x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi + t|\xi|} (1 - \chi(\xi))\, (2i|\xi|)^{-1}\, dy\, d\!\!\bar{}\xi,$$

$$f_-(t, x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi - t|\xi|} (1 - \chi(\xi))\, (2i|\xi|)^{-1}\, dy\, d\!\!\bar{}\xi,$$

$$r(t, x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi}\, \chi(\xi)\, |\xi|^{-1} \sin t|\xi|\, dy\, d\!\!\bar{}\xi.$$

Ясно, например, что $f_+ = Au$, где A — ИОФ с фазовой функцией
$$\Phi(t,\, x,\, y,\, \xi) = (x-y)\cdot\xi + t|\xi\,|.$$
Это — операторная фазовая функция. Поскольку $\Phi'_\xi = x - y + t\xi/|\xi\,|$, мы получаем
$$C_\Phi = \{(t,\, x,\, y,\, \xi)\colon y - x = t\,\xi/|\xi\,|\},$$
$$S_\Phi = \{(t,\, x,\, y)\colon |x-y|^2 = t^2\}.$$
Аналогичным образом второй член $f_-(t,\, x)$ представляется в виде $f_- = \tilde{A}u$, где $\tilde{A}$ — ИОФ с фазовой функцией
$$\tilde{\Phi}(t,\, x,\, y,\, \xi) = (x-y)\cdot\xi - t|\xi\,|,$$
имеющей то же самое множество $S_{\tilde{\Phi}} = S_\Phi$.

Третий член очевидным образом имеет вид $r = Ru$, где R — интегральный оператор с гладким (C^∞) ядром. Легко видеть, что он тоже может быть записан как ИОФ вида (2.1) с любой наперед заданной фазовой функцией и с амплитудой $a \in S^{-\infty}$ (см. также упражнение 2.4).

Таким образом, мы видим, что каждый из членов $f_\pm(t,\, x)$, $r(t,\, x)$ может быть представлен как результат применения ИОФ к начальному условию u. В частности, согласно предложению 2.3, мы можем определить $f(t,\, x)$ для любого $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. По теореме 2.1 особенности обобщенной функции $f(t,\, x)$ содержатся в множестве
$$\{(t,\, x)\colon \exists\, y \in \operatorname{sing\,supp}\, u,\ \ |x-y|^2 = t^2\}.$$
Это классический результат, означающий, что особенности распространяются со скоростью света (в данном случае равной 1). В частности, особенности фундаментального решения (т. е. решения, соответствующего начальному изложению $u(y) = \delta(y)$) принадлежат световому конусу $|x\,|^2 = t^2$.

Отметим также, что если мы зафиксируем момент времени t_0, то $\Phi_{t_0}(x,\, y,\, \xi) = \Phi(t_0,\, x,\, y,\, \xi)$ остается операторной фазовой функцией. Следовательно, отображение $u \mapsto f(t_0,\, x)$ представляет собой ИОФ.

2.4. Пример 2: линейные дифференциальные операторы. Пусть
$$A = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha, \tag{2.16}$$
где $a_\alpha(x) \in C^\infty(X)$, X — область в $\mathbb{R}^n$ и $D = i^{-1}\partial/\partial x$.

Пользуясь преобразованием Фурье, мы можем написать
$$D^\alpha\, u(x) = \iint \xi^\alpha\, e^{i(x-y)\cdot\xi}\, u(y)\, dy\, d\xi,$$

откуда

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \sigma_A(x,\, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{2.17}$$

где $\sigma_A(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ называется *символом* оператора A. Так как $\sigma_A(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$, то из (2.17) видно, что A является ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x,\, y,\, \xi) = (x-y)\cdot\xi$.

2.5. Пример 3: псевдодифференциальные операторы.

Определение 2.4. Пусть $n_X = n_Y = N = n$ и $X = Y$. Тогда ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x,\, y,\, \xi) = (x-y)\cdot\xi$ называется *псевдодифференциальным оператором* (сокращенно ПДО). Класс ПДО, которые можно определить с помощью функций $a(x,\, y,\, \xi) \in S^m_{\rho,\, \delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, мы будем обозначать через $L^m_{\rho,\, \delta}(X)$ или просто $L^m_{\rho,\, \delta}$. Вместо $L^m_{1,\, 0}$ будем писать L^m. Положим $L^{-\infty} = \bigcap\limits_m L^m$.

Как показывает предыдущий пример, всякий линейный дифференциальный оператор является ПДО.

Мы укажем сейчас те свойства ПДО, которые вытекают из уже доказанных свойств ИОФ.

Предложение 2.4. *Пусть A — ПДО, заданный формулой*

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, a(x,\, y,\, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{2.18}$$

K_A — ядро оператора A и Δ — диагональ в $X \times X$. Тогда

а) $K_A \in C^\infty((X \times X)\backslash\Delta)$;

б) *оператор A определяет линейные непрерывные отображения*

$$A\colon C_0^\infty(X) \to C^\infty(X), \tag{2.19}$$

$$A\colon \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{D}'(X), \tag{2.20}$$

причем если $u \in \mathscr{E}'(X)$, то

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u, \tag{2.21}$$

(это свойство называется *псевдолокальностью* оператора A);

в) *если функция $a(x,\, y,\, \xi) \in S^m_{\rho,\, \delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ обращается в 0 при $x = y$ и $\delta < \rho$, то оператор A можно записать в виде* (2.18), *где вместо $a(x,\, y,\, \xi)$ стоит $b(x,\, y,\, \xi) \in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\, \delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$*;

г) *если $a(x,\, y,\, \xi)$ имеет при $x = y$ нуль бесконечного порядка, то $K_A \in C^\infty(X \times X)$ и оператор A отображает $\mathscr{E}'(X)$ в $C^\infty(X)$.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

Упражнение 2.4. Пусть $K(x, y) \in C^\infty(X \times X)$ и A — оператор из $C_0^\infty(x)$ в $C^\infty(X)$ с ядром $K(x, y)$. Доказать, что A — ПДО, причем его запись (2.18) можно выбрать так, что $a(x, y, \xi) \in S^{-\infty}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$.

Указание. Если $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) \geqslant 0$ и $\int \chi(\xi)\, d\xi = 1$, то мы можем положить

$$a(x, y, \xi) = e^{-i(x-y)\cdot\xi} K(x, y)\, \chi(\xi).$$

Заметим, что линейные дифференциальные операторы обладают свойством *локальности*:

$$\operatorname{supp}(Au) \subset \operatorname{supp}\, u, \quad u \in C_0^\infty(X). \tag{2.22}$$

Следующее упражнение показывает, что для ПДО это, вообще говоря, не так.

Упражнение 2.5. Показать, что оператор с ядром $K(x, y) \in C^\infty(X \times X)$ не может обладать свойством локальности (2.22), если только $K(x, y) \not\equiv 0$.

Задача 2.1. Пусть дан линейный непрерывный оператор

$$A\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X),$$

обладающий локальностью (2.22). Тогда для любой подобласти $X' \subset X$, замыкание которой есть компакт в X, ограничение A на $C_0^\infty(X')$ является линейным дифференциальным оператором.

Указание. Проверить, что при каждом фиксированном $x_0 \in X$ линейный функционал на $C_0^\infty(x)$, равный $(A\varphi)(x_0)$ на функции $\varphi \in C_0^\infty(X)$, сосредоточен в точке x_0 и, следовательно, может быть записан в виде

$$(A\varphi)(x_0) = \sum_\alpha a_\alpha(x_0)\, (D^\alpha \varphi)(x_0).$$

Вывести из непрерывности A локальную конечность написанной суммы и гладкость (по x_0) коэффициентов $a_\alpha(x_0)$.

§ 3. Алгебра псевдодифференциальных операторов и их символов

3.1. Собственные псевдодифференциальные операторы. Пусть A — ПДО, K_A — его ядро, $\operatorname{supp} K_A$ — носитель ядра K_A (наименьшее из всех замкнутых подмножеств $Z \subset X \times X$, для которых $K_A|_{(X\times X)\setminus Z} = 0$). Рассмотрим канонические проекции $\pi_1, \pi_2\colon \operatorname{supp} K_A \to X$, получаемые ограничением соответствующих проекций прямого произведения $X \times X$. Напомним, что непрерывное отображение $f\colon M \to N$, где M, N — топологические пространства, называется *собственным*, если для любого компакта $K \subset N$ его прообраз $f^{-1}(K)$ является компактом в M.

Определение 3.1. ПДО A называется *собственным*, если обе проекции $\pi_1, \pi_2\colon \operatorname{supp} K_A \to X$ являются собственными отображениями.

Пример. Линейный дифференциальный оператор (см. п. 2.4) является собственным ПДО (в этом случае $\operatorname{supp} K_A$ — диагональ $\Delta \subset X \times X$).

Предложение 3.1. *Пусть A — собственный* ПДО. *Тогда A определяет отображение*

$$A\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X), \tag{3.1}$$

которое продолжается до непрерывных отображений

$$A\colon \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{E}'(X), \tag{3.2}$$

$$A\colon C^\infty(X) \to C^\infty(X), \tag{3.3}$$

$$A\colon \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X). \tag{3.4}$$

Доказательство. Если $u(y) \in C_0^\infty(X)$, то имеет место включение

$$\operatorname{supp}(Au) \subset (\operatorname{supp} K_A) \circ (\operatorname{supp} u). \tag{3.5}$$

В самом деле, если $v \in C_0^\infty(X)$ таково, что $\operatorname{supp} v \cap (\operatorname{supp} K_A) \circ (\operatorname{supp} u) = \varnothing$, то $\operatorname{supp} K_A \cap \operatorname{supp}[u(y)\,v(x)] = \varnothing$, и поэтому $\langle Au,\, v\rangle = 0$ ввиду формулы (2.5). Далее, из очевидной формулы

$$(\operatorname{supp} K_A) \circ (\operatorname{supp} u) = \pi_1(\operatorname{supp} K_A \cap \pi_2^{-1}(\operatorname{supp} u)), \tag{3.6}$$

следует, что в правой части (3.5) стоит компакт, так что $Au \in C_0^\infty(X)$, и доказано, что A осуществляет отображение (3.1), непрерывность которого легко проверяется.

Поскольку ядро $K_{{}^tA}$ транспонированного оператора ${}^tA$ получается из K_A перестановкой x и y (точнее, $\langle K_{{}^tA},\, w(x,\, y)\rangle = \langle K_A,\, w(y,\, x)\rangle$), то оператор ${}^tA$ также определяет непрерывное отображение

$${}^tA\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X),$$

что по двойственности дает для A отображение (3.4). Наконец, формула (3.5), как легко проверить, применима и при $u \in \mathscr{E}'(X)$, откуда получается отображение (3.2). А поскольку это же можно сказать и об ${}^tA$, то по двойственности получается отображение (3.3). ■

Упражнение 3.1. Пусть X_n — такая последовательность открытых подмножеств X, что

1) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$,
2) $\bigcup\limits_n X_n = X$,
3) замыкание $\bar{X}_n$ множества X_n в X является компактом в X.

Пусть $\chi_n(x) \in C_0^\infty(X)$ и $\chi_n(x) = 1$ при $x \in X_n$.

Пусть, наконец, A — собственный ПДО в X. Показать, что если $u \in \mathscr{D}'(X)$, то для любого m найдется такое $N = N(m)$, что обобщенная функция $[A(\chi_n u)]|_{X_m}$ при

$n \geqslant N$ не зависит от n. Таким образом, мы можем определить $Au \in \mathscr{D}'(X)$ формулой

$$Au = \lim_{n \to \infty} A(\chi_n u). \tag{3.7}$$

Показать, что это определение совпадает с определением, данным выше в доказательстве предложения 3.1.

Упражнение 3.2. Показать, что на $C^\infty(X)$ совпадают все три указаных выше определения собственного ПДО A:

а) по двойственности к отображению ${}^tA\colon \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{E}'(X)$;

б) как ограничение на $C^\infty(X)$ отображения $A\colon \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$, построенного по двойственности к отображению ${}^tA\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$,

в) по формуле (3.7).

Упражнение 3.3. Проверить, что оператор A является собственным тогда и только тогда, когда собственным является оператор ${}^tA$.

Роль собственных ПДО состоит в том, что они образуют алгебру, в которой роль умножения играет обычное умножение (композиция) операторов. Это утверждение будет доказано ниже, а пока из предложения 3.1 видно, что композиция $A_1 \circ A_2$ двух собственных ПДО определена как линейный непрерывный оператор в пространствах $C_0^\infty(X)$, $\mathscr{E}'(X)$, $C^\infty(X)$ или $\mathscr{D}'(X)$.

Отметим, что из (2.18), задающей ПДО A через $a(x, y, \xi)$, не видно сразу, что она применима при $u \in \mathscr{D}'(X)$ (или хотя бы при $u \in C^\infty(X)$). Это не удивительно, поскольку функция $a(x, y, \xi)$ не определяется однозначно оператором A. Однако, пользуясь этим произволом, мы можем выбрать $a(x, y, \xi)$ более удачно.

Определение 3.2. Будем называть функцию $a(x, y, \xi)$ *функцией с собственным носителем*, если обе проекции

$$\pi_1,\ \pi_2\colon \operatorname{supp}_{x,y}\, a(x, y, \xi) \to X$$

являются собственными отображениями (через $\operatorname{supp}_{x,y}\, a(x, y, \xi)$ обозначается замыкание проекции $\operatorname{supp}\, a(x, y, \xi)$ на $X \times X$).

Ясно, что в этом случае соответствующий ПДО A является собственным.

Предложение 3.2. *Если A — собственный* ПДО *и $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, то оператор A можно задать формулой* (2.18) *с функцией $a(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, имеющей собственный носитель.*

Доказательство. Пусть $\chi(x, y) \in C^\infty(X \times X)$, причем $\chi(x, y) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} K_A$ и обе проекции $\pi_1, \pi_2\colon \operatorname{supp} \chi \to X$ являются собственными отображениями (проверьте, что такая функция существует!). Тогда, написав в (2.18) вместо $a(x, y, \xi)$ функцию $\chi(x, y)\, a(x, y, \xi)$, мы не изменим ядра K_A и, следовательно, не изменим оператора A, в то время как функция $\chi(x, y)\, a(x, y, \xi)$ уже имеет собственный носитель. ■

Отметим, что если функция $a(x,\, y,\, \xi)$ имеет собственный носитель, то интеграл (2.18) при $u \in C^\infty(X)$ определен, если рассматривать его как повторный.

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Всякий* ПДО A *может быть записан в виде* $A = A_0 + A_1$, *где* A_0 — *собственный* ПДО, *а* A_1 *имеет ядро* $K_{A_1} \in C^\infty(X \times X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A задается в виде (2.18) с функцией $a(x,\, y,\, \xi)$, то можно задать A_0 и A_1 в том же виде, подставив вместо $a(x,\, y,\, \xi)$ функции $a_0(x,\, y,\, \xi) = \chi(x,\, y)\, a(x,\, y,\, \xi)$ и $a_1(x,\, y,\, \xi) = (1 - \chi(x,\, y))\, a(x,\, y,\, \xi)$, где функция $\chi(x,\, y)$ равна 1 в окрестности диагонали $\Delta \subset X \times X$ и такова, что обе проекции $\pi_1,\, \pi_2\colon \operatorname{supp} \chi \to X$ являются собственными отображениями. ■

П р е д л о ж е н и е 3.4. *Пусть* A — ПДО. *Тогда* A *является собственным тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия*:

а) *для любого компакта* $K \subset X$ *существует такой компакт* $K_1 \subset X$, *что из включения* $\operatorname{supp} u \subset K$ *вытекает, что* $\operatorname{supp}(Au) \subset K_1$;

б) *то же самое условие с заменой* A *на* ${}^tA$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий а) и б) вытекает из формулы (3.5). Докажем достаточность. Проверим, например, что проекция $\pi_2\colon \operatorname{supp} K_A \to X$ является собственным отображением. Пусть K — любой компакт в X. Найдем компакт K_1, о котором говорится в п. а), и проверим, что $\pi_2^{-1}(K) \cap \operatorname{supp} K_A \subset K_1 \times K$. Если $(x_0,\, y_0) \in (X \setminus K_1) \times K$, то если гладкая функция $w(x,\, y) = u(y)\, v(x)$ сосредоточена в окрестности $(x_0,\, y_0)$, то $\langle K_A,\, w\rangle = 0$ в силу условия а). Но тогда это же верно по линейности и непрерывности для любой функции $w \in C_0^\infty(X \times X)$, сосредоточенной в окрестности $(x_0,\, y_0)$, откуда и следует требуемое включение. ■

3.2. Символ собственного псевдодифференциального оператора.

Мы хотим для любого собственного ПДО A определить его символ аналогично примеру 2 из § 2.

Укажем сразу, что в этом примере справедлива формула

$$\sigma_A(x,\, \xi) = e_{-\xi}(x)\, A\, e_\xi(x), \tag{3.8}$$

где $e_\xi(x) = e^{ix\cdot\xi}$. Отметим, что правая часть ее имеет смысл и для собственного ПДО A.

О п р е д е л е н и е 3.3. Пусть A — собственный ПДО. Его *символом* (или *полным символом*) называется функция $\sigma_A(x,\, \xi)$ на $X \times \mathbb{R}^n$, определенная формулой (3.8).

Поскольку $e_\xi(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией от ξ со значениями в $C^\infty(X)$, а A — линейный непрерывный оператор в $C^\infty(X)$, то ясно, что $\sigma_A(x, \xi)$ также является бесконечно дифференцируемой функцией от ξ со значениями в $C^\infty(X)$, откуда $\sigma_A(x, \xi) \in \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$.

Записывая $u(x) \in C_0^\infty(X)$ с помощью формулы обращения преобразования Фурье в виде

$$u(x) = \int e_\xi(x)\, \hat{u}(\xi)\, đ\xi$$

и замечая, что интеграл сходится в топологии $C^\infty(X)$, мы видим, что

$$Au(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\, \sigma_A(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, đ\xi \tag{3.9}$$

или

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \sigma_A(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi \tag{3.10}$$

(интеграл понимается как повторный), что совпадает с соответствующей формулой для дифференциальных операторов.

Как показывают формулы (3.8) и (3.9), символ $\sigma_A(x, \xi)$ определяет оператор A и определяется им.

В дальнейшем будет доказано, что если $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$ и $\delta < \rho$, то $\sigma_A(x, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$, так что (3.10) можно будет понимать и как осциллирующий интеграл (интеграл (3.9) абсолютно сходится).

З а м е ч а н и е. Если A — любой ПДО в X, то часто его символом или полным символом называют символ $\sigma_{A_1}(x, \xi)$ такого собственного ПДО A_1 в X, что $A - A_1 \in L^{-\infty}$. В этом случае символ определен неоднозначно, хотя, как будет видно из дальнейшего, любые два символа отличаются на функцию $r(x, \xi) \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.

3.3. Асимптотические разложения в классах $S^m_{\rho,\delta}$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Пусть $a_j(x, \theta) \in S^{m_j}_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, $j = 1, 2, \ldots$, $m_j \to -\infty$ при $j \to +\infty$, и пусть задана функция $a(x, \theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$. Будем писать, что

$$a(x, \theta) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x, \theta),$$

если для любого целого $r \geqslant 2$

$$a(x, \theta) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j(x, \theta) \in S^{\bar{m}_r}_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n), \tag{3.11}$$

где $\bar{m}_r = \max\limits_{j \geqslant r} m_j$.

Отсюда, в частности, следует, что $a \in S^{\bar m_1}_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Предложение 3.5. *Если задана последовательность* $a_j \in S^{m_j}_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, $j = 1, 2, \ldots,$ *причем* $m_j \to -\infty$ *при* $j \to +\infty$, *то существует такая функция* $a(x, \theta)$, *что*

$$a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Далее, если другая функция a' *обладает тем же свойством* $a' \sim \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$, *то* $a - a' \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Докажем первое. Можно считать, что $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$. В самом деле, если это не так, то объединим первый член с несколькими последующими до последнего, имеющего порядок $\geqslant m_1$. Первый из оставшихся объединяем аналогичным образом и т. д. Пусть $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, где X_j — открытое подмножество в X, причем $K_j = \bar X_j \Subset X$ (т. е. K_j — компакт в X). Пусть $\varphi(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |\theta| \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{при} \quad |\theta| \geqslant 1. \end{cases}$$

Мы положим

$$a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta), \tag{3.12}$$

где t_j так быстро стремятся к $+\infty$ при $j \to +\infty$, что

$$\left| \partial_\theta^\alpha \, \partial_x^\beta \left[\varphi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta) \right] \right| \leqslant 2^{-j} \langle \theta \rangle^{m_{j-1} - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \tag{3.13}$$

при $x \in K_l$ и при $|\alpha| + |\beta| + l \leqslant j$. Покажем, что этого всегда можно добиться.

Заметим, что

$$\left| \partial_\theta^\alpha \, \varphi\left(\frac{\theta}{t}\right) \right| \leqslant C_\alpha \langle \theta \rangle^{-|\alpha|}, \quad t \geqslant 1, \tag{3.14}$$

где C_α не зависит от t, т. е. для $\varphi(\theta/t)$ при $t \geqslant 1$ выполнены оценки класса $S^0_{1,\,0}$ равномерно по t. В самом деле,

$$\partial_\theta^\alpha \varphi\left(\frac{\theta}{t}\right) = (\partial_\theta^\alpha \varphi)\left(\frac{\theta}{t}\right) \cdot t^{-|\alpha|} \quad \text{и} \quad |\theta| \leqslant t \leqslant 2|\theta|$$

при $\theta \in \operatorname{supp} \partial_\theta^\alpha \, \varphi(\theta/t)$, откуда и вытекает (3.14).

Далее, из (3.14) следует, что

$$\left|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\left[\varphi\Big(\frac{\theta}{t}\Big)\,a_j(x,\,\theta)\right]\right|\leqslant C_j\langle\theta\rangle^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

если $x\in K_l$, $t\geqslant 1$ и $|\alpha|+|\beta|+l\leqslant j$. Заметим теперь, что

$$\langle\theta\rangle^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\leqslant\varepsilon\langle\theta\rangle^{m_{j-1}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

при $\langle\theta\rangle^{m_{j-1}-m_j}\geqslant 1/\varepsilon$. Поэтому выбором t_j мы можем добиться выполнения (3.13). Из (3.13) следует сходимость ряда (3.12) вместе со всеми производными, равномерная на любом компакте $K\subset X$, и при любых фиксированных α, β и l получается, что

$$\left|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\left[\sum_{j=r+1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{\theta}{t_j}\Big)\,a_j(x,\,\theta)\right]\right|\leqslant 2^{-r}\langle\theta\rangle^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\qquad x\in K_l\,.$$

Поэтому $a-\sum\limits_{j=1}^{r}a_j\in S^{m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$. Так как $a_r\in S^{m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, то отсюда следует, что $a-\sum\limits_{j=1}^{r-1}a_j\in S^{m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, что и требовалось. ■

Следующее предложение облегчает проверку того, что $a\sim\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$.

П р е д л о ж е н и е 3.6. *Пусть $a_j\in S^{m_j}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, $m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$, $a\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$, причем для любого компакта $K\subset X$ и любых мультииндексов α, β существуют такие постоянные $\mu=\mu(\alpha,\,\beta,\,K)$ и $C=C(\alpha,\,\beta,\,K)$, что*

$$|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta a(x,\,\theta)|\leqslant C\langle\theta\rangle^{\mu},\qquad x\in K. \tag{3.15}$$

Далее, предположим, что для любого компакта $K\subset X$ существуют такая числовая последовательность $\mu_l=\mu_l(K)$, $l=1,\,2,\,\ldots$, и такой набор постоянных $C_l=C_l(K)$, что $\mu_l\to-\infty$ при $l\to+\infty$ и выполнены оценки:

$$\left|a(x,\,\theta)-\sum_{j=1}^{l-1}a_j(x,\,\theta)\right|\leqslant C_l\langle\theta\rangle^{\mu_l},\qquad x\in K. \tag{3.16}$$

Тогда $a\sim\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$.

Суть этого предложения в том, что вместо (3.11) оно позволяет проверять оценки остатка лишь для самих функций (а не для всех производных), если для производных $\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta a$ гарантированы довольно слабые оценки (3.15).

Доказательство опирается на следующую хорошо известную лемму.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f(t)$ имеет непрерывные производные $f'(t)$ и $f''(t)$ при $t \in [-1, 1]$. Положим*

$$A_j = \sup_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 2.$$

Тогда

$$|f'(0)|^2 \leqslant 4A_0(A_0 + A_2). \tag{3.17}$$

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$|f'(t) - f'(0)| \leqslant A_2 |t|.$$

Поэтому $|f'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$ при $A_2|t| \leqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$, $|t| \leqslant 1$. Обозначим $\Delta = \min\left\{\frac{|f'(0)|}{2A_2}, 1\right\}$, так что $|f'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$ при $t \in [-\Delta, \Delta]$. Имеем

$$2A_0 \geqslant |f(\Delta) - f(-\Delta)| \geqslant 2\Delta \cdot \frac{|f'(0)|}{2}.$$

Следовательно,

$$|f'(0)| \leqslant \frac{2A_0}{\Delta} = 2A_0 \max\left\{\frac{2A_2}{|f'(0)|}, 1\right\}.$$

Это означает, что либо $|f'(0)| \leqslant \frac{4A_0A_2}{|f'(0)|}$, либо $|f'(0)| \leqslant 2A_0$, т. е. либо $|f'(0)|^2 \leqslant 4A_0A_2$, либо $|f'(0)|^2 \leqslant 4A_0^2$, откуда и следует (3.17). ■

Лемма 3.2. *Пусть K_1, K_2 — два компакта в $\mathbb{R}^p$, причем $K_1 \subset \operatorname{Int} K_2$ (множество внутренних точек K_2). Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для любой функции f, бесконечно дифференцируемой в окрестности K_2, справедлива оценка*

$$\left(\sup_{x \in K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f(x)|\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{x \in K_2} |f(x)| \left(\sup_{x \in K_2} |f(x)| + \sup_{x \in K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f(x)|\right). \tag{3.18}$$

Доказательство немедленно получается из леммы 3.1.

Доказательство предложения 3.6. Пусть $b \sim \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ (такая функция b существует в силу предложения 3.5). Положим $d(x, \theta) = a(x, \theta) - b(x, \theta)$. Тогда для любого компакта $K \subset X$ выполняются оценки

$$|\partial_\theta^\alpha \, \partial_x^\beta d(x, \theta)| \leqslant C\langle\theta\rangle^\mu, \quad x \in K, \tag{3.19}$$

где C и μ зависят от α, β, K, и, кроме того,

$$|d(x,\theta)| \leqslant C_r\langle\theta\rangle^{-r}, \quad x\in K, \tag{3.20}$$

где $C_r = C_r(K)$.

Положим $d_\theta(x,\xi) = d(x,\theta+\xi)$. Тогда

$$\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta d_\theta(x,\xi)|_{\xi=0} = \partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta d(x,\theta).$$

Применим лемму 3.2, полагая $K_1 = K\times 0$, $K_2 = \hat K\times\{|\xi|\leqslant 1\}$, где $\hat K$ — такой компакт в X, что $\operatorname{Int}\hat K\supset K$. Тогда получим в силу (3.20)

$$\left(\sup_{x\in K}\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 1}\left|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta d(x,\theta)\right|\right)^2 \leqslant C\langle\theta\rangle^{-r}(\langle\theta\rangle^{-r}+\langle\theta\rangle^{\mu}),$$

где r может быть выбрано произвольно, μ зависит от α, β и K, а C, кроме того, еще и от r. Но отсюда следует, что при $x\in K$ и $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$ функция $\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta d(x,\theta)$ убывает при $|\theta|\to+\infty$ быстрее любой степени $\langle\theta\rangle$. Рассуждая по индукции, мы получим это же при любых α, β, что дает требуемое включение $d\in S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^N)$. ■

3.4. Выражение символа собственного ПДО через функцию $a(x,y,\xi)$. В этом пункте и во всех последующих мы считаем, что $\delta<\rho$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть A — собственный* ПДО, *заданный формулой* (2.18), *$\sigma_A(x,\xi)$ — его символ. Тогда*

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\,D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x}, \tag{3.21}$$

где асимптотическая сумма берется по всем мультииндексам α.

З а м е ч а н и е. Ясно, что $\partial_\xi^\alpha\,D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x}\in S_{\rho,\,\delta}^{m-(\rho-\delta)|\alpha|}$, так что асимптотическая сумма (3.21) имеет смысл.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.1. Заметим, что в силу предложения 3.2 можно считать, что функция $a(x,y,\xi)$ имеет собственный носитель. Формулу (3.8), определяющую символ $\sigma_A(x,\xi)$, можно тогда переписать в виде

$$\sigma_A(x,\xi) = \iint a(x,y,\theta)\,e^{i(x-y)\cdot\theta}e^{i(y-x)\cdot\xi}\,dy\,d\theta, \tag{3.22}$$

где интеграл понимается как повторный и имеет смысл, так как при каждом фиксированном x интегрирование по y ведется по компакту. Таким образом, если K — компакт в X, то в формуле (3.22) написан осциллирующий интеграл, зависящий от параметра $x\in K$. Сделаем в нем замену переменных $z = y - x$, $\eta = \theta - \xi$, чтобы упростить экспоненту:

$$\sigma_A(x,\,\xi) = \iint a(x,\,x+z,\,\xi+\eta)\,e^{-iz\cdot\eta}\,dz\,đ\eta. \tag{3.23}$$

Разложим $a(x,\,x+z,\,\xi+\eta)$ по η по формуле Тейлора в точке $\eta = 0$:

$$a(x,\,x+z,\,\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|\leqslant N-1} \partial_\xi^\alpha a(x,\,x+z,\,\xi)\,\frac{\eta^\alpha}{\alpha!} + r_N(x,\,x+z,\,\xi,\,\eta), \tag{3.24}$$

где

$$r_N(x,\,x+z,\,\xi,\,\eta) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N\eta^\alpha}{\alpha!} \int\limits_0^1 (1-t)^{N-1}\partial_\xi^\alpha a(x,\,x+z,\,\xi+t\eta)\,dt. \tag{3.25}$$

Заметим теперь, что

$$\iint \partial_\xi^\alpha a(x,\,x+z,\,\xi)\,\eta^\alpha e^{-iz\cdot\eta}\,dz\,đ\eta = \partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,\,x+z,\,\xi)|_{z=0}, \tag{3.26}$$

по формуле обращения Фурье. Это дает конечные члены в формуле (3.21).

Мы хотим теперь воспользоваться предложением 3.6. Получим вначале грубую оценку типа (3.15) для $\sigma_A(x,\,\xi)$. Для этого преобразуем (3.23) интегрированием по частям:

$$\sigma_A(x,\,\xi) = \iint e^{-iz\cdot\eta}\langle D_z\rangle^\nu a(x,\,x+z,\,\xi+\eta)\cdot\langle\eta\rangle^{-\nu}\,dz\,đ\eta, \tag{3.27}$$

где ν четно и неотрицательно.

Теперь, учитывая неравенство

$$\langle\xi+\eta\rangle \leqslant \langle\xi\rangle\cdot\langle\eta\rangle,$$

мы получим из (3.27), что

$$\left|\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\sigma_A(x,\,\xi)\right| \leqslant C\langle\xi\rangle^{p+\delta\nu}\int\langle\eta\rangle^{p-(1-\delta)\nu}\,d\eta,$$

где $p = \max(m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|,0)$, $x \in K$ и ν достаточно велико. Это и дает требуемые оценки производных от $\sigma_A(x,\,\xi)$ типа (3.15). Теперь остается оценить остаточный член.

Подставляя в (3.23) выражение r_N (3.25) вместо $a(x,\,x+z,\,\xi+\eta)$, поменяем местами интегрирование по t и интегрирование по z, η, и тогда получается, что нужно равномерно по $t \in (0,\,1]$ и $x \in K$ оценить интеграл

$$R_{\alpha,\,t}(x,\,\xi) = \iint e^{-iz\cdot n}\eta^\alpha\partial_\xi^\alpha a(x,\,x+z,\,\xi+t\eta)\,dz\,đ\eta,$$

где $|\alpha| = N$. Интегрируя по частям, мы получаем

$$R_{\alpha,t}(x,\xi) = \iint e^{-iz\cdot\eta}\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,\,x+z,\,\xi+t\eta)\,dz\,đ\eta. \tag{3.28}$$

Разобьем интеграл в (3.28) на две части:

$$R_{\alpha,t} = R'_{\alpha,t} + R''_{\alpha,t}, \tag{3.29}$$

где в $R'_{\alpha,t}$ интегрирование происходит по множеству $\{(z,\eta)\colon |\eta| \leqslant |\xi|/2\}$, а в $R''_{\alpha,t}$ — по его дополнению. Заметим, что если $|\eta| \leqslant |\xi|/2$, то $|\xi|/2 \leqslant |\xi + t\eta| \leqslant 3|\xi|/2$, а поскольку в $R'_{\alpha,t}$ объем области интегрирования по η не превосходит $C|\xi|^n$, то

$$|R'_{\alpha,t}(x,\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{m-(\rho-\delta)N+n}, \tag{3.30}$$

где C не зависит от ξ и от t.

Оценим теперь $R''_{\alpha,t}$. Проведем по z интегрирование по частям, пользуясь формулой

$$\langle\eta\rangle^{-\nu}\langle D_z\rangle^\nu e^{-iz\cdot\eta} = e^{-iz\cdot\eta},$$

где ν — неотрицательное четное число. Тогда $R''_{\alpha,t}$ представляется в виде конечной суммы слагаемых вида

$$R_{\alpha,\beta,t}(x,\xi) = \iint\limits_{|\eta|>|\xi|/2} e^{-iz\cdot\eta}\langle\eta\rangle^{-\nu}\partial_\xi^\alpha D_z^{\alpha+\beta} a(x,\,x+z,\,\xi+t\eta)\,dz\,đ\eta, \tag{3.31}$$

где $|\beta| \leqslant \nu$. При $|\eta| > |\xi|/2$ выражение $\partial_\xi^\alpha D_z^{\alpha+\beta} a(x,\,x+z,\,\xi+t\eta)$ оценивается по модулю через $C\langle\eta\rangle^{m-(\rho-\delta)N+\delta\nu}$ при $m-(\rho-\delta)N+\delta\nu \geqslant 0$ и через C при $m-(\rho-\delta)N+\delta\nu < 0$ (в обоих случаях C не зависит от ξ, η и t). Учитывая множитель $\langle\eta\rangle^{-\nu}$, мы получаем из (3.31) при достаточно большом ν

$$|R_{\alpha,\beta,t}(x,\xi)| \leqslant C \int\limits_{|\eta|>|\xi|/2} \langle\eta\rangle^{p-(1-\delta)\nu}\,d\eta,$$

где $p = \max\{m-(\rho-\delta)N,\,0\}$. Если $p-(1-\delta)\nu+n+1<0$, то отсюда следует, что

$$|R_{\alpha,\beta,t}(x,\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{p-(1-\delta)\nu+n+1}\int\langle\eta\rangle^{-n-1}\,d\eta \leqslant C\langle\xi\rangle^{p-(1-\delta)\nu+n+1}, \tag{3.32}$$

где C не зависит от x, ξ, t (при $x\in K$, $t\in(0,1]$). Выбирая большое ν, мы можем сделать в (3.32) показатель $p-(1-\delta)\nu+n+1$ отрицательным и сколь угодно большим по модулю.

Принимая во внимание (3.29) и (3.30), мы получаем для $R_{\alpha,t}$ оценку

$$|R_{\alpha,t}(x,\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{m-(\rho-\delta)N+n}, \quad x\in K, \quad t\in(0,1],$$

которая обеспечивает применимость предложения 3.6, что и требовалось. ■

З а м е ч а н и е. Метод доказательства теоремы 3.1 очень характерен для теории ПДО, и соответствующие рассуждения имеются во всех вариантах этой теории при любых способах ее изложения. Поэтому мы рекомендуем читателю тщательно разобраться в доказательстве этой ключевой теоремы.

3.5. Символ транспонированного оператора и дуальный символ. Транспонированный оператор ${}^tA$ определяется тем, что для $u, v\in C_0^\infty(X)$ должно иметь место тождество

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, {}^tAv\rangle, \tag{3.33}$$

где

$$\langle u, v\rangle = \int u(x)\,v(x)\,dx.$$

Поэтому, если оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ задается формулой (2.18), в которой $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$, то ${}^tA$ задается формулой

$${}^tAv(y) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\,a(x,y,\xi)\,v(x)\,dx\,đ\xi,$$

откуда заменой переменных $\eta=-\xi$ получается

$${}^tAv(y) = \iint e^{i(y-x)\cdot\eta}\,a(x,y,-\eta)\,v(x)\,dx\,đ\eta. \tag{3.34}$$

Отсюда видно, что ${}^tA\in L^m_{\rho,\delta}(X)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть A — собственный* ПДО, $\sigma_A(x,\xi)$ — *его символ*, $\sigma'_A(x,\xi)$ — *символ оператора* ${}^tA$. *Тогда*

$$\sigma'_A(x,\xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma_A(x,-\xi)/\alpha!. \tag{3.35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что оператор ${}^tA$ также является собственным (см. упражнение 3.3). Далее, вместо $a(x,y,\xi)$ в формулу (2.18), задающую действие A, можно подставить $\sigma_A(x,\xi)$ (см. (3.10)). Тогда (3.34) можно записать в виде

$${}^tAv(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_A(y,-\xi)\,v(y)\,dy\,đ\xi. \tag{3.36}$$

Это стандартная запись ПДО (см. (2.18)), в которой роль $a(x, y, \xi)$ играет $\sigma_A(y, -\xi)$). Остается воспользоваться теоремой 3.1. ■

Упражнение 3.4. Пусть A — собственный ПДО с символом $\sigma_A(x, \xi)$, A^* — «сопряженный» оператор, определяемый тем условием, что

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad u, v \in C_0^\infty(X),$$

где $(u, v) = \int\limits_X u(x)\overline{v(x)}\,dx$. Показать, что A^* — собственный ПДО и если $\sigma_A^*(x, \xi)$ — его символ, то

$$\sigma_A^*(x, \xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{\sigma_A(x, \xi)}/\alpha!, \tag{3.37}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Мы введем теперь *дуальный символ* $\tilde\sigma_A(x, \xi)$, полагая

$$\tilde\sigma_A(x, \xi) = \sigma'_A(x, -\xi). \tag{3.38}$$

Учитывая, что ${}^t({}^tA) = A$, мы получаем из (3.36), что оператор A записывается через дуальный символ $\tilde\sigma_A(x, \xi)$ по формуле

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\tilde\sigma_A(y, \xi)\,u(y)\,dy\,d\xi$$

или

$$(\widehat{Au})\,(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi}\,\tilde\sigma_A\,(y, \xi)\,u(y)\,dy. \tag{3.39}$$

Теорема 3.3. *Дуальный символ $\tilde\sigma_A(y, \xi)$ связан с символом $\sigma_A(y, \xi)$ асимптотической формулой*

$$\tilde\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_\alpha (-\partial_\xi)^\alpha D_x^\alpha \sigma_A(x, \xi)/\alpha!. \tag{3.40}$$

Доказательство очевидно из (3.38) и (3.35). ■

3.6. Формула композиции.

Теорема 3.4. *Пусть A, B — собственные* ПДО *в области $X \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma_A(x, \xi)$, $\sigma_B(x, \xi)$ — их символы. Рассмотрим их композицию $C = B \circ A$. Тогда C — собственный* ПДО, *символ которого $\sigma_{BA}(x, \xi)$ удовлетворяет условию*

$$\sigma_{BA}(x, \xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha \sigma_B(x, \xi)\cdot D_x^\alpha \sigma_A(x, \xi)/\alpha!. \tag{3.41}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (3.39) для оператора A и формулой (3.9), примененной к оператору B, получаем

$$Cu(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_B(x, \xi)\,\tilde\sigma_A(y, \xi)\,u(y)\,dy\,d\xi.$$

Отсюда видно, что если $A\in L^{m_1}_{\rho,\,\delta}(X)$ и $B\in L^{m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$, то $C\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X)$. Далее, аналогично получается, что ${}^tC={}^tA\circ{}^tB\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$. Тот факт, что ПДО C является собственным, вытекает теперь из предложения 3.4. Остается вычислить символ $\sigma_{BA}(x,\,\xi)$, пользуясь теоремами 3.1 и 3.3.

Имеем

$$\sigma_{BA}(x,\,\xi)\sim\sum_{\alpha}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\big[\sigma_B(x,\,\xi)\,\tilde\sigma_A(y,\,\xi)\big]/\alpha!\,\big|_{y=x}=$$

$$=\sum_{\alpha}\partial_\xi^\alpha\big[\sigma_B(x,\,\xi)\,D_x^\alpha\tilde\sigma_A(x,\,\xi)\big]/\alpha!\sim$$

$$\sim\sum_{\alpha,\,\beta}\partial_\xi^\alpha\big[\sigma_B(x,\,\xi)\,(-\partial_\xi)^\beta\,D_x^{\alpha+\beta}\sigma_A(x,\,\xi)\big]/\alpha!\,\beta!. \quad (3.42)$$

Теперь сформулируем две хорошо известные алгебраические леммы.

Л е м м а 3.3 (формула Лейбница). *Пусть $f(x)$, $g(x)$ — гладкие функции в области $X\subset\mathbb{R}^n$, а α — мультииндекс. Тогда*

$$\partial^\alpha(f(x)\,g(x))=\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\,\delta!}\,[\partial^\gamma f(x)]\,[\partial^\delta g(x)]. \quad (3.43)$$

Л е м м а 3.4 (бином Ньютона). *Пусть $x,\,y\in\mathbb{R}^n$ и α — мультииндекс. Тогда*

$$(x+y)^\alpha=\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\,\delta!}\,x^\gamma y^\delta. \quad (3.44)$$

У п р а ж н е н и е 3.5. Доказать леммы 3.3 и 3.4.

У к а з а н и е. Формула (3.44) может быть доказана по индукции или из формулы Тейлора для многочленов. Формула (3.43) получается из (3.44), если заметить, что

$$\partial^\alpha[f(x)\,g(x)]=\{(\partial_x+\partial_y)^\alpha\,[f(x)\,g(y)]\}|_{y=x}.$$

О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 3.4. Преобразуем теперь (3.42), пользуясь леммой 3.3. Получим тогда

$$\sigma_{BA}(x,\,\xi)\sim\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma,\delta\\ \gamma+\delta=\alpha}}[\partial_\xi^\gamma\,\sigma_B(x,\,\xi)]\,[(-\partial_\xi)^\beta(\partial_\xi^\delta\,D_x^{\alpha+\beta}\sigma_A(x,\,\xi))]/\gamma!\,\beta!\,\delta!=$$

$$=\sum_{\beta,\,\gamma,\,\delta}(-1)^{|\beta|}[\partial_\xi^\gamma\,\sigma_B(x,\,\xi)]\,[\partial_\xi^{\beta+\delta}\,D_x^{\beta+\gamma+\delta}\sigma_A(x,\,\xi)]/\beta!\,\gamma!\,\delta!=$$

$$=\sum_{\gamma}\sum_{\kappa}\left(\sum_{\beta+\delta=\kappa}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\delta!}\right)[\partial_\xi^\gamma\,\sigma_B(x,\,\xi)]\,[\partial_\xi^\kappa\,D_x^{\kappa+\gamma}\sigma_A(x,\,\xi)]/\gamma!\,. \quad (3.45)$$

Теперь из формулы (3.44) с $x=-y=e$, где $e=(1, 1, \ldots, 1)$, и $\alpha=\varkappa$ получаем

$$\delta^0_{|\varkappa|}=(e-e)^\varkappa=\sum_{\beta+\delta=\varkappa}\frac{\varkappa!}{\beta!\,\delta!}\,e^\delta(-e)^\beta=\varkappa!\sum_{\beta+\delta=\varkappa}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\delta!},$$

где $\delta^0_{|\varkappa|}$ — символ Кронекера, равный 1 при $\varkappa=0$ и 0 при $|\varkappa|>0$. Благодаря этому соотношению в (3.45) остаются лишь слагаемые с $\varkappa=0$, что и доказывает (3.41). ■

Следствие 3.1. *Пусть* $A\in L^{m_1}_{\rho,\,\delta}(X)$, $B\in L^{m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ *и оператор* B — *собственный. Тогда операторы* $A\circ B$ *и* $B\circ A$, *рассматриваемые как операторы из* $C_0^\infty(X)$ *в* $C^\infty(X)$, *принадлежат* $L^{m_1+m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$.

Доказательство. Разложим A в сумму $A=A_1+R$, где оператор A_1 — собственный, а R имеет ядро $R(x, y)\in C^\infty(X\times X)$. Легко проверить, что операторы BR и RB имеют гладкие ядра, равные, соответственно, $B_x R(x, y)$ и ${}^tB_y R(x, y)$, где B_x — оператор B, применяемый по переменной x при фиксированном y, и аналогичный смысл имеет ${}^tB_y$. Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 3.4. ■

3.7. Классические символы и псевдодифференциальные операторы. Иногда удобно рассматривать более узкие классы ПДО. Один из таких классов, выдерживающий большинство необходимых операций, мы сейчас опишем.

Определение 3.5. *Классическим символом* называется такая функция $a(x, \theta)\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$, что при некотором комплексном m имеет место асимптотическое разложение

$$a(x, \theta)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\psi(\theta)\,a_{m-j}(x, \theta),$$

где $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi(\theta)=0$ при $|\theta|\leqslant 1/2$, $\psi(\theta)=1$ при $|\theta|\geqslant 1$, а $a_{m-j}(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка $m-j$, т. е. $a_{m-j}(x, t\theta)=$ $=t^{m-j}a_{m-j}(x, \theta)$ при всех $t>0$ и $(x, \theta)\in X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$. Класс всех символов, обладающих этим свойством, мы будем обозначать $CS^m(X\times\mathbb{R}^N)$. Через $CL^m(X)$ мы будем обозначать класс ПДО, которые могут быть заданы в виде (2.18) с $a(x, y, \xi)\in CS^m(X\times X\times\mathbb{R}^n)$. Такие ПДО мы будем называть *классическими* ПДО.

Если $a_k(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка k, то $\partial^\alpha_\theta\partial^\beta_x a_k(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка $k-|\alpha|$. Поэтому ясно, что $CS^m(X\times\mathbb{R}^N)\subset S^{\mathrm{Re}\ m}(X\times\mathbb{R}^N)$.

Предложение 3.7.

а) *Если* $A \in CL^m(X)$ *и* A *собственный, то* $\sigma_A(x, \xi) \in CS^m(X \times \mathbb{R}^n)$.

б) *Если* $A \in CL^{m_1}(X)$, $B \in CL^{m_2}(X)$ *и* A, B — *собственные* ПДО, *то* $BA \in CL^{m_1+m_2}(X)$.

в) *Если* $A \in CL^m(X)$, *то* ${}^tA \in CL^m(X)$ *и* $A^* \in CL^m(X)$.

Доказательство непосредственно получается из теорем 3.1—3.4. ■

Таким образом, класс всех классических ПДО выдерживает взятие композиции, сопряженного и транспонированного операторов. В дальнейшем будет показано, что он выдерживает также замену переменных, взятие параметрикса эллиптического оператора (см. § 5) и комплексных степеней эллиптического оператора.

3.8. Упражнения и задачи.

Упражнение 3.6. Доказать следующее обобщение формулы Лейбница (3.43): если $p(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $p(x, D)$ — соответствующий дифференциальный оператор, то

$$p(x, D)\,(f(x)\,g(x)) = \sum_\alpha [p^{(\alpha)}(x, D)\,f(x)]\,[D^\alpha g(x)]/\alpha!, \tag{3.46}$$

где $p^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)$.

Упражнение 3.7. Вывести теорему 3.4 для дифференциальных операторов из результата упражнения 3.6.

Упражнение 3.8. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — n-мерные векторы, α — n-мерный мультииндекс. Доказать, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}. \tag{3.47}$$

Вывести отсюда, что

$$\partial^\alpha [f_1(x) \ldots f_k(x)] = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} (\partial^{\alpha_1} f_1)(x) \ldots (\partial^{\alpha_k} f_k)(x). \tag{3.48}$$

Упражнение 3.9. Пусть дана функция $a(x, \xi) \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$, где X — область в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует такой собственный ПДО A в X, что $a - \sigma_A \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Указание. Рассмотреть оператор, заданный формулой (2.18), взяв $a(x, y, \xi) = \chi(x, y)\,a(x, \xi)$, где функция $\chi(x, y)$ такая же, как в доказательстве предложения 3.3.

Упражнение 3.10. Вывести из упражнения 2.4 и 3.9, что операция взятия символа определяет (при $\delta < \rho$) изоморфизм

$$L^m_{\rho,\,\delta}(X)/L^{-\infty}(X) \xrightarrow{\sim} S^m_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n).$$

Задача 3.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ оператор

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi, \tag{3.49}$$

где $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{3.50}$$

Предположим, что $\rho > 0$, а $\delta < 1$. Придать смысл интегралу (3.49) в следующих двух ситуациях: т. е. $|\partial_x^\alpha u(x)| \leqslant C_\alpha$ для любого мультииндекса α. Показать, что A определяет непрерывные отображения в себя пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Показать, что символ $a(x, \xi)$ однозначно определен действием A на $S(\mathbb{R}^n)$ или $C_b^\infty(R^n)$.

З а д а ч а 3.2. Показать, что операторы описанного в задаче 3.1 вида образуют алгебру с инволюцией, и получить асимптотические формулы для символов композиции двух операторов, транспонированного и сопряженного операторов.

З а д а ч а 3.3. Пусть $K(x, z) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ и $K(x, z)$ положительно однородна по z порядка $-n$, причем

$$\int\limits_{|z|=1} K(x, z)\, dS_z = 0 \tag{3.51}$$

(интеграл по поверхности сферы $|z| = 1$). Доказать, что для $u \in C_0^\infty(X)$ существует предел

$$Au(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| \geqslant \varepsilon} K(x, x-y)\, u(y)\, dy, \tag{3.52}$$

определяющий ПДО $A \in CL^0(X)$.

Оператор A, определяемый формулой (3.52) (при условии (3.51)), называется *сингулярным интегральным оператором*. Таким образом, этот оператор является частным случаем ПДО.

З а м е ч а н и е. Решение задачи 3.2 можно найти в одной из работ Кумано-го [1]—[3], а решение задачи 3.3 можно извлечь из книги Михлина [1]. Решение этих задач довольно трудоемко, однако очень полезно для понимания теории ПДО.

§ 4. Замена переменной и псевдодифференциальные операторы на многообразиях

4.1. Действие замены переменной на ПДО. Пусть дан диффеоморфизм $\varkappa\colon X \to X_1$ области $X \subset \mathbb{R}^n$ на другую область $X_1 \subset \mathbb{R}^n$. Индуцированное отображение $\varkappa^*\colon C^\infty(X_1) \to C^\infty(X)$, переводящее функцию u в функцию $u \circ \varkappa$, является изоморфизмом и отображает $C_0^\infty(X_1)$ в $C_0^\infty(X)$. Пусть A — ПДО в X. Определим оператор

$A_1: C_0^\infty(X_1) \to C^\infty(X_1)$ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(X) & \xrightarrow{A} & C^\infty(X) \\ {\scriptstyle\varkappa^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varkappa^*} \\ C_0^\infty(X_1) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(X_1) \end{array}$$

Если $\varkappa_1 = \varkappa^{-1}$, то

$$A_1 u = [A(u \circ \varkappa)] \circ \varkappa_1. \tag{4.1}$$

Пусть оператор A задан формулой (2.18). Тогда

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(\varkappa_1(x)-y)\cdot\xi}\, a(\varkappa_1(x),\, y,\, \xi)\, u(\varkappa(y))\, dy\, đ\xi,$$

и, полагая $y = \varkappa_1(z)$, получаем

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(\varkappa_1(x)-\varkappa_1(z))\cdot\xi}\, a(\varkappa_1(x),\, \varkappa_1(z),\, \xi)\, |\det \varkappa_1'(z)|\, u(z)\, dz\, đ\xi, \tag{4.2}$$

где $\varkappa_1'(z)$ — матрица Якоби отображения $\varkappa_1$. Отсюда видно, что A_1 — ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x,\, y,\, \theta) = (\varkappa_1(x) - \varkappa_1(y))\cdot\theta$. Мы покажем, что при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ оператор A_1 — ПДО. Этот факт очевидным образом вытекает из следующей более общей теоремы.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть Φ — такая фазовая функция в $X \times X \times \mathbb{R}^n$, что*

1) *$\Phi(x,\, y,\, \theta)$ линейна по θ;*
2) *$\Phi'_\theta(x,\, y,\, \theta) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

Пусть A_1 — ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x,\, y,\, \theta)$ и $a(x,\, y,\, \theta) \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ (см. формулу (2.1))*, причем*

$$1-\rho \leqslant \delta < \rho. \tag{4.3}$$

Тогда $A_1 \in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$.

Для доказательства понадобится

Л е м м а 4.1. *Пусть фазовая функция Φ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 4.1. Тогда существуют такие окрестность Ω диагонали $\Delta \subset X \times X$ и C^∞-отображение $\psi\colon \Omega \to GL(n, \mathbb{R})$ (невырожденная матричная функция $\psi(x,\, y)$), что*

$$\Phi(x,\, y,\, \psi(x,\, y)\,\xi) = (x-y)\cdot\xi, \qquad (x,\, y) \in \Omega. \tag{4.4}$$

При этом

$$\det \psi(x,\, x) \cdot \det \Phi''_{x\theta}(x,\, y,\, \theta)|_{y=x} = 1. \tag{4.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\Phi(x,\, y,\, \theta) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x,\, y)\, \theta_j, \tag{4.6}$$

причем $\Phi_j(x,\, x) = 0$ и если $\Phi_j(x,\, y) = 0$, $j = 1,\, \ldots,\, n$, то $x = y$. Далее,

$$\Phi'_{x,\,\theta} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1}\, \theta_j,\, \ldots,\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_n}\, \theta_j,\, \Phi_1,\, \ldots,\, \Phi_n \right).$$

Заметим, что дифференцирование по x соотношения $\Phi(x,\, x,\, \theta) = 0$ показывает, что $\Phi'_y|_{x=y} = -\Phi'_x|_{x=y}$. Но по определению фазовой функции $\Phi'_{x,\,y,\,\theta} \neq 0$ при $\theta \neq 0$. Так как $\Phi'_\theta(x,\, x,\, \theta) = 0$, то должно быть $\Phi'_x(x,\, x,\, \theta) \neq 0$, т. е. при любом $\theta \neq 0$ существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant n$, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\Big|_{x=y} \cdot \theta_j \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\det\, \left(\frac{\partial \Phi_j(x,\, y)}{\partial x_k} \right)\Big|_{x=y} \neq 0. \tag{4.7}$$

По лемме Адамара при близких x и y

$$\Phi_j(x,\, y) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kj}(x,\, y)\, (x_k - y_k),$$

где $\Phi_{kj} \in C^\infty(\Omega')$, Ω' — некоторая окрестность диагонали в $X \times X$; при этом

$$\Phi_{kj}(x,\, x) = \frac{\partial \Phi_j(x,\, y)}{\partial x_k}\Big|_{x=y}. \tag{4.8}$$

Если через $\Phi(x,\, y)$ обозначить матрицу $(\Phi_{kj}(x,\, y))_{k,\,j=1}^{n}$, то из (4.7) и (4.8) следует, что существует такая окрестность Ω диагонали в $X \times X$, что $\det\, \Phi(x,\, y) \neq 0$ при $(x,\, y) \in \Omega$. Положим

$$\psi(x,\, y) = \Phi(x,\, y)^{-1}. \tag{4.9}$$

Ввиду того, что

$$\Phi(x,\, y,\, \theta) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \Phi_{kj}(x,\, y)\, \theta_j\, (x_k - y_k) = (x - y) \cdot (\Phi(x,\, y)\, \theta),$$

и полагая $\Phi(x,\, y)\, \theta = \xi$, мы получаем, очевидно, формулу (4.4). Формула (4.5) вытекает из (4.8) и (4.9). ■

Доказательство теоремы 4.1. В силу предложения 2.1 и упражнения 2.4 можно считать, что оператор A задается формулой (2.1), в которой $a(x,\, y,\, \theta) = 0$ при $(x,\, y) \notin \Omega'$, где Ω' — любая окрестность диагонали. Делая в интеграле (2.1) замену переменной $\theta = \psi(x, y)\,\xi$, мы получим тогда

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, a(x, y, \psi(x, y)\,\xi)\,|\det \psi(x, y)|\, u(y)\, dy\, d\xi. \quad (4.10)$$

Остается заметить, что условие (4.3) обеспечивает для $a_1(x, y, \xi) = a(x, y, \psi(x, y)\,\xi)$ включение $a_1(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ в силу леммы 1.2. ■

4.2. Формула преобразования символа.

Теорема 4.2. *Пусть дан диффеоморфизм* $\varkappa\colon X \to X_1$ *и собственный* ПДО $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, *причем* $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. *Пусть оператор* A_1 *построен по формуле* (4.1). *Тогда*

$$\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\varkappa(x)} \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\sigma_A^{(\alpha)}(x, {}^t\varkappa'(x)\,\eta)\cdot D_z^\alpha e^{i\varkappa_x''(z)\cdot\eta}\Big|_{z=x}, \quad (4.11)$$

где $\sigma_A^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \sigma_A(x, \xi)$, *а* $\varkappa_x''(z)$ *задается формулой*

$$\varkappa_x''(z) = \varkappa(z) - \varkappa(x) - \varkappa'(x)\,(z - x). \quad (4.12)$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что функция $\varkappa_x''(z)$ имеет при $z = x$ нуль второго порядка. Поэтому, если обозначить

$$\Phi_\alpha(x, \eta) = D_z^\alpha\, e^{i\varkappa_x''(z)\cdot\eta}\big|_{z=x}, \quad (4.13)$$

то $\Phi_\alpha(x, \eta)$ — многочлен по η степени не больше $|\alpha|/2$. Принимая во внимание лемму 1.2, мы видим, что

$$\sigma_A^{(\alpha)}(x, {}^t\varkappa'(x)\,\eta)\ D_z^\alpha e^{i\varkappa_x''(z)\cdot\eta}\big|_{z=x} \in S^{m-(\rho-1/2)|\alpha|}_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n).$$

Но из условия $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ вытекает, что $\rho > 1/2$, так что асимптотическая сумма (4.11) действительно имеет смысл.

Для доказательства формулы (4.11) мы воспользуемся формулой (4.2), беря в ней $a(x, y, \theta) = \sigma_A(x, \theta)$. Пользуясь преобразованием, описанным в доказательстве теоремы 4.1, мы получим из нее, что

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\eta}\, \sigma_A(\varkappa_1(x), \psi(x, y)\,\eta)\, D(x, y)\, u(y)\, dy\, d\!\!{}^-\eta, \quad (4.14)$$

где $D(x, y) = |\det \varkappa_1'(x)|\,|\det \psi(x, y)|$. По теореме 3.1 мы имеем

$$\sigma_{A_1}(x, \eta) \sim \sum_\alpha \partial_\eta^\alpha D_y^\alpha\, [\sigma_A(\varkappa_1(x), \psi(x, y)\,\eta)\, D(x, y)]/\alpha!\,|_{y=x}. \quad (4.15)$$

Из членов с мультииндексом α получится (до подстановки $y = x$) сумма членов вида

$$c(x, y)\,\eta^\gamma \sigma_A^{(\beta)}(\varkappa_1(x), \psi(x, y)\,\eta), \quad (4.16)$$

где $c(x, y)$ зависит только от замены переменных (но не зависит от A). При этом для мультииндексов γ и β в (4.16) выполнены оценки

$$|\beta| \leqslant 2|\alpha|, \tag{4.17}$$

$$|\gamma| + |\alpha| \leqslant |\beta|. \tag{4.18}$$

В самом деле, оценка (4.17) очевидна, а оценка (4.18) следует из того, что оператор D_y, примененный к выражению вида (4.16), не меняет $|\beta| - |\gamma|$, а оператор ∂_η увеличивает $|\beta| - |\gamma|$ на 1.

Из (4.17) и (4.18) имеем

$$|\gamma| \leqslant |\beta| - |\alpha| \leqslant |\beta| - |\beta|/2 = |\beta|/2. \tag{4.19}$$

Отметим теперь, что из формулы (4.9), примененной для $\Phi(x, y, \theta) = (\varkappa_1(x) - \varkappa_1(y)) \cdot \theta$, вытекает, что $\psi(x, x) = ({}^t\varkappa_1'(x))^{-1}$.

Теперь произведем в (4.15) группировку членов вида (4.16), собирая вместе все члены с одинаковыми β. Получим тогда

$$\sigma_{A_1}(x, \eta) \sim \sum_\beta \sigma_A^{(\beta)}(\varkappa_1(x), ({}^t\varkappa_1'(x))^{-1}\eta)\, \Psi_\beta(x, \eta)/\beta!, \tag{4.20}$$

где $\Psi_\beta(x, \eta)$ — полиномы по η степени не выше $|\beta|/2$ (с коэффициентами из $C^\infty(X_1)$), не зависящие от A. При этом $\Psi_0 \equiv 1$.

Заменяя в (4.20) x на $\varkappa(x)$, мы получим, очевидно, эквивалентную формулу:

$$\sigma_{A_1}(\varkappa(x), \eta) \sim \sum_\beta \sigma_A^{(\beta)}(x, {}^t\varkappa'(x)\, \eta)\, \Phi_\beta(x, \eta)/\beta!, \tag{4.21}$$

в которой $\Phi_\beta(x, \eta)$ — полиномы по η степени не выше $|\beta|/2$ (с коэффициентами из $C^\infty(X)$), не зависящие от A, причем $\Phi_0 \equiv 1$. Остается проверить, что эти полиномы задаются формулой (4.13).

Будем вычислять полиномы $\Phi_\beta(x, \eta)$ с помощью дифференциальных операторов. Для дифференциального оператора A имеем

$$\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\varkappa(x)} = e^{-iy\cdot\eta} A_1 e^{iy\cdot\eta}|_{y=\varkappa(x)} = e^{-i\varkappa(z)\cdot\eta} \sigma_A(z, D_z)\, e^{i\varkappa(z)\cdot\eta}|_{z=x} \tag{4.22}$$

(здесь $\sigma_A(z, D_z)$ означает оператор A, действующий по переменной z). Напишем теперь

$$\varkappa(z) = \varkappa(x) + \varkappa'(x)\,(z - x) + \varkappa_x''(z),$$

откуда

$$\varkappa(z) \cdot \eta = \varkappa(x) \cdot \eta + z \cdot {}^t\varkappa'(x)\, \eta + \varkappa_x''(z) \cdot \eta - x \cdot {}^t\varkappa'(x)\, \eta.$$

Подставляя в формулу (4.22), получаем

$$\sigma_{A_1}(y,\,\eta)\big|_{y=\varkappa(x)} = e^{-x\cdot{}^t\varkappa'(x)\eta}\,\big\{\sigma_A(z,\,D_z)\big[\,e^{iz\cdot{}^t\varkappa'(x)\eta}e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\big]\big\}\big|_{z=x}. \quad (4.23)$$

Воспользуемся теперь формулой Лейбница (3.46) (упражнение 3.6) для дифференцирования произведения двух экспонент в (4.23). Тогда получим, очевидно,

$$\sigma_{A_1}(\varkappa(x),\,\eta) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\sigma_A^{(\alpha)}(x,\,{}^t\varkappa'(x)\,\eta)\cdot D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\big|_{z=x} \qquad (4.24)$$

(мы воспользовались здесь еще очевидной формулой дифференцирования линейной экспоненты: $\sigma_A(z,\,D_z)\,e^{iz\cdot\xi} = e^{iz\cdot\xi}\,\sigma_A(z,\,\xi)$).

Формула (4.24) означает справедливость для дифференциальных операторов формулы (4.13) для полиномов $\Phi_\alpha(x,\,\eta)$, входящих в (4.21). Но ввиду универсальности полиномов $\Phi_\alpha(x,\,\eta)$ она же верна и в общем случае. ■

Примеры. $\Phi_0\equiv 1$, $\Phi_\beta = 0$ при $|\beta|=1$, $\Phi_\beta(x,\,\eta) = D_x^\beta(i\varkappa(x)\cdot\eta)$ при $|\beta|=2$.

Следствие 4.1.

$$\sigma_{A_1}(y,\,\eta) - \sigma_A(\varkappa_1(y),\,({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta) = S^{m-2(\rho-1/2)}_{\rho,\,\delta}(X_1\times\mathbb{R}^n). \qquad (4.25)$$

Это утверждение показывает, что по модулю символов меньшего порядка символы всех операторов, получаемых из A заменами переменных, образуют корректно определенную функцию на кокасательном расслоении T^*X.

Следствие 4.2. *Если* $A\in CL^m(X)$, *то* $A_1\in CL^m(X_1)$.

Доказательство непосредственно получается из формул (4.11). ■

4.3. Псевдодифференциальные операторы на многообразии. Пусть M — n-мерное гладкое многообразие (класса C^∞). Через $C^\infty(M)$ и $C_0^\infty(M)$ мы будем обозначать пространство всех гладких комплекснозначных функций на M и его подпространство, состоящее из функций с компактным носителем. Предположим, что дан линейный оператор

$$A\colon C_0^\infty(M)\to C^\infty(M).$$

Если X — некоторая координатная окрестность в M (не обязательно связная) и $\varkappa\colon X\to X_1$ — ее диффеоморфизм на открытое множество $X_1\subset\mathbb{R}^n$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} C_0^\infty(X) \arrow[r, "A"] & C^\infty(X) \\ C_0^\infty(X_1) \arrow[u, "\varkappa^*"] \arrow[r, "A_1"] & C^\infty(X_1) \arrow[u, "\varkappa^*"'] \end{tikzcd}$$

однозначно определяет оператор A_1 (отметим, что в верхней ее строчке стоит оператор, равный композиции $r_X \circ A \circ i_X$, где i_X — естественное вложение $i_X\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(M)$, а r_X — естественное ограничение $r_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(X)$; для простоты мы обозначаем этот оператор той же буквой A, что и исходный оператор).

Определение 4.1. Оператор $A\colon C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ называется *псевдодифференциальным оператором на* M, если для любого координатного диффеоморфизма $\varkappa\colon X \to X_1$ определенный выше оператор A_1 является ПДО в X_1.

Теорема 4.1 показывает, что введенные выше ПДО в области $X \subset \mathbb{R}^n$ при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ действительно являются ПДО на многообразии X.

Далее, лемма 1.2 показывает, что при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ корректно определен класс символов $S^m_{\rho,\,\delta}(T^*M)$ и соответствующий класс операторов $L^m_{\rho,\,\delta}(M)$, а следствие 4.1 показывает, что корректно определен *главный символ*, являющийся элементом факторпространства $S^m_{\rho,\,\delta}(T^*M)/S^{m-2(\rho-1/2)}_{\rho,\,\delta}(T^*M)$.

Далее, в силу теоремы 4.2 корректно определен класс $CL^m(M)$ классических ПДО на M. Если $A \in CL^m(M)$, то главный символ оператора A можно считать однородной функцией $\sigma_A(x,\,\xi)$ на T^*M порядка однородности m, ибо если две функции $a_1(x,\,\xi)$ и $a_2(x,\,\xi)$ положительно однородны по ξ при $|\xi| \geqslant 1$ порядка m и определяют один и тот же класс вычетов пространства $S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ по модулю $S^{m-1}(X \times \mathbb{R}^n)$, то они совпадают при $|\xi| \geqslant 1$.

Заметим в заключение, что существенно разрешать в определении 4.1 употребление несвязных координатных окрестностей, ибо иначе придется считать псевдодифференциальным оператор отражения $f(x) \mapsto f(-x)$ в $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Упражнение 4.1. Доказать, что ПДО A на многообразии M продолжается по непрерывности до отображения

$$A\colon \mathscr{E}'(M) \to \mathscr{D}'(M),$$

где $\mathscr{E}'(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ означают пространства, дуальные к пространствам соответственно всех гладких и гладких финитных сечений одномерного расслоения плотностей $|\Lambda^n(T^*M)|$ *).

*) Это расслоение можно определить, например, выбрав покрытие M координатными картами, считая его тривиальным над каждой координатной окрестностью и задавая функции перехода равными модулю якобиана координатных преобразований. Сечения расслоения плотностей можно интегрировать по многообразию, чего нельзя сказать о внешних n-формах, для интегрирования которых необходимо задание ориентации (т. е., по существу, задание изоморфизма $\Lambda^n(T^*M)$ и $|\Lambda^n(T^*M)|$). Если на M фиксирована некоторая гладкая положительная плотность,

Вложение $C^\infty(M) \hookrightarrow \mathscr{D}'(M)$, индуцирующее вложение $C_0^\infty(M) \hookrightarrow \mathscr{E}'(M)$, φ — естественным образом определяется формулой

$$\langle u, \varphi\rangle = \int\limits_M u \cdot \varphi, \tag{4.26}$$

где $u \in C^\infty(M)$, φ — гладкая финитная плотность (так что $u \cdot \varphi$ — это также гладкая финитная плотность). Проверить свойство псевдолокальности оператора A.

Упражнение 4.2. Пусть E, F — гладкие векторные расслоения на многообразии M; $\pi\colon T^*M \to M$ — естественная проекция; π^*E, π^*F — индуцированные расслоения на T^*M. Дать определение ПДО $A\colon C_0^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ ($C_0^\infty(M, E)$ — гладкие финитные сечения расслоения E; $C^\infty(M, F)$ — гладкие сечения расслоения F) и показать, что его главный символ — корректно определенный элемент пространства

$$S^m_{\rho,\,\delta}(\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))/S^{m-2(\rho-1/2)}_{\rho,\,\delta}(\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)).$$

Задача 4.1. Пусть A — дифференциальный оператор порядка m на многообразии M (такой оператор $A_1\colon C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$, что всякий оператор $A\colon C_0^\infty(X_1) \to C_0^\infty(X_1)$, определенный выше, является дифференциальным оператором порядка m). Дать инвариантное определение главного символа $a_m(x, \xi)$ как функции на T^*M, являющейся однородным многочленом по ξ (т. е. вдоль слоев) степени m.

Указание. Воспользоваться формулой

$$a_m(x, \varphi'_x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-m} e^{-i\lambda\varphi} A(e^{i\lambda\varphi}), \quad \varphi \in C^\infty(M). \tag{4.27}$$

Задача 4.2. Вычислить главный символ оператора d внешнего дифференцирования де Рама:

$$d\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M),$$

где $\Lambda^k(M)$ означает пространство гладких внешних k-форм на M ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Задача 4.3. Доказать, что одномерный сингулярный интегральный оператор на гладкой замкнутой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$Au(t) = a(t)\, u(t) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|t-\tau| \geqslant \varepsilon} \frac{K(t, \tau)}{t - \tau}\, u(\tau)\, d\tau, \quad t, \tau \in \Gamma,$$

при $a(t) \in C^\infty(\Gamma)$, $K(t, \tau) \in C^\infty(\Gamma \times \Gamma)$ является классическим ПДО из $CL^0(\Gamma)$.

то она задает изоморфизм расслоений $|\Lambda^n(T^*M)|$ и $M \times \mathbb{R}^1$, что позволяет рассматривать функции как плотности и считать элементы $\mathscr{E}'(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ функционалами на функциях.

§ 5. Гипоэллиптичность и эллиптичность

5.1. Определение гипоэллиптических символов и операторов и примеры.

Определение 5.1. Функция $\sigma(x,\xi)\in C^{\infty}(X\times\mathbb{R}^n)$, где X — область в $\mathbb{R}^n$, называется *гипоэллиптическим символом*, если выполнены следующие условия:

а) существуют такие вещественные числа m_0, m, что для любого компакта $K\subset X$ найдутся такие положительные постоянные R, C_1, C_2, что

$$C_1|\xi|^{m_0}\leqslant|\sigma(x,\xi)|\leqslant C_2|\xi|^m,\quad |\xi|\geqslant R,\quad x\in K; \tag{5.1}$$

б) существуют такие числа ρ и δ, что $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, и для любого компакта $K\subset X$ существует такая постоянная R, что для любых мультииндексов α, β найдутся такие постоянные $C_{\alpha,\beta,K}$, что

$$|[\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)]\;\sigma^{-1}(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,K}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\quad |\xi|\geqslant R,\quad x\in K. \tag{5.2}$$

Класс символов, удовлетворяющих условиям (5.1) и (5.2) с фиксированными m, m_0, ρ и δ мы будем обозначать $HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$ или просто $HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$, если ясно (или безразлично), о какой области X идет речь. Из (5.1) и (5.2) очевидным образом следует, что

$$HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)\subset S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n).$$

Через $HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$ мы будем обозначать класс собственных ПДО A в области X, для которых $\sigma_A(x,\xi)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$.

Определение 5.2. ПДО A называется *гипоэллиптическим*, если существует такой собственный ПДО $A_1\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$, что $A=A_1+R_1$, где $R_1\in L^{-\infty}(X)$, т. е. R_1 — оператор с бесконечно дифференцируемым ядром.

Отметим, что для любого представления гипоэллиптического оператора A в виде $A=A_1+R_1$, где A_1 — собственный ПДО, а R_1 оператор с гладким ядром, верно, что $A_1\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$.

Пример 5.1. Пусть A — дифференциальный оператор, т. е. $A=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\,D^\alpha$, где $a_\alpha(x)\in C^\infty(X)$. Обозначим через $a_m(x,\xi)$ его главный символ:

$$a_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\,\xi^\alpha. \tag{5.3}$$

Определение 5.3. Дифференциальный оператор A называется *эллиптическим*, если

$$a_m(x,\xi)\neq 0\ \text{ при }\ (x,\xi)\in X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0). \tag{5.4}$$

Предложение 5.1. *Для дифференциального оператора A следующие условия эквивалентны*:

а) *A эллиптичен*;

б) *$A \in HL_{1,0}^{m,m}(X)$*.

Доказательство. Импликация б) $\Rightarrow$ а) очевидна. Для доказательства обратной импликации введем полный символ оператора A

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha, \tag{5.5}$$

и заметим, что если а) выполнено, то

$$\frac{a(x,\xi)}{a_m(x,\xi)} = 1 + b_{-1}(x,\xi) + \ldots + b_{-m}(x,\xi),$$

где функции $b_{-j}(x,\xi) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ однородны по ξ степени $-j$. Отсюда следует оценка (5.1) с $m_0 = m$, а оценка (5.2) получается аналогично. ■

Примеры эллиптических операторов:

оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ в $\mathbb{R}^n$;

оператор Коши—Римана $\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\,\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ в $\mathbb{R}^2$.

Пример 5.2. Оператор теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^{n+1}$, хотя и не является эллиптическим.

Упражнение 5.1. Проверить гипоэллиптичность оператора теплопроводности и найти соответствующие m, m_0, ρ, δ.

Пример 5.3. Пусть A — классический ПДО, $a_m(x,\xi)$ — его главный символ. Тогда имеет смысл

Определение 5.3$'$. Оператор $A \in CL^m(X)$ называется *эллиптическим*, если его главный символ $a_m(x,\xi)$ удовлетворяет условию (5.4).

Так же, как и в доказательстве предложения 5.1, легко проверить, что если оператор $A \in CL^m(X)$ является собственным, то его эллиптичность эквивалентна включению $A \in HL_{1,0}^{m,m}(X)$. Не предполагая собственности оператора A, можно сказать, что оператор $A \in CL^m(X)$ эллиптичен тогда и только тогда, когда $A = A_1 + R$, где $A_1 \in HL_{1,0}^{m,m}(X)$ и $R \in L^{-\infty}(X)$.

Примеры 5.1 и 5.3 делают естественным следующее

Определение 5.3$''$. Оператор $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$ называется *эллиптическим*, если $A = A_1 + R$, где $A_1 \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}(X)$ и $R \in L^{-\infty}(X)$.

Предложение 5.1$'$. *Если оператор $A\in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$ является собственным, то его эллиптичность равносильна тому, что условие* а) *в определении* 5.1 *выполняется для его символа с $m_0=m$. Без предположения собственности оператор $A\in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$ эллиптичен тогда и только тогда, когда существует представление A в виде $A=A_1+R$, где $R\in L^{-\infty}(X)$, а оператор A_1 является собственным и условие* а) *в определении* 5.1 *выполняется для символа оператора A_1 с $m_0=m$ (и тогда это верно для любого такого представления).*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. ■

5.2. Простейшие свойства гипоэллиптических символов. Условимся прежде всего говорить, что $\sigma(x,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}$ *при больших* ξ, если для любого компакта $K\subset X$ существует такое $R=R(K)$, что функция $\sigma(x,\,\xi)$ определена при $x\in K$, $|\xi|\geqslant R(K)$, и при этих $(x,\,\xi)$ выполнены все необходимые оценки типа (1.10). Если при этом еще выполняются оценки (5.1) и (5.2), то будем говорить, что $\sigma(x,\,\xi)\in HS^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta}$ при больших ξ.

Отметим, что если $\sigma(x,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}$ или $\sigma(x,\,\xi)\in HS^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta}$ при больших ξ, то, умножая $\sigma(x,\,\xi)$ на гладкую срезающую функцию $\psi(x,\,\xi)$, равную 1 «при больших ξ» (например, при $x\in K$, $|\xi|\geqslant R(K)+2$ для любого компакта K) и 0 в окрестности того множества, где символ σ не определен (например, при $x\in K$, $|\xi|\leqslant R(K)+1$), мы получим символ $\sigma_1(x,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$ или, соответственно, символ $\sigma_1(x,\,\xi)\in HS^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$, совпадающий с $\sigma(x,\,\xi)$ «при больших ξ».

Лемма 5.1. *Если $\sigma(x,\,\xi)\in HS^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta}$ при больших ξ, то $\sigma^{-1}(x,\,\xi)\in HS^{-m_0,\,-m}_{\rho,\,\delta}$ при больших ξ. Далее, для любых мультииндексов α, β*

$$\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x\sigma(x,\,\xi)/\sigma(x,\,\xi)\in S^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\,\delta}$$

при больших ξ.

Доказательство. Пусть $y=(x,\xi)$, γ, δ — $2n$-мерные мультииндексы. Индукцией по $|\delta|$ проверяется, что

$$\partial^\delta\Big[\frac{\partial^\gamma\sigma(y)}{\sigma(y)}\Big]=\sum_{k=0}^{|\delta|}\sum_{\delta_0+\ldots+\delta_k=\delta}c_{\delta_0\ldots\delta_k}\frac{\partial^{\delta_0+\gamma}\sigma(y)}{\sigma(y)}\prod_{l=1}^{k}\frac{\partial^{\delta_l}\sigma(y)}{\sigma(y)}. \tag{5.6}$$

Теперь видно, что если взять $\gamma=(\beta,\,\alpha)$, то все оценки, необходимые для доказательства утверждения леммы, следуют непосредственно из определений. ■

Лемма 5.2. *Если $\sigma'\in HS^{m',m_0'}_{\rho,\,\delta}$, $\sigma''\in HS^{m'',m_0''}_{\rho,\,\delta}$, то $\sigma'\sigma''\in HS^{m'+m'',m_0'+m_0''}_{\rho,\,\delta}$.*

Доказательство непосредственно получается из формулы Лейбница. ■

Лемма 5.3. *Если* $\sigma(x,\xi)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$ *и* $r(x,\xi)\in S^{m_1}_{\rho,\delta}$, *где* $m_1<m_0$, *то* $\sigma+r\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$.

Доказательство. Используя представление $\sigma+r=\sigma(1+r/\sigma)$ и леммы 5.1 и 5.2, мы видим, что достаточно рассмотреть случай $\sigma\equiv 1$ и $m_0=m=0$, откуда $m_1<0$. Но тогда утверждение леммы становится очевидным. ■

Лемма 5.4. *Пусть* $\sigma(x,\xi)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$ *при больших* ξ *и* $\sigma_1(y,\eta)=\sigma(x(y),\xi(y,\eta))$, *где отображение* $(y,\eta)\mapsto(x(y),\xi(y,\eta))$ *является дифференцируемым отображением* $X_1\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)$ *в* $X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)$, *причем* $\xi(y,\eta)$ *положительно однородно по* η *порядка* 1. *Пусть* $1-\rho\leqslant\delta<\rho$. *Тогда* $\sigma_1(y,\eta)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$ *при больших* η.

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 1.2 и предоставляется читателю. ■

5.3. Простейшие свойства гипоэллиптических операторов.

Предложение 5.2. *Если* $A'\in HL^{m',m_0'}_{\rho,\delta}(X)$ *и* $A''\in HL^{m'',m_0''}_{\rho,\delta}(X)$, *то* $A'\circ A''\in HL^{m'+m'',m_0'+m_0''}_{\rho,\delta}(X)$.

Доказательство. По теореме 3.4

$$\sigma_{A'A''}(x,\xi)\sim\sigma_{A'}(x,\xi)\,\sigma_{A''}(x,\xi)\left[1+\sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{\partial_\xi^\alpha\sigma_{A'}}{\sigma_{A'}}\,\frac{D_x^\alpha\sigma_{A''}}{\sigma_{A''}}\right].$$

В силу лемм 5.1 и 5.3 в квадратных скобках стоит ряд, асимптотическая сумма которого (в смысле предложения 3.4) принадлежит $HS^{0,0}_{\rho,\delta}$. Остается воспользоваться леммой 5.2. ■

Предложение 5.3. *Если* $A\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$, *то* ${}^tA\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$ *и* $A^*\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущего предложения. ■

Предложение 5.4. *Если* $A\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$, $R\in L^{m_1}_{\rho,\delta}(X)$, *где* $m_1<m_0$ *и* R — *собственный, то* $A+R\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$.

Доказательство. Утверждение очевидным образом вытекает из леммы 5.3. ■

Предложение 5.5. *Если* $1-\rho\leqslant\delta<\rho$, *то класс* $HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$ *инвариантен относительно замен переменных, т. е. если дан диффеоморфизм* $\varkappa\colon X\to X_1$ *и оператор* A *определен, как в* § 4 (*формула* (4.1)), *то* $A_1\in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X_1)$.

Доказательство. По лемме 5.4

$$\sigma_A(\varkappa_1(y),\,({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X)$$

(здесь $\varkappa_1 = \varkappa^{-1}$). Но тогда из теоремы 4.2 и леммы 5.1 ясно, что

$$\sigma_{A_1}(y,\, \eta) = \sigma_A(\varkappa_1(y),\, ({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta)\,(1 + r(y,\, \eta)),$$

где $r(y,\, \eta) \in S^{-2(\rho-1/2)}_{\rho,\,\delta}$ при больших η. Утверждение предложения следует теперь из лемм 5.2 и 5.3. ■

Предложение 5.5 позволяет определить на любом многообразии M класс гипоэллиптических ПДО $HL^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta}(M)$, если только $1-\rho \leqslant \delta < \rho$.

5.4. Параметрикс и грубая теорема регулярности.

Теорема 5.1. *Пусть $A \in HL^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta}(M)$ и либо $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, либо $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такой оператор $B \in \in HL^{-m_0,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$, что*

$$BA = I + R_1, \quad AB = I + R_2, \tag{5.7}$$

где $R_j \in L^{-\infty}(M)$, $j = 1,\, 2$; I — тождественный оператор.

Далее, если B' — другой ПДО, *для которого либо $B'A = I + R_1'$, либо $AB' = I + R_2'$ (где $R_j' \in L^{-\infty}(M)$), то $B' - B \in L^{-\infty}(M)$.*

Следствие 5.1. *Если A — гипоэллиптический* ПДО *в M (не обязательно собственный), то существует такой собственный* ПДО B, *что справедливы соотношения* (5.7).

Доказательство теоремы 5.1. 1. Пусть вначале $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Пусть σ_A — символ оператора A. Рассмотрим такую функцию $b_0(x,\xi) \in HS^{-m_0,\,-m}_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$, что $b_0(x,\xi) = \sigma_A^{-1}(x,\xi)$ при больших ξ. Найдем теперь такой собственный оператор $B_0 \in HL^{-m_0,\,-m}_{\rho,\,\delta}(X)$, что $\sigma_{B_0} - b_0 \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$. Проверим, что

$$B_0 A = I + R_0, \tag{5.8}$$

где $R_0 \in L^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X)$.

В самом деле, по теореме 3.4 имеем при больших ξ

$$\sigma_{B_0A}(x,\,\xi) \sim 1 + \sum_{|\alpha| \geqslant 1} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha \sigma_A^{-1} \cdot D_x^\alpha \sigma_A = 1 + \sum_{|\alpha| \geqslant 1} \frac{1}{\alpha!}\,\frac{\partial_\xi^\alpha \sigma_A^{-1}}{\sigma_A^{-1}}\,\frac{D_x^\alpha \sigma_A}{\sigma_A}$$

и остается воспользоваться леммой 5.1. Пусть теперь C_0 — такой собственный ПДО, что

$$C_0 \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, R_0^j, \tag{5.9}$$

т. е.

$$\sigma_{C_0} \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, \sigma_{R_0^j}. \tag{5.9$'$}$$

Из (5.9) очевидным образом следует, что

$$C_0(I+R_0)-I\in L^{-\infty},$$

так что если мы положим $B_1=C_0B_0$, то

$$B_1A=I+R_1, \tag{5.10}$$

где $R_1\in L^{-\infty}(X)$. Из построения ясно, что $B_1\in HL_{\rho,\delta}^{-m_0,-m}(X)$. Далее, аналогичным образом можно построить такой оператор $B_2\in \in HL_{\rho,\delta}^{-m_0,-m}(X)$, что

$$AB_2=I+R_2, \tag{5.11}$$

где $R_2\in L^{-\infty}(X)$.

Проверим теперь, что если B_1, B_2 — любых два ПДО, для которых выполнены соотношения (5.10) и (5.11), то $B_1-B_2\in L^{-\infty}(X)$. Этим будет доказано существование требуемого B (в качестве которого можно взять любой из операторов B_1, B_2) и его единственность (с точностью до оператора из $L^{-\infty}(X)$). Отметим, что B_1 и B_2 можно считать собственными. Умножая (5.10) справа на B_2 и пользуясь соотношением (5.11), получим $B_1-B_2=R_1B_2-B_1R_2$, и остается заметить, что B_1R_2 и R_1B_2 принадлежат $L^{-\infty}(X)$.

2. Пусть теперь M — произвольное многообразие, $M=\bigcup\limits_\gamma X^\gamma$ — покрытие M координатными окрестностями X^γ. Тогда в X^γ существует (в силу только что доказанного результата) такой собственный оператор B^γ, что

$$B^\gamma\circ A=I+R_1^\gamma,\quad A\circ B^\gamma=I+R_2^\gamma,$$

где R_1^γ, R_2^γ — операторы с гладкими ядрами.

Пусть теперь φ_j, $j=1, 2, \ldots,$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию многообразия M открытыми подмножествами X^γ. Это значит, что выполнены следующие условия (см., например, теорему 6.20 в книге Рудина [1]):

1) $\varphi_j\in C_0^\infty(M)$, $\varphi_j\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\varphi_j\subset X^\gamma$ при некотором $\gamma=\gamma(j)$;

2) для любого $x\in M$ существует такая окрестность $\mathscr{U}_x$ точки x в M, что $\mathscr{U}_x$ пересекается лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp}\varphi_j$;

3) $\sum_j \varphi_j=1$.

Теперь построим такие функции $\psi_j\in C_0^\infty(M)$, что они удовлетворяют сформулированным выше условиям 1) и 2) (с теми же $\gamma(j)$) и вдобавок $\psi_j=1$ в окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_j$.

Обозначим через Φ_j и Ψ_j операторы умножения на φ_j и ψ_j соответственно. Теперь положим

$$B=\sum_j \Phi_jB^{\gamma(j)}\,\Psi_j,$$

где подразумеваются необходимые операции ограничения и продолжения нулем. Тогда мы утверждаем, что B удовлетворяет всем требованиям.

Ясно, что B — собственный оператор. Заметим еще, что на пересечении $X^\gamma \cap X^{\gamma'}$ операторы B^γ и $B^{\gamma'}$ отличаются на оператор с гладким ядром, так что по модулю операторов из $L^{-\infty}$ они могут быть заданы одним и тем же символом. Это позволяет вычислять композиции BA и AB по модулю $L^{-\infty}$, использовать формулу композиции (3.41). Например, символ оператора BA локально имеет вид

$$\sigma_{BA}(x,\xi) \sim \sum_{j,\,\alpha} \frac{1}{\alpha!}\, \Phi_j(x)\, (\partial_\xi^\alpha \sigma_B(x,\xi))\, D_x^\alpha(\sigma_A(x,\xi)\, \Psi_j(x)).$$

Если производная по x применяется к Ψ_j, то возникающий член обращается в 0, поскольку $\Phi_j D_x^\alpha \Psi_j \equiv 0$ для любого $\alpha \neq 0$. Поэтому

$$\sigma_{BA}(x,\xi) \sim \left(\sum_j \Phi_j(x)\, \Psi_j(x)\right) \left(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha \sigma_B(x,\xi)\, D_x^\alpha(\sigma_A(x,\xi))\right) \sim 1,$$

что эквивалентно первому соотношению в (5.7). Точно так же доказывается и второе соотношение. ■

Замечание. Полученную выше формулу для B можно упростить, если добавить достаточно малые окрестности множеств $\operatorname{supp} \varphi_j$ к множеству всех X^γ.

В этом случае мы можем написать

$$B = \sum_\gamma \Phi_\gamma\, B^\gamma\, \Psi_\gamma,$$

где φ_γ удовлетворяют тем же условиям, что рассматривавшиеся выше функции φ_j. При этом подразумевается, что некоторые из функций φ_γ могут быть тождественно равны нулю.

Если M — компактное многообразие (без края), то мы всегда можем считать покрытие $\{X^\gamma\}$ конечным, так что сумма в формуле для B также становится конечной.

Определение 5.4. Оператор B, удовлетворяющий условиям (5.7), называется *параметриксом* оператора A.

Следствие 5.2. *Эллиптический оператор* $A \in L^m_{\rho,\,\delta}(M)$ *имеет параметрикс* $B \in HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$.

Теорема 5.2. *Если A — гипоэллиптический* ПДО, *то*

$$\operatorname{sing\,supp} Au = \operatorname{sing\,supp} u, \qquad u \in \mathscr{E}'(M). \tag{5.12}$$

Иными словами, если Ω — открытое подмножество M, то $Au|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$.

Если A — собственный гипоэллиптический ПДО, *то* (5.12) *верно для любой обобщенной функции $u \in \mathscr{D}'(M)$.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать первую часть утверждения теоремы. При этом включение $\operatorname{sing\,supp} Au \subset \subset \operatorname{sing\,supp} u$ вытекает из псевдолокальности A (см. предложение 2.4) и остается доказать включение

$$\operatorname{sing\,supp}\, u \subset \operatorname{sing\,supp}\, Au. \tag{5.13}$$

Пусть B — собственный ПДО, являющийся параметриксом оператора A. Тогда из формулы $u = B(Au) - R_1 u$ и псевдолокальности B вытекает, что

$$\operatorname{sing\,supp}\, u \subset \operatorname{sing\,supp}(Au) \cup \operatorname{sing\,supp}\, R_1 u,$$

но $R_1 u \in C^\infty(X)$, так что $\operatorname{sing\,supp}\, R_1 u = \varnothing$, что и доказывает (5.13). ■

Теорема 5.2 является грубой теоремой о регулярности решений гипоэллиптических уравнений вида $Au = f$. Более точные теоремы будут доказаны после введения точных классов гладкости функций — шкалы пространств Соболева.

5.5. Параметрикс классических эллиптических псевдодифференциальных операторов. В случае классических эллиптических ПДО параметрикс можно строить более явно.

Пусть A — классический эллиптический ПДО в области $X \subset \mathbb{R}^n$, символ которого $a(x, \xi)$ допускает при больших ξ асимптотическое разложение

$$a(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x, \xi), \tag{5.14}$$

где $a_{m-j}(x, \xi) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$, $a_{m-j}(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка $m - j$ и и выполнено условие эллиптичности (5.4).

Пусть B — параметрикс оператора A. Покажем, что B — классический ПДО, символ которого $b(x, \xi)$ допускает при больших ξ асимптотическое разложение

$$b(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_{-m-j}(x, \xi), \tag{5.15}$$

где $b_{-m-j}(x, \xi) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ и $b_{-m-j}(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка $-m - j$.

Формула композиции показывает, что символ $b(x, \xi)$ должен удовлетворять условию

$$\sum_{\alpha} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)\, D_x^\alpha b(x, \xi)/\alpha! \sim 1,$$

или

$$\sum_{\alpha,\,k,\,j} \partial_\xi^\alpha a_{m-k}(x,\,\xi)\, D_x^\alpha b_{-m-j}(x,\,\xi)/\alpha! \sim 1. \tag{5.16}$$

Ясно, что если мы сгруппируем в (5.16) все члены по порядкам однородности, то (5.16) будет означать просто равенство соответствующих однородных компонент. Делая это, получим

$$\sum_{k+j+|\alpha|=p} \partial_\xi^\alpha a_{m-k}(x,\,\xi)\, D_x^\alpha b_{-m-j}(x,\,\xi)/\alpha! = \delta_0^p, \quad p=0,\,1,\,\ldots, \tag{5.17}$$

или, более подробно,

$$a_m \cdot b_{-m} = 1, \tag{5.17$'$}$$

$$a_m \cdot b_{-m} + \sum_{\substack{k+l+|\alpha|=j \\ l<j}} \left(\partial_\xi^\alpha a_{m-k}\right)\left(D_x^\alpha b_{-m-l}\right)/\alpha! = 0, \quad j=1,\,2,\,\ldots \tag{5.17$''$}$$

Из уравнений (5.17) очевидным образом однозначно определяются положительно однородные функции $b_{-m-j}(x,\,\xi)$ порядков $-m-j$ $(j=0,\,1,\,2,\,\ldots)$. Если теперь определить $b(x,\,\xi)$ формулой (5.15) и найти такой собственный ПДО B, что $\sigma_B(x,\,\xi)-b(x,\,\xi)\in S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^n)$, то оператор B будет параметриксом оператора A.

Формулы (5.17) определяют параметрикс оператора A и в случае, когда A является матричным эллиптическим ПДО: в этом случае $a_{-m-j}(x,\,\xi)$ являются квадратными матричными функциями, а условие эллиптичности имеет вид

$$\det\, a_m(x,\,\xi)\neq 0, \quad (x,\,\xi)\in X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0). \tag{5.18}$$

З а д а ч а 5.1. Показать, что члены $b_{-m-j}(x,\,\xi)$ $(j>0)$ параметрикса классического эллиптического оператора A выражаются через $a_{m-k}(x,\,\xi)$ в скалярном случае формулами вида

$$b_{-m-j}(x,\,\xi) = \sum_{l=2}^{2j+1} c_l(x,\,\xi)\,(a_m(x,\,\xi))^{-l}, \tag{5.19}$$

где $c_l(x,\xi)$ — некоторые положительно однородные функции по ξ порядков $m(l-1)-j$, являющиеся полиномами от функций $a_m,\, a_{m-1},\,\ldots,\, a_{m-j}$ и их производных порядков $\leqslant j$.

Аналогичные формулы в матричном случае имеют вид

$$b_{-m-j}(x,\,\xi) = a_m^{-1}(x,\,\xi) \sum_{l=1}^{2j+1} \prod_{k=1}^{l} \left[c_{k,\,l}(x,\,\xi)\, a_m^{-1}(x,\,\xi)\right]. \tag{5.20}$$

§ 6. Теоремы об ограниченности и компактности псевдодифференциальных операторов

6.1. Формулировка основной теоремы ограниченности. Пусть A — ПДО в $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать A как отображение

$$A\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Пусть K_A — ядро оператора A в смысле Л. Шварца. Если $\operatorname{supp} K_A$ — компакт в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то A определяет отображение

$$A\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Поставим вопрос: можно ли продолжить оператор A до непрерывного линейного оператора

$$A\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)?$$

Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы была выполнена оценка

$$\|Au\| \leqslant C\|u\|, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{6.1}$$

где $C > 0$ не зависит от u, а $\|\cdot\|$ означает норму в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6.1. *Пусть $A \in L^0_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, и $\operatorname{supp} K_A$ — компакт в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Тогда выполнена оценка (6.1) и, следовательно, оператор A продолжается до линейного непрерывного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

6.2. Вспомогательные утверждения и доказательство теоремы 6.1. В дальнейшем используется обозначение

$$\varlimsup_{\substack{|\xi|\to\infty\\ x\in K}} |a(x,\xi)| = \lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{|\xi|\geqslant t\\ x\in K}} |a(x,\xi)|.$$

Теорема 6.2. *Пусть A — собственный* ПДО, *$A \in L^0_{\rho,\delta}(X)$, где $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ и X — область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что существует такая постоянная M, что*

$$\varlimsup_{\substack{|\xi|\to\infty\\ x\in K}} |\sigma_A(x,\xi)| < M \tag{6.2}$$

для любого компакта $K \subset X$. Тогда существует такой собственный интегральный оператор R с эрмитовым ядром $R \in C^\infty(X \times X)$, что

$$(Au, Au) \leqslant M^2(u,u) + (Ru,u), \quad u \in C_0^\infty(X). \tag{6.3}$$

Если при этом $\operatorname{supp} K_A$ — компакт в $X \times X$, то и $\operatorname{supp} R$ также компакт в $X \times X$.

Доказательство импликации теорема 6.2 $\Rightarrow$ теорема 6.1. Достаточно проверить ограниченность в $L^2(\mathbb{R}^n)$ оператора R с гладким финитным ядром. Но это хорошо известно (можно показать, например, что $\|R\|^2 \leqslant \int |R(x, y)|^2\, dx\, dy$, где $\|R\|$ — норма оператора R в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а $R(x, y)$ — ядро оператора R). ■

Для доказательства теоремы 6.2 ввиду соотношения $(Au, Au) = (A^*Au, u)$ достаточно построить такой собственный оператор $B \in L^0_{\rho,\,\delta}(x)$, что

$$A^*A + B^*B - M^2 = R, \tag{6.4}$$

где R имеет гладкое ядро (в этом случае оператор R собственный, так как в левой части (6.4) стоит собственный оператор). Переписывая (6.4) в виде $B^*B = M^2 - A^*A + R$, мы заметим, что по модулю символов класса $S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X)$ символ оператора $M^2 - A^*A$ равен $M^2 - |\sigma_A(x, \xi)|^2$, откуда

$$\varliminf_{\substack{|\xi|\to\infty\\ x\in K}} \operatorname{Re}\,[\sigma_{(M^2-A^*A)}(x, \xi)] > 0, \tag{6.5}$$

где $\varliminf$ определяется точно так же, как $\varlimsup$, но с заменой sup на inf для любого компакта $K \subset X$. Поэтому теорема 6.2 вытекает из следующего предложения.

Предложение 6.1. *Пусть $C \in L^0_{\rho,\,\delta}(X)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, C — собственный* ПДО, $C^* = C$ *и*

$$\varliminf_{\substack{|\xi|\to\infty\\ x\in K}} \operatorname{Re}\,\sigma_C(x, \xi) > 0, \tag{6.6}$$

для любого компакта $K \subset X$. Тогда существует такой собственный оператор $B \in L^0_{\rho,\,\delta}(X)$, что оператор $R = B^*B - C$ имеет бесконечно дифференцируемое ядро.

Лемма 6.1. *Пусть $a(x, \xi) \in S^0_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$ и $a(x, \xi)$ при любых $(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n$ принимает значения, лежащие в компакте $K \subset \mathbb{C}$. Пусть комплекснозначная функция $f(z)$ определена в окрестности компакта K и бесконечно дифференцируема как функция двух вещественных переменных* Re z *и* Im z. *Тогда*

$$f(a(x, \xi)) \in S^0_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n). \tag{6.7}$$

Доказательство. Обозначая $u = \operatorname{Re} z$ и $v = \operatorname{Im} z$, получим, очевидно,

$$\partial_y^\gamma f(a(y)) = \sum_{\substack{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_p+\\ +\omega_1+\ldots+\omega_q=\gamma}} c_{p,\,q,\,\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p,\omega_1,\ldots,\omega_q} (\partial_{u,\,v}^{(p,\,q)} f)\,(a(y)) \times \\ \times \partial_y^{\varkappa_1}(\operatorname{Re} a)\ldots\partial_y^{\varkappa_p}(\operatorname{Re} a)\,\partial_y^{\omega_1}(\operatorname{Im} a)\ldots\partial_y^{\omega_q}(\operatorname{Im} a), \tag{6.8}$$

откуда и следует (6.7), так как $\left|(\partial_{u,v}^{(p,q)} f)\,(a(y))\right| \leqslant C_{pq}$. ■

Доказательство предложения 6.1. Из леммы 6.1 следует, что функция $\sqrt{\mathrm{Re}\ \sigma_C(x,\xi)}$ принадлежит $S^0_{\rho,\delta}$ при больших ξ. Поэтому существует собственный ПДО $B_0 \in L^0_{\rho,\delta}(X)$ с таким вещественнозначным символом $b_0(x,\xi)$, что $|b_0(x,\xi)|^2 - \mathrm{Re}\ \sigma_C(x,\xi) \in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$. Отсюда следует, что

$$C - B_0^* B_0 \in L^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X). \tag{6.9}$$

Оператор B_0 служит «нулевым приближением» для B. Будем искать первое приближение в виде $B_0 + B_1$, где $B_1 \in L^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X)$. Имеем

$$C - (B_0^* + B_1^*)\,(B_0 + B_1) = (C - B_0^* B_0) - (B_0^* B_1 + B_1^* B_0) - B_1^* B_1. \tag{6.10}$$

Имеет смысл уменьшить порядок оператора $B_0^* B_1 + B_1^* B_0$, взяв B_1 собственным ПДО с таким символом $b_1(x,\xi)$, что

$$2b_1(x,\xi)\,b_0(x,\xi) = \sigma_{C - B_0^* B_0}(x,\xi), \tag{6.11}$$

что очевидно возможно, так как $b_0^{-1}(x,\xi) \in S^0_{\rho,\delta}$ при больших ξ по лемме 6.1. Из (6.10) и (6.11) следует, что

$$C - (B_0 + B_1)^*(B_0 + B_1) \in L^{-2(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X). \tag{6.12}$$

Действуя по индукции, мы можем теперь точно так же построить такие собственные ПДО $B_j \in L^{-j(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, что

$$C - (B_0 + \ldots + B_j)^*(B_0 + \ldots + B_j) \in L^{-j(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X). \tag{6.13}$$

Пусть $b_j(x,\xi)$ — символ оператора B_j. Теперь остается построить такой собственный оператор B, что

$$\sigma_B(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x,\xi).$$

Из (6.13) легко следует, что этот оператор B и будет искомым. Тем самым предложение 6.1 доказано, а вместе с ним доказаны и теоремы 6.1 и 6.2. ■

6.3. Теорема о компактности. Мы выведем теорему о компактности ПДО из следующего более общего утверждения.

Теорема 6.3. *Пусть $A \in L^0_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, и пусть ядро K_A имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а символ $\sigma_A(x,\xi)$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{|\xi|\to\infty}}\ |\sigma_A(x,\xi)| < M. \tag{6.14}$$

Тогда существует такой оператор A_1, *что* $A - A_1 \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, *ядро* K_{A_1} *имеет компактный носитель и*

$$\|A_1 u\| \leqslant M\|u\|, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.15}$$

Доказательство. Пусть функция $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\chi(x) \geqslant 0$, $\int \chi(x)\,dx = 1$, $0 \leqslant \hat{\chi}(\xi) \leqslant 1$. Такая функция существует. В самом деле, пусть вначале функция $\chi_0(x)$ такова, что $\chi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_0(x) \geqslant 0$ и $\int \chi_0(x)\,dx = 1$. Тогда ясно, что $|\hat{\chi}_0(\xi)| \leqslant 1$. Теперь положим $\chi(x) = \int \chi_0(x+y)\,\chi_0(y)\,dy$. Ввиду того, что $\hat{\chi}(\xi) = |\hat{\chi}_0(\xi)|^2$ функция $\chi(x)$ удовлетворяет всем требованиям.

Положим теперь $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$ и определим оператор A_ε формулой

$$A_\varepsilon u = Au - A(\chi_\varepsilon * u), \tag{6.16}$$

где $(\chi_\varepsilon * u)(x)$ — свертка функций χ_ε и u, задаваемая формулой

$$(\chi_\varepsilon * u)\,(x) = \int \chi_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy = \int u(x-y)\,\chi_\varepsilon(y)\,dy.$$

Тогда в силу теоремы 6.2

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leqslant M^2\|u - \chi_\varepsilon * u\|^2 + (R(u - \chi_\varepsilon * u),\, u - \chi_\varepsilon * u), \tag{6.17}$$

где R — оператор с ядром $R(x,\,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Заметим, что преобразование Фурье функции $u - \chi_\varepsilon * u$ равно $(1 - \hat{\chi}(\varepsilon\xi))\,\hat{u}(\xi)$ и из условия $0 \leqslant \hat{\chi} \leqslant 1$ вытекает, что

$$\|u - \chi_\varepsilon * u\| \leqslant \|u\|. \tag{6.18}$$

Далее, если обозначить через R_ε оператор, переводящий u в $R(u - \chi_\varepsilon * u)$, то его ядро $R_\varepsilon(x,\,y)$ задается формулой

$$R_\varepsilon(x,\,y) = R(x,\,y) - \int R(x,\,z)\,\varepsilon^{-n}\chi\Big(\frac{z-y}{\varepsilon}\Big)dz,$$

или

$$R_\varepsilon(x,\,y) = R(x,\,y) - \int R(x,\,y+\varepsilon z)\,\chi(z)\,dz,$$

откуда видно, что $\operatorname{supp} R_\varepsilon(x,\,y)$ лежит в некотором фиксированном компакте K (не зависящем от ε при $0 < \varepsilon \leqslant 1$) и, кроме того,

$$\sup_{x,\,y} |R_\varepsilon(x,\,y)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что $\|R_\varepsilon\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Теперь из (6.17) и (6.18) мы получаем

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leqslant M^2\|u\|^2 + \|R_\varepsilon u\|\,\|u\|. \tag{6.19}$$

Из условия теоремы ясно, что мы можем заменить M на $M-\delta$, где δ достаточно мало. Но тогда из (6.19) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leqslant M^2 \|u\|^2.$$

Теперь положим $A_1 = A_\varepsilon$. Так как оператор свертки с χ_ε имеет символ $\hat{\chi}(\varepsilon\xi) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то ясно, что $A - A_1 \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Непосредственно проверяется также, что ядро K_{A_1} оператора A_1 имеет компактный носитель. ■

Теорема 6.4. *Пусть $A \in L^0_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, ядро K_A имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и*

$$\sup_x |\sigma_A(x,\xi)| \to 0 \quad \textit{при} \quad |\xi| \to +\infty. \tag{6.20}$$

Тогда A продолжается до компактного (вполне непрерывного) оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Из теоремы 6.3 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение $A = A_\varepsilon + R_\varepsilon$, где $\|A_\varepsilon\| < \varepsilon$, а оператор R_ε имеет гладкое финитное ядро (и, следовательно, компактен). Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|A - R_\varepsilon\| = 0$, откуда и следует компактность оператора A. ■

Следствие 6.1. *Пусть $A \in L^m_{\rho,\delta}(R^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $m < 0$ и K_A имеет компактный носитель. Тогда A продолжается до компактного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

6.4. Случай операторов на многообразии. Рассмотрим сначала случай замкнутого многообразия M (компактного многообразия без края). С помощью разбиения единицы на многообразии M легко ввести меру, имеющую гладкую положительную плотность по мере Лебега в любых локальных координатах. Если $d\mu$ — какая-нибудь такая мера, то определено гильбертово пространство $L^2(M, d\mu)$. Отметим, что множество элементов и топология в $L^2(M, d\mu)$ не зависят от выбора $d\mu$. Поэтому имеет смысл говорить о пространстве $L^2(M)$, являющемся топологическим векторным пространством, в котором топология может быть задана с помощью некоторого неоднозначно определенного гильбертова скалярного произведения. Из теорем 6.1 и 6.4 очевидным образом следует

Теорема 6.5. *Пусть M — замкнутое многообразие, $A \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. Тогда*

1) *оператор A продолжается до линейного непрерывного оператора*

$$A\colon L^2(M) \to L^2(M);$$

2) *если главный символ* $\sigma_A(x,\xi)\in S^0_{\rho,\delta}(T^*M)/S^{-2\rho+1}_{\rho,\delta}(T^*M)$ *удовлетворяет условию* (6.20) (*оно эквивалентно для всех представителей одного и того же элемента факторпространства* $S^0_{\rho,\delta}(T^*M)/S^{-2\rho+1}_{\rho,\delta}(T^*M)$), *то полученный оператор* $A\colon L^2(M)\to L^2(M)$ *будет компактным оператором.*

Следствие 6.2. *Если* $A\in L^m_{\rho,\delta}(M)$, $1-\rho\leqslant\delta-\rho$ *и* $m<0$, *то* A *продолжается до компактного оператора*

$$A\colon L^2(M)\to L^2(M).$$

Мы сформулируем теперь вариант теоремы об ограниченности, пригодный в случае некомпактного M. Для этого введем пространства $L^2_{\rm loc}(M)$ и $L^2_{\rm comp}(M)$.

Пусть f — комплекснозначная функция на M, определенная всюду, кроме, быть может, множества меры 0 *). Будем писать, что $f\in L^2_{\rm loc}(M)$, если для любого диффеоморфизма $\varkappa\colon X\to X_1$ области $X\subset\mathbb{R}^n$ на область $X_1\subset M$ и для любой подобласти $X_0\subset X$, для которой $\overline{X}_0$ — компакт в X, справедливо включение $[\varkappa^*(f|_{X_1})]|_{X_0}\in L^2(X_0,\,dx)$, где dx — мера Лебега на X_0, индуцированная мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$. Топология в $L^2_{\rm loc}(M)$ задается системой полунорм

$$\|f\|_{\varkappa,\,X_0}=\|[\varkappa^*(f|_{X_1})]|_{X_0}\|_{L^2(X_0,dx)}.$$

Если M имеет счетную базу, то $L^2_{\rm loc}(M)$ — пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое пространство или, что то же самое, полное счетно-нормированное пространство).

Далее, через $L^2_{\rm comp}(M)$ обозначается линейное подмногообразие $L^2_{\rm loc}(M)$, состоящее из тех $f\in L^2_{\rm loc}(M)$, для которых $\operatorname{supp} f$ — компакт в M. Пусть даны описанные выше $\varkappa\colon X\to X_1$ и $X_0\subset X$. Определим оператор вложения

$$i_{\varkappa,\,X_0}\colon L^2(X_0,\,dx)\to L^2_{\rm comp}(M),$$

сопоставляющий функции $f\in L^2(X_0,\,dx)$ функцию $\hat f(y)$ на M, равную $f(x)$ в точке $\varkappa(x)\in M$ и 0 при $y\in M\setminus\varkappa(X_0)$. Топология в $L^2_{\rm comp}(M)$ определяется как индуктивная топология, т. е. самая сильная локально выпуклая топология, для которой все отображения $i_{\varkappa,\,X_0}$ непрерывны. Отсюда следует, что линейное отображение $A\colon L^2_{\rm comp}(M)\to E$, где E — любое локально выпуклое пространство, непрерывно тогда и только

*) Отметим, что всюду в дальнейшем мы будем считать две функции f_1 и f_2, эквивалентными, если они совпадают вне некоторого множества меры 0. Элементами пространств $L^2_{\rm loc}(M)$ и $L^2_{\rm comp}(M)$ будут на самом деле не функции, а их классы эквивалентности, хотя мы и будем писать $f\in L^2_{\rm loc}(M)$ для функции f, используя общепринятую вольность речи.

тогда, когда непрерывны все композиции $A \circ i_{\varkappa, X_0}$. Учитывая это обстоятельство, мы очевидным образом получаем, что справедлива следующая

Теорема 6.6. *Если $A \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, где $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, то A продолжается до линейного непрерывного оператора*

$$A\colon L^2_{\mathrm{comp}}(M) \to L^2_{\mathrm{loc}}(M).$$

Упражнение 6.1. Доказать, что если $A \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, оператор A собственный, то он продолжается до линейного непрерывного оператора

$$A\colon L^2_{\mathrm{comp}}(M) \to L^2_{\mathrm{comp}}(M),$$

а также до линейного непрерывного оператора

$$A\colon L^2_{\mathrm{loc}}(M) \to L^2_{\mathrm{loc}}(M).$$

§ 7. Пространства Соболева

7.1. Определение пространств Соболева.

Лемма 7.1. *Пусть M — произвольное многообразие. Тогда для любого вещественного s на M существует собственный классический эллиптический* ПДО Λ_s *порядка s, главный символ которого положителен (при $\xi \neq 0$).*

Доказательство. Пусть вначале $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда мы можем взять в качестве Λ_s произвольный собственный ПДО $\Lambda_s \in CL^s(X)$ с главным символом $|\xi|^s$.

Пусть теперь M произвольно и пусть задано покрытие M координатными окрестностями $M = \bigcup\limits_{\gamma} X_1^\gamma$. Через $\varkappa^\gamma$ будем обозначать какие-нибудь координатные диффеоморфизмы $\varkappa^\gamma\colon X^\gamma \to X_1^\gamma$, где X^γ — открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Построим на X^γ операторы Λ_s^γ, обладающие требуемыми свойствами, и перенесем их на X_1^γ стандартной процедурой (см. § 4) с помощью диффеоморфизмов $\varkappa^\gamma$, изготовив таким образом собственные классические ПДО $\Lambda^\gamma_{s,1}$ на X_1^γ с положительными главными символами. Оператор Λ_s на M склеивается из операторов $\Lambda^\gamma_{s,1}$ с помощью той же процедуры, что B из B^γ в доказательстве теоремы 5.1. ■

Определение 7.1. Будем писать, что $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, если $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $\Lambda_s u \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$. Далее, положим $H^s_{\mathrm{comp}}(M) = H^s_{\mathrm{loc}}(M) \cap \mathscr{E}'(M)$ *). Если M — замкнутое многообразие, то будем обозначать пространство $H^s_{\mathrm{loc}}(M) = H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ просто через $H^s(M)$.

Если K — компакт в M, то через $H^s(K)$ будем обозначать множество тех $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$, для которых $\operatorname{supp} u \subset K$.

---

*) По поводу $\mathscr{D}'(M)$ и $\mathscr{E}'(M)$ см. упражнение 4.1.

В дальнейшем в пространствах $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ и $H^s(K)$ будет определена топология, а пока нам существен лишь запас элементов в этих пространствах.

Ниже будет также доказано, что эти пространства не зависят от выбора оператора Λ_s.

7.2. Действие ПДО в пространствах Соболева. Точная теорема регулярности.

Теорема 7.1. *Если $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$, причем $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$, то A осуществляет отображение*

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M) \to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

Если дополнительно предположить, что A — собственный, то A также задает отображения

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M) \to H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(M),$$
$$A\colon H^s_{\mathrm{loc}}(M) \to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что оператор Λ_{-s} является параметриксом для оператора Λ_s при любом $s \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\Lambda_{-s}\Lambda_{+s} = I + R_s, \tag{7.1}$$

где R_s — собственный оператор с гладким ядром, переводящий, следовательно, $\mathscr{E}'(M)$ в $C_0^\infty(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ в $C^\infty(M)$.

Если $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$, то, полагая $\Lambda_s u = u_0$, мы получим из (7.1), что $u = \Lambda_{-s}u_0 + v$, где $u_0 \in L^2_{\mathrm{comp}}(M)$, $v \in C_0^\infty(M)$. Поэтому

$$\Lambda_{s-m}Au = \Lambda_{s-m}A(\Lambda_{-s}u_0 + v) = \Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s}u_0 + \Lambda^s Av,$$

и ввиду того, что $\Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s} \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, мы получаем из теоремы 6.6, что $\Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s}u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, $\Lambda^s Av \in C^\infty(M)$, откуда $\Lambda_{s-m}Au \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, т. е. $Au \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M)$. Мы доказали первое утверждение теоремы 7.1. Остальные вытекают из него или доказываются аналогично. ■

Мы можем теперь дать определение пространств Соболева, не зависящее от выбора Λ_s. Достаточно, очевидно, определить $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$.

Определение 7.1′. Будем писать, что $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, если $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $Au \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ для любого собственного $A \in L^s_{1,0}(M)$.

Эквивалентность определений 7.1 и 7.1′ очевидным образом вытекает из теоремы 7.1.

Теорема 7.2. *Пусть $A \in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(M)$, где $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}$. Тогда, если $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $Au \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, то $u \in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(M)$.*

Доказательство. Пусть B — параметрикс A, $B \in HL^{-m_0,-m}_{\rho,\delta}$. Тогда по теореме 7.1 имеем $BAu \in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(M)$. Но $BAu = u+v$, где $v \in C^\infty(M)$. Отсюда $u \in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(M)$. ■

Следствие 7.1. а) *Если A — эллиптический оператор порядка m, $u \in \mathscr{E}'(M)$ и $Au \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, то $u \in H^{s+m}_{\mathrm{comp}}(M)$.*

б) *Если A — собственный (в частности, если A — дифференциальный) эллиптический оператор порядка m, $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $Au \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, то $u \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(M)$.*

7.3. Локализация. Из теоремы 7.1 очевидным образом вытекает, что если $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, $a(x) \in C^\infty(M)$, то $au \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$. Если, в частности, $a(x) \in C_0^\infty(M)$, то $au \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. Следующее утверждение является точной формулировкой обратного утверждения.

Предложение 7.1. *Пусть обобщенная функция $u \in \mathscr{D}'(M)$ такова, что для любой точки $x_0 \in M$ найдется такая функция $\varphi_{x_0} \in C_0^\infty(M)$, что $\varphi_{x_0}(x_0) \neq 0$ и $\varphi_{x_0} \cdot u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. Тогда $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$.*

Доказательство. Мы можем выбрать из функций φ_{x_0} такую систему $\{\varphi_\gamma\}$, что некоторые окрестности $\operatorname{supp} \varphi_\gamma$ образуют локально конечное покрытие M и для любой точки $x_0 \in M$ найдется такое γ, что $\varphi_\gamma(x_0) \neq 0$. Положим теперь $\psi_\gamma = \dfrac{\bar\varphi_\gamma \cdot \varphi_\gamma}{\sum\limits_\gamma |\varphi_\gamma|^2}$. Тогда ясно, что ψ_γ обладают теми же свойствами, что и φ_γ, и, кроме того, $\psi_\gamma \geqslant 0$ и $\sum\limits_\gamma \psi_\gamma \equiv 1$. Имеем теперь

$$\Lambda_s u = \sum_\gamma \Lambda_s(\psi_\gamma u) \in L^2_{\mathrm{loc}}(M),$$

поскольку в силу собственности оператора Λ_s, сумма $\sum\limits_\gamma \Lambda_s(\psi_\gamma u)$ является локально конечной. ■

Следствие 7.2. *Пусть $M = \bigcup\limits_\gamma X_\gamma$ — покрытие M открытыми множествами, $u \in \mathscr{D}'(M)$. Тогда условие $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$ равносильно тому, что $u|_{X_\gamma} \in H^s_{\mathrm{loc}}(X_\gamma)$ для любого γ.*

Предложениее 7.1 показывает, что, по существу, достаточно изучать пространство $H^s(K)$, где K — компакт в $\mathbb{R}^n$.

7.4. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Определение 7.2. Пусть $s \in \mathbb{R}$, $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Будем писать, что $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, если $\hat u(\xi) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|u\|_s^2 = \int |\hat u(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s}\, d\!\!{}^-\xi < +\infty, \tag{7.2}$$

(это равенство служит определением нормы $\|\cdot\|_s$).

Упражнение. Проверить полноту пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ (с нормой $\|\cdot\|_s$).

В пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ может быть введено гильбертово скалярное произведение
$$(u,\, v)_s = \int \hat{u}(\xi)\, \overline{\hat{v}(\xi)}\, \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi, \tag{7.3}$$
причем отображение $\langle D\rangle^s$, переводящее $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ в $F^{-1}\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)$ (где F — преобразование Фурье), задает изометрический изоморфизм:
$$\langle D\rangle^s \colon H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n). \tag{7.4}$$

Лемма 7.2. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда*
$$H^s(K) = \mathscr{E}'(K) \cap H^s(\mathbb{R}^n) \tag{7.5}$$
(через $\mathscr{E}'(K)$ обозначено множество таких $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, что $\operatorname{supp} u \subset K$).

Доказательство. 1. Поскольку $\langle D\rangle^s \in L^s_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)$ и оператор $\langle D\rangle^s$ эллиптичен, то в силу следствия 7.1 ясно, что из включений $u \in \mathscr{E}'(K)$ и $\langle D\rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ вытекает, что $u \in H^s(K)$, т. е. $\mathscr{E}'(K) \cap H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^s(K)$.

2. Пусть теперь $u \in H^s(K)$. Надо проверить, что $\langle D\rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, в то время как известно, что $\langle D\rangle^s u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. На самом деле верно даже более сильное утверждение: если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности K, то $(1-\varphi)\,\langle D\rangle^s u \in S(\mathbb{R}^n)$. Докажем это. Пусть функция $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\varphi = 1$ в окрестности $\operatorname{supp}\psi$ (в частности, $(1-\varphi)\,\psi \equiv 0$) и в то же время $\psi = 1$ в окрестности K. Тогда $\psi u = u$ и $(1-\varphi)\,\langle D\rangle^s u = (1-\varphi)\,\langle D\rangle^s \psi u$. Изучим оператор $(1-\varphi)\,\langle D\rangle^s\psi$. Ясно, что его ядро $K(x,\, y)$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Нам достаточно проверить, что $K(x,\, y) \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Но $K(x,\, y)$ задается осциллирующим интегралом:
$$K(x,\, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}(1-\varphi(x))\,\langle\xi\rangle^s\,\psi(y)\, d\xi,$$
который можно преобразовать так:
$$K(x,\, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}|\,x-y\,|^{-2N}(1-\varphi(x))\,\psi(y)\,(-\Delta_\xi)^N\langle\xi\rangle^s\, d\xi,$$
поскольку $|\,x-y\,| \geqslant \varepsilon > 0$ при $x \in \operatorname{supp}(1-\varphi)$, $y \in \operatorname{supp}\psi$. При $2N > s+n$ получается сходящийся интеграл, который оценивается через $C(1+|\,x\,|+|\,y\,|)^{-2N}$. Аналогично получаются оценки производных ядра $K(x,\, y)$. ■

Отмечая, что $H^s(K)$ является замкнутым подпространством $H^s(\mathbb{R}^n)$, мы видим, что скалярное произведение $(u,\, v)_s$ индуцирует на $H^s(K)$ структуру гильбертова пространства.

Лемма 7.3. *Пусть $\hat{K}$ — такой компакт в $\mathbb{R}^n$, что $K \subset \operatorname{Int} \hat{K}$. Тогда, если $u \in H^s(K)$, то существует такая последовательность $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u_n \subset \hat{K}$, что $\|u_n - u\|_s \to 0$ при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \varphi(x)\,dx = 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) = \langle u(y),\, \varphi_\varepsilon(x-y)\rangle, \qquad \varepsilon > 0,$$

Ясно, что $u_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \|u_\varepsilon - u\|_s = 0$. Поскольку $\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \hat{\varphi}(\varepsilon\xi)$ и $\hat{\varphi}(0) = 1$, то дело сводится к установлению соотношения

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int |\hat{\varphi}(\varepsilon\xi) - 1|^2\, |\hat{u}(\xi)|^2\, \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi = 0,$$

очевидного из теоремы Лебега.

7.5. Топология в пространствах Соболева на многообразии. Пусть $M = \bigcup\limits_\gamma X_1^\gamma$ — локально конечное покрытие многообразия M координатными окрестностями, $\varkappa^\gamma : X^\gamma \to X_1^\gamma$ — координатные диффеоморфизмы (X^γ — область в $\mathbb{R}^n$), φ^γ — разбиение единицы на M, подчиненное покрытию $\{X_1^\gamma\}$. Пусть K — компакт в M. Введем в пространстве $H^s(K)$ скалярное произведение, полагая

$$(u,\, v)_s = \sum_\gamma ((\varkappa^\gamma)^*(\varphi^\gamma u),\, (\varkappa^\gamma)^*(\varphi^\gamma v))_s, \qquad u,\, v \in H^s(K). \tag{7.6}$$

Предложение 7.2. *Скалярное произведение* (7.6) *индуцирует в $H^s(K)$ структуру гильбертова пространства.*

Доказательство. Ясно, что в проверке нуждается лишь полнота пространства $H^s(K)$ по норме $\|\cdot\|_s$, определяемой скалярным произведением (7.6). Пусть последовательность $\{u_n\}_{n=1,2,\ldots}$ элементов $H^s(K)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_s$. Тогда

$$(\varkappa^\gamma)^*\varphi^\gamma u_n \to v_1^\gamma \in H^s(\varkappa_1^\gamma(\operatorname{supp} \varphi^\gamma)) \tag{7.7}$$

по норме $H^s(\mathbb{R}^n)$ (здесь $\varkappa_1^\gamma = (\kappa^\gamma)^{-1}$). Мы можем взять $v^\gamma = (\kappa_1^\gamma)^* v_1^\gamma$, так что $v_1^\gamma = (\varkappa^\gamma)^* v^\gamma$. Тогда $v^\gamma \in H^s(\operatorname{supp} \varphi^\gamma)$ и мы положим $u = \sum\limits_\gamma v^\gamma$ (ясно, что эта сумма конечна). Ясно, что $u \in H^s(K)$, поскольку $v^\gamma \in H^s(K)$. Остается доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_s = 0$. Это означает в силу (7.6), что

$$\lim_{n \to \infty} \|(\kappa^\gamma)^*\varphi^\gamma(u_n - u)\|_s = 0,$$

при любом γ. Но из (7.7) ясно, что достаточно проверить соотношение $v^\gamma = \varphi^\gamma u$, очевидное ввиду того, что $u_n \to u$ в $\mathscr{D}'(M)$, откуда $\varphi^\gamma u_n \to \varphi^\gamma u$

в $\mathscr{D}'(M)$, а из (7.7) следует, что $\varphi^\gamma u_n \to v^\gamma$ в $\mathscr{D}'(M)$ (сходимость в $\mathscr{D}'(M)$ понимается здесь в слабом смысле). ∎

Теперь мы хотим доказать независимость топологии, индуцированной нормой $\|\cdot\|_s$ на $H^s(K)$, от выбора произвольных элементов в (7.6) (покрытия, разбиения единицы и координатных диффеоморфизмов). Для этого целесообразно дать другое определение этой топологии.

Пусть Λ_s выбраны по лемме 7.1, причем Λ_{-s} является параметриксом Λ_s (выполнено соотношение (7.1)). Имеем тогда

$$u = \Lambda_{-s}\Lambda_s u - R_s u. \tag{7.8}$$

Пусть $p > s$, p — натуральное и $Q_1, \ldots, Q_N$ — дифференциальные операторы, порождающие левый $C^\infty(M)$-модуль всех дифференциальных операторов порядка не выше p на M. Положим тогда

$$(u, v)'_s = (\Lambda_s u, \Lambda_s v) + \sum_{k=1}^{N}(Q_k R_s u, Q_k R_s v), \tag{7.9}$$

где $u, v \in H^s(K)$, (f, g) — скалярное произведение в $L^2_{\mathrm{comp}}(M)$, индуцированное любой гладкой положительной плотностью на M. Из $(u, u)'_s = 0$ следует, что $\Lambda_s u = 0$ и $R_s u = 0$, но тогда в силу (7.8) имеем $u = 0$. Поэтому скалярное произведение (7.9) положительно определено и мы будем обозначать через $\|\cdot\|'_s$ соответствующую гильбертову норму.

П р е д л о ж е н и е 7.2′. *Скалярное произведение* (7.9) *индуцирует в $H^s(K)$ структуру гильбертова пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опять-таки в проверке нуждается лишь полнота. Отметим сразу, что из сходимости последовательности $u_n \in H^s(K)$ по норме $\|\cdot\|'_s$ вытекает слабая сходимость в $\mathscr{D}'(M)$. Если последовательность $u_n \in H^s(K)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|'_s$, то это означает, что в топологии $L^2(\hat{K})$ (где $\hat{K}$ — некоторый компакт в M) существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_s u_n = v, \quad \lim_{n\to\infty} QR_s u_n = \omega_Q, \tag{7.10}$$

где Q — любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant p$. В частности, $\Lambda_s u_n$ и $R_s u_n$ сходятся в топологии $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, так что из (7.8) следует слабая сходимость u_n в $\mathscr{D}'(M)$. Обозначая через u предел u_n (в слабой топологии $\mathscr{D}'(M)$), мы будем иметь, очевидно,

$$u = \Lambda_{-s} v - w_1, \tag{7.11}$$

где $w_1 = \lim\limits_{n\to\infty} R_s u_n$. Беря в качестве Q в (7.10) эллиптический оператор порядка p, мы получим

$$Qw_1 = \lim_{n\to+\infty} QR_s u_n = w_Q \in L^2_{\mathrm{loc}}(M),$$

откуда $w_1 \in H^p_{\mathrm{loc}}(M)$ и, значит, $w_1 \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, но тогда $w_1 \in H^s(\hat{K})$ для некоторого компакта $\hat{K}$ ввиду собственности операторов Λ_s и R_s.

Остается проверить, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|'_s = 0$. Имеем

$$u_n - u = u_n - \Lambda_{-s}v + w_1 = \Lambda_{-s}\Lambda_s u_n - R_s u_n - \Lambda_{-s}v + w_1 = \\ = \Lambda_{-s}(\Lambda_s u_n - v) - (R_s u_n - w_1).$$

Отсюда

$$\|u_n - u\|'_s \leqslant \|\Lambda_s\Lambda_{-s}(\Lambda_s u_n - v)\| + \sum_{k=1}^{N} \|Q_k R_s \Lambda_{-s}(\Lambda_s u_n - v)\| + \\ + \|\Lambda_s(R_s u_n - w_1)\| + \sum_{k=1}^{N} \|Q_k R_s(R_s u_n - w_1)\|. \quad (7.12)$$

(здесь норма $\|\cdot\|$ индуцирована тем же скалярным произведением (f, g), что и в формуле (7.9)).

Сходимость к 0 первых двух и последнего слагаемых в (7.12) следует из ограниченности операторов $\Lambda_s\Lambda_{-s}$, $Q_k R_s \Lambda_{-s}$ и $Q_k R_s$ как операторов из $L^2(K)$ в $L^2(\hat{K})$. Для обнаружения сходимости к 0 третьего слагаемого возьмем эллиптический дифференциальный оператор Q порядка p и его собственный параметрикс Q_1. Тогда

$$\Lambda_s(R_s u_n - \omega_1) = \Lambda_s Q_1 Q(R_s u_n - w_1) + \Lambda_s R(R_s u_n - w_1),$$

где $R \in L^{-\infty}$. Искомое утверждение следует теперь из того, что $\Lambda_s Q_1$ — собственный ПДО порядка $s - p \leqslant 0$, непрерывно отображающий $L^2(K)$ в $L^2(\hat{K})$. ■

Есть еще третий способ ввести топологию в $H^s(K)$ — задать ее полунормами

$$\|u\|_{A,\hat{K}} = \|Au|_{\hat{K}}\|, \quad A \in L^s_{1,0}(M). \quad (7.13)$$

Предложение 7.3. *Все три введенные выше топологии на $H^s(K)$ (с помощью нормы $\|\cdot\|_s$, нормы $\|\cdot\|'_s$ и полунорм (7.13)) совпадают.*

Доказательство. Совпадение топологий, заданных нормами $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|'_s$, ясно из теоремы о замкнутом графике. Топология, задаваемая полунормами (7.13), очевидным образом сильнее топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|'_s$, ибо норма $\|\cdot\|'_s$ оценивается суммой $N+1$ полунорм типа (7.13), соответствующих операторам A, равным Λ_s и $Q_k R_s$. Для проверки же совпадения этих топологий достаточно установить, что если $A \in L^s_{1,0}(M)$ и K, $\hat{K}$ — компакты в M, то справедлива оценка

$$\|Au|_{\hat{K}}\| \leqslant C\|u\|'_s, \quad u \in H^s(K). \tag{7.14}$$

Но, представляя u в виде (7.8), мы получаем

$$Au = (A\Lambda_{-s})\Lambda_s u - AR_s u,$$

и, поскольку $A\Lambda_{-s} \in L^0_{1,0}(M)$, $AR_s \in L^{-\infty}(M)$, оценка (7.14) следует из теоремы 6.6. ■

С л е д с т в и е 7.3. *Топологии, определяемые в $H^s(K)$ нормами $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|'_s$, не зависят от произвольных элементов, входящих в определения этих норм.*

П р е д л о ж е н и е 7.4. *Пусть $\hat{K}$ — такой компакт в M, что $K \subset \operatorname{Int} \hat{K}$. Тогда, если $u \in H^s(K)$, то существует такая последовательность $\varphi_n \in C_0^\infty(\hat{K})$, что $\varphi_n \to u$ при $n \to +\infty$ в топологии $H^s(\hat{K})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение следует из леммы 7.3 с учетом определения нормы $\|\cdot\|_s$. ■

П р е д л о ж е н и е 7.5. *Пусть K — компакт в M, и $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$, причем $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда, если A — собственный, то A определяет линейный непрерывный оператор

$$A\colon H^s(K) \to H^{s-m}(\hat{K}),$$

где $\hat{K}$ — компакт в M, зависящий от K. Без предположения собственности это же верно для оператора φA, где $\varphi \in C_0^\infty(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Удобнее всего использовать норму $\|\cdot\|'_s$. Тогда для проверки непрерывности A из $H^s(K)$ в $H^{s-m}(\hat{K})$ нужно оценить $\|\Lambda_{s-m}Au\|$ и $\|QR_{s-m}Au\|$ через $C\|\Lambda_s u\|$ и $C\|Q'R_s u\|$ (здесь Q и Q' — любые дифференциальные операторы). Но из (7.8) имеем

$$Au = (A\Lambda_{-s})\,(\Lambda_s u) - AR_s u,$$

откуда

$$\Lambda_{s-m}Au = (\Lambda_{s-m}A\Lambda_s)\,(\Lambda_{-s}u) - (\Lambda_{s-m}AR_s)\,u,$$
$$QR_{s-m}Au = QR_{s-m}\Lambda_{-s}\Lambda_s u - QR_{s-m}R_s u,$$

и искомая оценка следует из теорем 6.1 и 6.6, если учесть, что $\Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s} \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, а операторы $\Lambda_{s-m}AR_s$, $QR_{s-m}\Lambda_{-s}$ и QR_{s-m} принадлежат $L^{-\infty}(M)$. ■

Теперь введем топологию в $H^s_{\text{loc}}(M)$ и в $H^s_{\text{comp}}(M)$.

Топология в $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$ определяется как самая слабая из всех локально выпуклых топологий, для которых непрерывны все отображения $M_\varphi\colon H^s_{\mathrm{loc}}(M)\to H^s(\mathrm{supp}\ \varphi)$, где $\varphi\in C_0^\infty(M)$, $M_\varphi u=\varphi u$. Иными словами, это топология, задаваемая системой полунорм

$$\|u\|_{s,\varphi}=\|\varphi u\|_s,\quad \varphi\in C_0^\infty(M). \tag{7.15}$$

Топология в $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ определяется как самая сильная из всех локально выпуклых топологий, для которых непрерывны все вложения $i_K\colon H^s(K)\to H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. Важнейшим свойством и свойством, характеризующим эту топологию (называемую *индуктивной*), является то, что линейное отображение $f\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M)\to E$ в любое локально выпуклое пространство E непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $f\circ i_K\colon H^s(K)\to E$.

Из этих определений и предложения 7.5 вытекает следующая

Теорема 7.3. *Пусть $A\in L^m_{\rho,\delta}$, где $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ или $\delta<\rho$ и $M=X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $s\in\mathbb{R}$ оператор A является линейным непрерывным оператором*:

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

Если A — собственный, то он может быть продолжен до линейных непрерывных отображений

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M)\to H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(M),$$

и

$$A\colon H^s_{\mathrm{loc}}(M)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

7.6. Теоремы вложения. Отметим прежде всего тот тривиальный (и уже использовавшийся) факт, что при $s>s'$ имеются вложения

$$H^s(K)\subset H^{s'}(K),\quad H^s_{\mathrm{loc}}(M)\subset H^{s'}_{\mathrm{loc}}(M),$$
$$H^s_{\mathrm{comp}}(M)\subset H^{s'}_{\mathrm{comp}}(M),$$

которые непрерывны. Менее тривиальна следующая

Теорема 7.4. *Пусть $s>s'$ и K — компакт в M. Тогда оператор вложения*

$$i_s^{s'}\colon H^s(K)\to H^{s'}(K)$$

является компактным оператором.

Доказательство. Используя тождество (7.8), получим

$$\Lambda_{s'}u=(\Lambda_{s'}\Lambda_{-s})(\Lambda_s u)-(\Lambda_{s'}R_s)\,u=$$
$$=(\Lambda_{s'}\Lambda_{-s})\,(\Lambda_s u)-(\Lambda_{s'}\Lambda_{-s})\,(\Lambda_s R_s u)+(\Lambda_{s'}R_s)\,(R_s u).$$

Поскольку $\Lambda_{s'}\Lambda_{-s} \in L_{1,0}^{-(s-s')}(M)$ (и, значит, по следствию 6.1 для любого компакта K_1 найдется такой компакт K_2, что оператор $\Lambda_{s'}\Lambda_{-s}$ является компактным оператором из $L^2(K_1)$ в $L^2(K_2)$), то ясно, что если u пробегает ограниченное множество в $H^s(K)$ (и, следовательно, $\Lambda_s u$ и $R_s u$ пробегают ограниченные множества в $L^2(K_1)$), то $\Lambda_{s'} u$ пробегает компактное множество в $L^2(K_2)$. Аналогично доказывается, что в этом случае $QR_{s'}u$ пробегает компактное множество в $L^2(K_2)$ для любого дифференциального оператора Q. Но это в силу тождества (7.8) и определения нормы влечет компактность соответствующего множества в $H^{s'}(K_2)$ (и, значит, в $H^{s'}(K)$), поскольку на самом деле оно лежит в $H^{s'}(K)$, а топология $H^{s'}(K)$ индуцируется топологией $H^{s'}(K_2)$, если только $K \subset K_2$. ■

Обобщением теоремы 7.4 является

Т е о р е м а 7.5. *Пусть* $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$, A — *собственный и* $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ *или* $\delta < \rho$ *и* $M = X$ — *область в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть числа* s, $s' \in R$ *таковы, что* $s' < s - m$. *Пусть* K — *компакт в* M *и* $\hat{K}$ — *такой компакт в* M *(зависящий от* K), *что* $A\mathscr{E}'(K) \subset \mathscr{E}'(\hat{K})$. *Тогда оператор*

$$A\colon H^s(K) \to H^{s'}(\hat{K})$$

компактен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 7.5 является следстврем предложения 7.5 и теоремы 7.4, поскольку оператор $A\colon H^s(K) \to H^{s'}(\hat{K})$ можно рассматривать как композицию $H^s(K) \xrightarrow{A} H^{s-m}(\hat{K}) \xrightarrow{i^{s'}_{s-m}} H^{s'}(\hat{K})$. ■

Обозначим через $C^p(M)$ пространство функций на M имеющих непрерывный производные порядка $\leqslant p$ в любых локальных координатах. Топология в $C^p(M)$ определяется полунормами

$$\|u\|_{A,K} = \sup_{x \in K} |Au(x)|, \tag{7.16}$$

где A — любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant p$. Через $C^p_0(K)$ будем обозначать подпространство таких функций $u \in C^p(M)$, что $\operatorname{supp} u \subset K$. Ясно, что топология $C^p(M)$ индуцирует в $C^p_0(K)$ топологию, которая может быть задана банаховой нормой.

Т е о р е м а 7.6. *Если* $s > n/2 + p$, *то* $H^s_{\mathrm{loc}}(M) \subset C^p(M)$, *причем вложение непрерывно. Если* K — *компакт в* M, *то вложение* $H^s(K) \subset C^p(K)$ *при том же условии* $s > n/2 + p$ *является компактным оператором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку дифференциальные операторы порядка p непрерывно отображают $H^s(K)$ в $H^{s-p}(K)$, то ясно, что достаточно рассмотреть случай $p = 0$. Далее, достаточно проверить, что при $s>n/2$ имеется непрерывное вложение $H^s(K)\subset C_0^0(K)$, ибо компактность этого вложения получится, если мы представим его в виде композиции

$$H^s(K)\subset H^{s-\varepsilon}(K)\subset C_0^0(K),$$

($\varepsilon>0$ таково, что $s-\varepsilon>n/2$) и воспользуемся теоремой 7.4. Наконец, ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда K лежит в координатной окрестности и, значит, дело сводится к случаю $M=\mathbb{R}^n$.

Итак, пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $s>n/2$. Из леммы 7.3 следует, что достаточно доказать оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|\leqslant C\|u\|_s,\quad u\in C_0^\infty(K), \tag{7.17}$$

где C не зависит от u. Мы докажем эту оценку даже с постоянной C, не зависящей от K. Имеем

$$|u(x)|=\Big|\int e^{ix\cdot\xi}\,\hat u(\xi)\,d\!\!{}^-\xi\Big|\leqslant\int|\hat u(\xi)|\,d\!\!{}^-\xi=\int|\hat u(\xi)|\,\langle\xi\rangle^s\,\langle\xi\rangle^{-s}\,d\!\!{}^-\xi\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\int|\hat u(\xi)|^2\langle\xi\rangle^{2s}\,d\!\!{}^-\xi\Big]^{1/2}\Big[\int\langle\xi\rangle^{-2s}\,d\!\!{}^-\xi\Big]^{1/2}=C\|u\|_s,$$

где $C=(\int\langle\xi\rangle^{-2s}d\!\!{}^-\xi)^{1/2}<+\infty$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 7.4. $\bigcap\limits_s H^s_{\mathrm{loc}}(M)=C^\infty(M)$.

Это следствие очевидно. Отметим еще двойственный факт: $\bigcup\limits_s H^s(K)=\mathscr{E}'(K)$ для любого компакта $K\subset M$. Этот факт вытекает из хорошо известного в теории обобщенных функций утверждения о том, что если $u\in\mathscr{E}'(K)$, то u можно записать в виде $u=\sum\limits_{j=1}^N Q_jv_j$, где $v_j\in L^2(\hat K)$, а Q_j — дифференциальные операторы. Обозначая через m наибольший порядок Q_j, мы видим, что $u\in H^{-m}(K)$.

7.7. Двойственность. Пусть на M задана гладкая положительная плотность $d\mu(x)$. Она определяет билинейную форму

$$\langle u,\,v\rangle=\int u(x)\,v(x)\,d\mu(x), \tag{7.18}$$

определенного, например, если $u\in C_0^\infty(M)$, $v\in C^\infty(M)$.

Т е о р е м а 7.7. *Билинейная форма* (7.18) *при любом* $s\in\mathbb{R}$ *продолжается до спаривания (раздельно непрерывного билинейного отображения)*

$$H^s_{\mathrm{comp}}(M)\times H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)\to\mathbb{C}, \tag{7.19}$$

которое мы будем обозначать по-прежнему $\langle u,\, v\rangle$. *Пространства* H^s_{comp} *и* H^s_{loc} *сопряжены относительно этого спаривания, т. е. любой линейный непрерывный функционал* $l(u)$ *на* $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ *можно записать в виде* $\langle u,\, v\rangle$ *при некотором* $v \in H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$, *а любой линейный непрерывный функционал* $l(v)$ *на* H^{-s}_{loc} *можно записать в виде* $\langle u,\, v\rangle$, *где* $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. *Если многообразие* M *замкнуто, то отображение, сопоставляющее произвольному* $v \in H^{-s}(M)$ *линейный функционал* $l_v(u) = \langle u,\, v\rangle$, *является обратимым линейным непрерывным оператором из* $H^{-s}(M)$ *в* $(H^s(M))^*$ *(последнее пространство считается наделенным естественной банаховой топологией).*

Доказательство. 1. Проверим прежде всего возможность продолжения формы (7.18) до спаривания (7.19). Отметим прежде всего, что операторы Λ_s, фигурирующие в определении пространств Соболева, мы можем считать симметричными в смысле заданной плотности, т. е. такими, что $\langle \Lambda_s u,\, v\rangle = \langle u,\, \Lambda_s v\rangle$ для любых $v,\, u \in C_0^\infty(M)$. В самом деле мы можем заменить оператор Λ_s на $\dfrac{1}{2}(\Lambda_s + {}^t\Lambda_s)$, что не меняет главного символа. Далее, будем считать, что $\Lambda_0 = I$ и оператор Λ_{-s} является параметриксом оператора Λ_s (этого можно добиться, если построить вначале все Λ_s при $s \geqslant 0$, сделав их симметричными, а затем рассмотреть их параметриксы Λ'_{-s} и взять в качестве Λ_{-s} симметризацию Λ'_{-s}: $\Lambda_{-s} = \dfrac{1}{2}(\Lambda'_{-s} + {}^t\Lambda'_{-s})$).

Из определения топологии в $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ вытекает, что достаточно продолжить форму (7.18) до спаривания

$$H^s(K) \times H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M) \to \mathbb{C}, \tag{7.20}$$

где K — любой компакт в M. Это, очевидно, возможно при $s = 0$. При $s \neq 0$ мы возьмем $u \in C_0^\infty(K)$, $v \in C^\infty(M)$ и запишем u в виде (7.8). Тогда

$$\langle u,\, v\rangle = \langle \Lambda_{-s}\Lambda_s u - R_s u,\, v\rangle = \langle \Lambda_s u,\, \Lambda_{-s} v\rangle - \langle R_s u,\, v\rangle, \tag{7.21}$$

откуда и следует продолжимость $\langle u,\, v\rangle$ до спаривания (7.20), поскольку операторы Λ_s и Λ_{-s} задают линейные непрерывные отображения

$$\Lambda_s\colon H^s(K) \to L^2(\hat K), \quad \Lambda_{-s}\colon H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M) \to L^2_{\mathrm{loc}}(M).$$

2. Пусть теперь $l(v)$ — линейный непрерывный функционал на $H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$. Покажем, что его можно записать в виде $l(v) = \langle u,\, v\rangle$, где $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. Прежде всего, поскольку $C^\infty(M) \subset H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$, причем вложение непрерывно, то ограничение $l(v)$ на $C^\infty(M)$ можно записать в виде $\langle u,\, v\rangle$, $u \in \mathscr{E}'(K)$, где K — компакт в M. При этом обобщенная функция u однозначно определена, и остается проверить лишь, что

$u \in H^s(K)$, т. е. что $\Lambda_s u \in L^2(\hat{K})$. Но

$$\langle \Lambda_s u,\, v\rangle = \langle u,\, \Lambda_s v\rangle = l(\Lambda_s v),$$

и поэтому искомое утверждение вытекает из того, что Λ_s непрерывно отображает $L^2_{\text{loc}}(M)$ в $H^{-s}_{\text{loc}}(M)$, а также из теоремы Рисса, обеспечивающей справедливость искомого утверждения при $s=0$.

Аналогично доказывается представимость функционала $l(u)$ на $H^s_{\text{comp}}(M)$ в виде $l(u) = \langle u,\, v\rangle$, где $v \in H^{-s}_{\text{loc}}(M)$.

3. Пусть теперь M — замкнутое многообразие. Проверим, что отображение $v \mapsto l_v(\cdot) = \langle \cdot,\, v\rangle$ является топологическим изоморфизмом $H^{-s}(M)$ на $(H^s(M))^*$. Это, очевидно, верно по теореме Рисса при $s=0$. Рассмотрим случай произвольного $s \in \mathbb{R}$. Поскольку биективность отображения $v \mapsto l_v(\cdot)$ уже доказана в п. 2, достаточно проверить его непрерывность. Но она сразу следует из (7.21). ■

7.8. Упражнения и задачи.

Упражнение 7.1. Проверить, что $\delta(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ при $s < -n/2$.

Упражнение 7.2. Показать, что оператор вложения $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ ни при каких s и s' $(s > s')$ не является компактным.

Упражнение 7.3. Пусть $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор ($\mathbb{Z}^n$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^n$). Если $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\,(= C_0^\infty(\mathbb{T}^n))$, то функцию f можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ik\cdot x}, \tag{7.22}$$

где f_k — коэффициенты Фурье, задаваемые формулами

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx. \tag{7.23}$$

Та же формула применима и при $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ $(= \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n))$, если под интегралом в (7.23) понимать значение функционала f на функции $e^{-ik\cdot x}$ (в этом случае ряд (7.22) сходится в слабой топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$).

Показать, что если $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, то условие $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$ равносильно тому, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 (1 + |k|^2)^s < +\infty, \tag{7.24}$$

причем левая часть (7.24) определяет квадрат нормы в $H^s(\mathbb{T}^n)$, эквивалентной любой из введенных выше норм.

Упражнение 7.4. Показать, что если A удовлетворяет условиям теоремы 6.4, то при любом $s \in \mathbb{R}$ оператор $A\colon H^s(K) \to H^s(\hat{K})$ является компактным оператором.

Упражнение 7.5. Проверить, что пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ дуальны друг к другу относительно билинейной формы $\langle f,\, g\rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx$.

Задача 7.1. Показать, что если N — подмногообразие коразмерности d многообразия M, то отображение ограничения $f \mapsto f|_N$ (определенное a priori для $f \in C^\infty(M)$) продолжается при $s > d/2$ до линейного непрерывного отображения

$$H^s_{\mathrm{loc}}(M) \to H^{s-d/2}_{\mathrm{loc}}(N).$$

Задача 7.2. Показать, что определенное в задаче 7.1 отображение является эпиморфизмом.

§ 8. Фредгольмовость, индекс, спектр

8.1. Простейшие свойства фредгольмовых операторов.

Определение 8.1. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A\colon E_1 \to E_2$ — линейный непрерывный оператор. Будем называть оператор A *фредгольмовым*, если $\dim \operatorname{Ker} A < +\infty$ и $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$ (напомним, что $\operatorname{Ker} A = \{x\colon x \in E_1,\ Ax = 0\}$, $\operatorname{Coker} A = E_2/\operatorname{Im} A$, где $\operatorname{Im} A = AE_1$, а факторпространство понимается в алгебраическом смысле, т. е. без учета топологии). *Индексом* фредгольмова оператора A называется число

$$\operatorname{index} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A. \tag{8.1}$$

Множество всех линейных непрерывных операторов $A\colon E_1 \to E_2$ будем обозначать $\mathscr{L}(E_1, E_2)$.

Множество всех фредгольмовых операторов $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ будем обозначать $\operatorname{Fred}(E_1, E_2)$.

Лемма 8.1. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ *и* $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$. *Тогда* $\operatorname{Im} A$ — *замкнутое подпространство в* E_2.

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{Ker} A$ — замкнутое подпространство в E_1. Поэтому в факторпространстве $E_1/\operatorname{Ker} A$ имеется естественная банахова структура. Оператор A индуцирует непрерывное отображение $A_1\colon E_1/\operatorname{Ker} A \to E_2$, причем $\operatorname{Im} A_1 = \operatorname{Im} A$. Отметим, что $\operatorname{Ker} A_1 = 0$. Теперь обозначим через C любое конечномерное подпространство E_2, для которого $E_2 = \operatorname{Im} A \dotplus C$ (прямая сумма в алгебраическом смысле). Определим оператор

$$\hat{A}\colon E_1/\operatorname{Ker} A \oplus C \to E_2, \tag{8.2}$$

переводящий пару $\{x, c\}$ в $A_1x + c \in E_2$. Ясно, что A биективен и непрерывен, если пространство слева рассматривать как банахову прямую сумму (например, с нормой $\|\{x, c\}\| = \|x\| + \|c\|$, где $\|c\|$ определяется с помощью произвольной нормы в C). По теореме Банаха оператор $\hat{A}$ будет топологическим изоморфизмом, но отсюда следует, что $\operatorname{Im} A$ замкнут в E_2, ибо подпространство $\hat{A}^{-1}(\operatorname{Im} A) = E_1/\operatorname{Ker} A \oplus 0$ замкнуто в $E_1/\operatorname{Ker} A \oplus C$. ■

С л е д с т в и е 8.1. *Если* $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$ *и* L_1 — *такое замкнутое подпространство в* E_1, *что* $E_1 = L_1 \dotplus \operatorname{Ker} A$, *то* A *определяет топологический изоморфизм* $A\colon L_1 \to \operatorname{Im} A$.

Отметим, что в случае $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$ подпространство L_1 указанного типа всегда существует, ибо по теореме Хана—Банаха мы можем продолжить тождественное отображение $\operatorname{Ker} A \to \operatorname{Ker} A$ до непрерывного линейного оператора $P_1\colon E_1 \to \operatorname{Ker} A$ и затем положить $L_1 = \operatorname{Ker} P_1$.

С л е д с т в и е 8.2. *Если* $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ *и* $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$, *то* $\dim \operatorname{Coker} A = \dim \operatorname{Ker} A^*$, *где* A^* — *сопряженный оператор* $A^*\colon E_2^* \to E_1^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (и тривиально), что

$$\operatorname{Ker} A^* = \{f\colon f \in E_2^*,\ \langle f, \operatorname{Im} A\rangle = 0\}.$$

Из замкнутости же $\operatorname{Im} A$ и теоремы Хана—Банаха вытекает, что

$$\operatorname{Im} A = \{x\colon x \in E_2,\ \langle \operatorname{Ker} A^*, x\rangle = 0\},$$

откуда и следует искомая формула. ■

Л е м м а 8.2. *Пусть* E — *банахово пространство и оператор* $T \in \mathscr{L}(E, E)$ *конечномерен, т. е.* $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$. *Тогда оператор* $I + T$ *фредгольмов, причем* $\operatorname{index}(I+T) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что существует разложение $E = L_0 \dotplus L_1$, где L_0 — замкнутое подпространство, $L_0 \subset \operatorname{Ker} T$, $L_1 \supset \operatorname{Im} T$, $\dim L_1 < +\infty$. Тогда $(I+T)|_{L_0} = I|_{L_0}$, $(I+T)\,L_1 \subset L_1$, так как $TL_1 \subset \operatorname{Im} T \subset L_1$. Таким образом, L_0 и L_1 — инвариантные подпространства для оператора $I+T$, причем $\operatorname{Im}(I+T) \supset L_0$, $\operatorname{Ker}(I+T) \subset L_1$. Поэтому оператор $I+T$ фредгольмов, причем $\operatorname{index}(I+T)$ равен индексу оператора $I+T$, рассматриваемого как оператор из L_1 в L_1, так что дело сводится к тривиальному утверждению из линейной алгебры. ■

Л е м м а 8.3. *Если* $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, *то существует такой оператор* $B \in \operatorname{Fred}(E_2, E_1)$, *что*

$$BA = I - P_1, \quad AB = I - P_2, \tag{8.3}$$

где P_1 — *проектор на* $\operatorname{Ker} A$, *а* $I - P_2$ — *проектор на* $\operatorname{Im} A$ (*так что* P_1, P_2 — *конечномерные проекторы*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L_1 — замкнутое дополнение к $\operatorname{Ker} A$ в E_1, L_2 — любое дополнение к $\operatorname{Im} A$. Определим оператор B так, чтобы были выполнены условия

$$BA|_{L_1} = I|_{L_1}, \quad B|_{L_2} = 0.$$

В силу следствря 8.1 ясно, что $B \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$. Кроме того, очевидно, что $\operatorname{Ker} B = L_2$, $\operatorname{Im} B = L_1$. Отсюда следует фредгольмовость B. Условия (8.3) проверяются непосредственно. ■

Лемма 8.4. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, *и существуют такие операторы* $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$, *что*

$$B_1 A = I + T_1, \quad AB_2 = I + T_2, \tag{8.4}$$

где T_1, T_2 — *конечномерные операторы. Тогда оператор* A *фредгольмов.*

Доказательство. Утверждение следует из очевидных включений

$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(B_1 A) = \operatorname{Ker}(I + T_1),$$
$$\operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im}(AB_2) = \operatorname{Im}(I + T_2),$$

и леммы 8.2. ■

Лемма 8.5. *Пусть* $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, $B \in \operatorname{Fred}(E_2, E_3)$. *Тогда* $BA \in \operatorname{Fred}(E_1, E_3)$, *причем*

$$\operatorname{index} BA = \operatorname{index} A + \operatorname{index} B. \tag{8.5}$$

Доказательство. Мы покажем прежде всего, что существуют такие замкнутые подпространства $L_j \subset E_j$, $j = 1, 2, 3$, что $\operatorname{Ker} A|_{L_1} = 0$, $AL_1 = L_2$, $\operatorname{Ker} B|_{L_2} = 0$, $BL_2 = L_3$, причем $\operatorname{codim} L_j < +\infty$, $j = 1, 2, 3$ *). В самом деле, если L_1' — замкнутое дополнение к $\operatorname{Ker} A$ в E_1, L_2' — замкнутое дополнение к $\operatorname{Ker} B$ в E_2, то мы можем положить

$$L_2 = L_2' \cap \operatorname{Im} A, \quad L_1 = \left(A|_{L_1'}\right)^{-1}(L_2), \quad L_3 = BL_2.$$

Теперь отметим следующий факт: пусть L_1, L_2 — замкнутые подпространства в E_1, E_2, $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, $\operatorname{Ker} A|_{L_1} = 0$ и $AL_1 = L_2$; тогда, если обозначить через $\hat{A}$ отображение $\hat{A}: E_1/L_1 \to E_2/L_2$, индуцированное оператором A, то $\hat{A} \in \operatorname{Fred}(E_1/L_1, E_2/L_2)$ и $\operatorname{index} A = \operatorname{index} \hat{A}$. Поэтому использование построенных выше подпространств $L_j \subset E_j$ позволяет свести доказательство формулы (8.5) к случаю, когда $\dim E_j < +\infty$, $j = 1, 2, 3$, очевидному ввиду того, что если $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и $\dim E_j < +\infty$, $j = 1, 2$, то $\operatorname{index} A = \dim E_1 - \dim E_2$. ■

Предложение 8.1. $\operatorname{Fred}(E_1, E_2)$ *является открытым подмножеством* $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ (*в равномерной операторной топологии, т. е. топологии, определяемой нормой операторов*). *При этом функция*

$$\operatorname{index}: \operatorname{Fred}(E_1, E_2) \to \mathbb{Z}$$

непрерывна (*т. е. постоянна на всех связных компонентах* $\operatorname{Fred}(E_1, E_2)$).

---

*) Если L — подпространство E, то по определению $\operatorname{codim} L = \dim(E/L)$ ($\operatorname{codim} L$ называется коразмерностью L в E). Здесь, в частности, имеется в виду, что $\operatorname{codim} L_j = \dim E_j/L_j$, $j = 1, 2, 3$.

В частности, если A_t — непрерывная (по норме) операторная функция $t \in [0, 1]$ со значениями в $\mathrm{Fred}\,(E_1, E_2)$, *то* $\mathrm{index}\, A_0 = \mathrm{index}\, A_1$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Fred}\,(E_1, E_2)$. Нужно доказать существование такого числа $\varepsilon > 0$, что если $D \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и $\|D\| < \varepsilon$, то $A + D \in \mathrm{Fred}\,(E_1, E_2)$ и $\mathrm{index}\,(A + D) = \mathrm{index}\, A$.

Построим такой оператор $B \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$, что выполнены условия

$$BA = I + T_1', \quad AB = I + T_2', \tag{8.6}$$

где T_1', T_2' — конечномерные операторы (это возможно по лемме 8.3). Проверим, что можно взять $\varepsilon = \|B\|^{-1}$. В самом деле, пусть тогда $\|D\| < \varepsilon$. Имеем $B(A + D) = I + BD + T_1'$, и если положить $B_1 = (I + BD)^{-1} B$, то $B_1(A + D) = I + T_1$, где T_1 конечномерен. Отметим, что $\mathrm{index}\, B_1 = \mathrm{index}\, B$. Аналогично строится такой оператор B_2, что $(A + D)\, B_2 = I + T_2$, где T_2 конечномерен. По лемме 8.4 оператор $A + D$ фредгольмов. По по леммам 8.5 и 8.2 мы имеем

$$\mathrm{index}\,(A + D) = -\mathrm{index}\ B_1 = -\mathrm{index}\ B = \mathrm{index}\ A. \qquad \blacksquare$$

В дальнейшем через $C(E_1, E_2)$ мы будем обозначать множество компактных линейных операторов из E_1 в E_2.

Лемма 8.6. *Пусть E — банахово пространство, $R \in C(E, E)$. Тогда* $I + R \in \mathrm{Fred}\,(E, E)$ *и* $\mathrm{index}\,(I + R) = 0$.

Доказательство. Поскольку $I|_{\mathrm{Ker}\,(I+R)} = -R|_{\mathrm{Ker}\,(I+R)}$, то единичный шар в $\mathrm{Ker}\,(I + R)$ компактен, и потому $\dim\, \mathrm{Ker}\,(I + R) < +\infty$. Далее, поскольку оператор R^* также компактен, то $\dim\, \mathrm{Ker}\,(I + R)^* < +\infty$, и для доказательства фредгольмовости $(I + R)$ остается проверить лишь замкнутость $\mathrm{Im}\,(I + R)$ (ибо тогда $\dim\, \mathrm{Coker}\,(I + R) = \dim\, \mathrm{Ker}\,(I + R)^*$).

Пусть $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$ и $y_n = (I + R)\, x_n \to y$ при $n \to +\infty$. Надо доказать существование такого $x \in E$, что $(I + R)\, x = y$. Пусть L — любое замкнутое подпространство, дополняющее $\mathrm{Ker}\,(I + R)$ в E. Добавляя к x_n векторы из $\mathrm{Ker}\,(I + R)$ (что не меняет y_n), мы можем считать, что $x_n \in L$ при всех n.

Покажем, что последовательность x_n тогда будет ограниченной. В самом деле, если это не так, то, заменяя $\{x_n\}$ на подпоследовательность, можно считать, что $\|x_n\| \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Положим тогда $x_n' = x_n / \|x_n\|$, $y_n' = (I + R)\, x_n'$. Имеем $y_n' \to 0$ при $n \to +\infty$, а поскольку $\|x_n'\| = 1$, то можно считать, что существует предел $\lim\limits_{n \to +\infty} Rx_n'$. Но тогда существует и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n' = -\lim\limits_{n \to +\infty} Rx_n' = x$, причем ясно, что $\|x\| = 1$, $x \in L$, $(I + R)x = 0$, что противоречит предположению о выборе L.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Но тогда можно считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} Rx_n$ и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y - \lim\limits_{n\to+\infty} Rx_n$. Обозначая $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, мы будем иметь, очевидно, $(I+R)\,x = y$, что доказывает замкнутость $\operatorname{Im}(I+R)$ и, значит, фредгольмовость $I+R$.

В силу предложения 8.1 при $t \in [0, 1]$ имеем $\operatorname{index}(I+tR) = \mathrm{const}$, откуда $\operatorname{index}(I+R) = \operatorname{index} I = 0$. ■

Предложение 8.2. *Пусть $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и существуют такие операторы B_1, B_2, что*

$$B_1 A = I + R_1, \quad AB_2 = I + R_2, \tag{8.7}$$

где $R_j \in C(E_j, E_j)$, $j = 1, 2$. Тогда $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$.

Доказательство получается из леммы 8.6 аналогично доказательству леммы 8.4. ■

Предложение 8.3. *Пусть $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, $R \in C(E_1, E_2)$. Тогда $A + R \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, причем $\operatorname{index}(A+R) = \operatorname{index} A$.*

Доказательство очевидно из предложения 8.2 и лемм 8.5 и 8.6. ■

8.2. Фредгольмовость и индекс эллиптических операторов на замкнутом многообразии.

Теорема 8.1. *Пусть M — замкнутое многообразие, $A \in HL^{m,m}_{\rho,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. Построим при любом $s \in \mathbb{R}$ оператор $A_s \in \mathscr{L}(H^s(M), H^{s-m}(M))$, являющийся продолжением оператора A по непрерывности.*

Тогда

а) $A_s \in \operatorname{Fred}(H^s(M), H^{s-m}(M))$;

б) $\operatorname{Ker} A_s \subset C^\infty(M)$, *тем самым* $\operatorname{Ker} A_s$ *не зависит от s и будет обозначаться просто* $\operatorname{Ker} A$;

в) $\operatorname{index} A_s$ *не зависит от s (мы будем обозначать его просто* $\operatorname{index} A$) *и выражается формулой*

$$\operatorname{index} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^*, \tag{8.8}$$

где A^* — формально сопряженный ПДО (*см.* § 3) *в смысле скалярного произведения, задаваемого произвольной гладкой плотностью*;

г) *если $D \in L^{m'}_{\rho,\delta}(M)$, где $m' < m$, то* $\operatorname{index}(A+D) = \operatorname{index} A$.

Доказательство. По теореме 5.1 можно построить параметрикс $B \in HL^{-m,-m}_{\rho,\delta}(M)$ оператора A. Операторы $R_j \in L^{-\infty}(M)$ в силу теоремы 7.5 продолжаются до операторов $R_{j,s} \in C(H^s(M), H^s(M))$ при любом $s \in \mathbb{R}$. Теперь из предложения 8.2 следует фредгольмовость всех операторов A_s.

Далее, из теоремы 5.2 следует утверждение п. б) теоремы, а поскольку $A^* \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}$, то мы получаем и утверждение п. в).

Наконец, утверждение п. г) вытекает из предложения 8.3, поскольку если $D \in L_{\rho,\delta}^{m'}(M)$, $m' < m$, то $D \in C(H^s(M), H^{s-m}(M))$ в силу теоремы 7.5. ■

Замечание 8.1. Утверждение этой теоремы верно, конечно, не только для скалярных операторов, но и для операторов, действующих в сечениях векторных расслоений.

Замечание 8.2. Для классических эллиптических ПДО утверждение п. г) означает, что индекс зависит лишь от главного символа. Из теоремы 6.2 легко вывести, что индекс не меняется при любых непрерывных деформациях главного символа в классе однородных эллиптических символов. Это утверждение важно в теории индекса эллиптических операторов.

8.3. Спектр (простейшие сведения). Пусть M — замкнутое многообразие, $A \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, $m > 0$. Рассмотрим в пространстве $L^2(M)$ неограниченный линейный оператор, определяемый оператором A, если считать областью определения пространство $H^m(M)$. Мы будем обозначать этот неограниченный оператор через A_0 или иногда просто через A, если не опасна возникающая двусмысленность.

Предложение 8.4. *Оператор A_0 замкнут, т. е. если $u_n \in H^m(M)$, $n = 1, 2, \ldots$, и в $L^2(M)$ существуют пределы $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ и $f = \lim\limits_{n\to\infty} Au_n$, то $u \in H^m(M)$ и $Au = f$.*

Доказательство. Поскольку из сходимости в $L^2(M)$ следует сходимость в $\mathscr{D}'(M)$, а оператор A непрерывен в $\mathscr{D}'(M)$ (в смысле, например, слабой топологии), то мы имеем $Au = f$, а тогда $u \in H^m(M)$ в силу теоремы 7.2. ■

Из того, что $C^\infty(M)$ плотно в $H^m(M)$ (в топологии $H^m(M)$), вытекает

Следствие 8.3. *Оператор A_0 является замыканием (в $L^2(M)$) оператора $A|_{C^\infty(M)}$.*

Определение 8.2. *Спектр* оператора A — это подмножество $\sigma(A)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемое так: если $\lambda \in \mathbb{C}$, то условие $\lambda \notin \sigma(A)$ равносильно тому, что оператор $A_0 - \lambda I$ имеет в $L^2(M)$ ограниченный всюду определенный обратный $(A_0 - \lambda I)^{-1}$.

Легко проверяется, что $\sigma(A)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$, причем $(A_0 - \lambda I)^{-1}$ — голоморфная операторная функция от λ на $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ со значениями в $\mathscr{L}(L^2(M), L^2(M))$. Эта функция $R_\lambda = (A_0 - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A.

Предложение 8.5. *Пусть на M фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu(x)$. Тогда условие $\lambda \notin \sigma(A)$ равносильно тому, что* $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \operatorname{Ker}(A^* - \bar{\lambda} I) = 0$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 8.1, поскольку $(A-\lambda I) \in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}$ ввиду условия $m>0$. ■

Теорема 8.2 (Теорема об обратном операторе). *Пусть $A \in L^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, $m>0$ и оператор A_0 построен по A, как описано выше. Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$. Тогда оператор $(A_0-\lambda I)^{-1}$ является продолжением по непрерывности (с $C^\infty(M)$) или ограничением (с $\mathscr{D}'(M)$) оператора из $HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$ (мы будем обозначать его $(A-\lambda I)^{-1}$). В частности, оператор $(A_0-\lambda I)^{-1}$ компактен в $L^2(M)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\lambda = 0$. Пусть $B \in HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$, B — параметрикс оператора A. В частности,

$$AB = I - R, \tag{8.9}$$

где R — оператор с гладким ядром $R(x,\,y)$ (считаем для простоты фиксированной гладкую положительную плотность на M, тогда ядро $R(x,\,y)$ — это обычная функция на $M \times M$).

Из (8.9) следует, что

$$A^{-1} = B + A^{-1}R, \tag{8.10}$$

и остается проверить, что $A^{-1}R$ — это оператор с гладким ядром. Но оператор A^{-1} по теореме 7.2 отображает $H^s(M)$ в $H^{s+m}(M)$ при любом $s \in \mathbb{R}$, и притом непрерывно по теореме о замкнутом графике. По теореме вложения 7.6 оператор A^{-1} непрерывно отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$. Но тогда оператор $A^{-1}R$ задается гладким ядром $R_1(x,\,y)$, где $R_1(x,\,y) = [A^{-1}R(\cdot,\,y)](x)$. ■

Теорема 8.3. *Пусть на замкнутом многообразии M фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu(x)$, $A \in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ и $m>0$. Пусть $A^* = A$. Тогда A_0 — самосопряженный оператор в $L^2(M)$, причем в $L^2(M)$ существует полная ортонормированная система $\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, собственных функций оператора A_0. При этом $\varphi_j \in C^\infty(M)$, $A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, собственные значения λ_j вещественны и $|\lambda_j| \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством всех собственных значений.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ ввиду предложения 8.5, поскольку оператор A симметричен на $C^\infty(M)$ и не может иметь там невещественных собственных значений.

Покажем теперь, что $\sigma(A) \neq \mathbb{R}$. Если бы было $\sigma(A) = \mathbb{R}$, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ можно было бы указать такую функцию $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$, что

$A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$ и $\|\varphi_\lambda\| = 1$. Но тогда $(\varphi_\lambda, \varphi_\mu) = 0$ при $\lambda \neq \mu$ из-за симметричности A, что противоречит сепарабельности $L^2(M)$.

Возьмем теперь $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$. По теореме 8.2 оператор $R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}$ является компактным самосопряженным оператором в $L^2(M)$. По известной теореме функционального анализа он имеет ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ из собственных функций, причем если r_j — собственные значения, то $r_j \to 0$ при $j \to +\infty$.

Заметим теперь, что $r_j \neq 0$ (так как $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)^{-1} = 0$). Поэтому условие $R_{\lambda_0}\varphi_j = r_j\varphi_j$ можно переписать в виде

$$(A - \lambda_0 I)\,\varphi_j = r_j^{-1}\varphi_j$$

или

$$A\varphi_j = (r_j^{-1} + \lambda_0)\,\varphi_j. \tag{8.11}$$

Из (8.11) ясно, что $\varphi_j \in C^\infty(M)$ и φ_j — собственные функции оператора A с собственными значениями $\lambda_j = r_j^{-1} + \lambda_0$. Очевидно, что $|\lambda_j| \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Остальные утверждения теоремы 8.3 очевидны. Факт совпадения спектра $\sigma(A)$ с множеством $\{\lambda_j\}$ следует из предложения 8.5, а самосопряженность оператора A — из представления $A = R_{\lambda_0}^{-1} + \lambda_0 I$. ■

Следующая теорема распространяет одно из утверждений теоремы 8.3 на несамосопряженный случай.

Теорема 8.4. *Пусть* $A \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}(M)$, $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$ *и* $m > 0$. *Тогда для спектра* $\sigma(A)$ *выполнена одна из следующих двух возможностей*:

а) $\sigma(A) = \mathbb{C}$ (*это, в частности, так, если* $\operatorname{index} A \neq 0$);

б) $\sigma(A)$ — *дискретное (быть может, пустое) подмножество* $\mathbb{C}$ (*подмножество без предельных точек*).

При этом, если справедливо б) *и* $\lambda_0 \in \sigma(A)$, *то существует такое разложение* $L^2(M) = E_{\lambda_0} \dotplus E'_{\lambda_0}$, *что выполнены условия*:

1) $E_{\lambda_0} \subset C^\infty(M)$, $\dim E_{\lambda_0} < +\infty$, E_{λ_0} — *инвариантное подпространство для оператора* A, *причем существует такое натуральное* $N > 0$, *что* $(A - \lambda_0 I)^N E_{\lambda_0} = 0$ (*иными словами, оператор* $A|_{E_{\lambda_0}}$ *имеет своим собственным значением лишь* λ_0 *и подобен прямой сумме жордановых клеток порядков* $\leqslant N$);

2) E'_{λ_0} — *замкнутое подпространство в* $L^2(M)$, *инвариантное относительно* A_0 (*т. е.* $A(D_{A_0} \cap E'_{\lambda_0}) \subset E'_{\lambda_0}$), *причем если через* A'_{λ_0} *обозначить ограничение* $A_0|_{E'_{\lambda_0}}$ (*понимаемое как неограниченный оператор в* E'_{λ_0} *с областью определения* $D_{A_0} \cap E'_{\lambda_0}$), *то оператор* $A'_{\lambda_0} - \lambda_0 I$ *имеет ограниченный обратный* (*или, иными словами,* $\lambda_0 \notin \sigma(A|_{E'_{\lambda_0}})$).

Доказательство. 1. Пусть $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$. Докажем, что $\sigma(A)$ — дискретное подмножество $\mathbb{C}$. Существует точка $\lambda_0 \notin \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Без ущерба для общности можно предположить, что $\lambda_0 = 0$, так что оператор A_0

имеет по теореме 8.2 компактный обратный оператор A_0^{-1}. Но ввиду соотношения $A_0 - \lambda I = (I - \lambda A_0^{-1})\, A_0$ включение $\lambda \in \sigma(A)$ равносильно тому, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda^{-1} \in \sigma(A_0^{-1})$. Дискретность $\sigma(A)$ вытекает теперь из того, что $\sigma(A_0^{-1})$ может иметь точкой накопления лишь 0.

2. Пусть $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Опять-таки можно без ущерба для общности считать, что $\lambda_0 = 0$. Пусть Γ_0 — контур в плоскости $\mathbb{C}$, обходящий 0 и не содержащий внутри себя других точек $\sigma(A)$ (например, окружность достаточно малого радиуса с центром в точке 0). Рассмотрим оператор

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} R_\lambda \, d\lambda. \tag{8.12}$$

Стандартное рассуждение (см. Рисс, Секефальви-Надь [1], гл. XI) показывает, что P_0 — проектор, конечномерный в силу компактности R_λ, перестановочный со всеми операторами R_λ (и с оператором A_0 в том смысле, что $P_0 A_0 \subset A_0 P_0$) и такой, что если $E_{\lambda_0} = P_0(L^2(M))$, $E'_{\lambda_0} = (I - P_0)\,(L^2(M))$, то выполнены заключения 1) и 2) теоремы 8.4.

Мы предоставляем читателю в виде упражнения все относящиеся сюда детали. Отметим лишь, что включение $E_{\lambda_0} \subset C^\infty(M)$ вытекает из того, что $A_0^N E_{\lambda_0} = 0$, если принять во внимание эллиптичность A и воспользоваться теоремой регулярности 5.2. ■

8.4. Задачи.

Задача 8.1. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство, $\pi_0(\mathrm{Fred}\,(E,\, E))$ — множество связных компонент пространства $\mathrm{Fred}\,(E,\, E)$, наделенное полугрупповой структурой, индуцированной умножением операторов. Показать, что взятие индекса задает изоморфизм

$$\mathrm{index}\colon \pi_0(\mathrm{Fred}\,(E,\, E)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

Указание. Оператор A индекса 0 может быть записан в виде $A = A_0 + T$, где A_0 обратим, а T конечномерен. Доказать (с помощью полярного разложения) и использовать связность группы всех обратимых операторов в E.

Во всех следующих задачах M — замкнутое многообразие, $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$ и $m > 0$.

Задача 8.2. Пусть $A \in HL^{m,\, m_0}_{\rho,\, \delta}(M)$. Доказать, что A — фредгольмов оператор в $C^\infty(M)$, т. е. $\dim \mathrm{Ker}\, A < +\infty$, $AC^\infty(M)$ замкнуто в $C^\infty(M)$ и $\dim \mathrm{Coker}\, A < +\infty$, где $\mathrm{Coker}\, A = C^\infty(M)/AC^\infty(M)$. Показать, что $AC^\infty(M)$ состоит из всех $f \in C^\infty(M)$, для которых $(f,\, g) = 0$ при любом $g \in \mathrm{Ker}\, A^*$ (здесь $(f,\, g)$ — скалярное произведение, задаваемое гладкой положительной плотностью, и A^* — сопряженный ПДО относительно этого скалярного произведения).

З а д а ч а 8.3. Пусть $A \in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(M)$ и $m_0 > 0$. Пусть на M задана гладкая положительная плотность, определяющая скалярное произведение (f, g) и формально сопряженный ПДО A^*. Предположим, что $A = A^*$. Доказать, что оператор A_0, являющийся замыканием оператора $A|_{C^\infty(M)}$, самосопряжен в гильбертовом смысле в пространстве $L^2(M)$.

З а д а ч а 8.4. Пусть $A \in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(M)$, A^* — формально сопряженный ПДО, A_0, A_0^* — замыкания $A|_{C^\infty(M)}$ и $A^*|_{C^\infty(M)}$ в $L^2(M)$. Доказать, что A_0 и A_0^* сопряжены в гильбертовом смысле в пространстве $L^2(M)$.

У к а з а н и е. Рассмотреть матричный ПДО $\mathfrak{A}$ вида

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 8.5. Привести пример оператора $A \in HL^{m,m}_{1,0}(M)$, для которого $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

З а д а ч а 8.6. Пусть дана последовательность гильбертовых пространств E_j и линейных непрерывных операторов d_j:

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{N-2}} E_{N-1} \xrightarrow{d_{N-1}} E_N \xrightarrow{d_N} 0. \tag{8.13}$$

Эта последовательность называется *комплексом*, если $d_{j+1} \circ d_j = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots, N-2$. Положим

$$Z^j = \operatorname{Ker} d_j, \quad B^j = \operatorname{Im} d_{j-1}, \quad H^j = Z^j / B^j, \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

(если (8.13) — комплекс, то $B^j \subset Z^j$). Пространства H^j называются *когомологиями* комплекса (8.13). Комплекс называется *фредгольмовым*, если $\dim H^j < +\infty$ при всех $j = 0, 1, \ldots, N$.

а) Доказать, что если комплекс (8.13) фрегольмов, то B^j — замкнутые подпространства в Z^j.

б) Пусть $\Delta_j = \delta_j d_j + d_{j-1}\delta_{j-1}$, где $\delta_j = d_j^*$. Операторы Δ_j называются *лапласианами* комплекса (8.13) (или операторами Лапласа—Ходжа). Положим $\Gamma^j = \operatorname{Ker} \Delta_j$. Доказать, что для фредгольмовости комплекса (8.13) необходимо и достаточно, чтобы все Δ_j были фредгольмовыми операторами в E_j, $j = 0, 1, \ldots, N$. При этом

$$\dim H^j = \dim \Gamma^j.$$

Точнее, $\Gamma^j \subset Z^j$, причем отображение $\Gamma^j \to H^j$, индуцированное канонической проекцией $Z^j \to H^j$, является изоморфизмом (в случае фредгольмова комплекса).

в) Положим теперь

$$\chi(E)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\ \dim H^j$$

(*эйлерова характеристика* фредгольмова комплекса E). Доказать, что если $N=1$, то эйлерова характеристика комплекса $0\to E_0\xrightarrow{d_0}E_1\to 0$ есть просто индекс оператора d_0.

Доказать, что если $\dim E_j<+\infty$, $j=0,\,1,\,\ldots,\,N$, то

$$\chi(E)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\ \dim E_j.$$

г) Доказать, что $\chi(E)$ не меняется при равномерной деформации всех операторов d_j, если в процессе этой деформации последовательность (8.13) все время остается фредгольмовым комплексом.

З а д а ч а 8.7. Пусть V_j $(j=0,1,\ldots,N)$ — векторные расслоения над замкнутым многообразием M, $H^s(M,\,V_j)$ — соболевские пространства их сечений над M. Пусть $d_j\colon C^\infty(M,\,V_j)\to C^\infty(M,\,V_{j+1})$ — классические ПДО одинаковых порядков m. Пусть $T_0^*(M)$ — кокасательное расслоение на M без нулевого сечения, $\pi_0\colon T_0^*M\to M$ — естественная проекция. Предположим, что отображения

$$0\xrightarrow{d_{-1}}C^\infty(M,\,V_0)\xrightarrow{d_0}C^\infty(M,\,V_1)\xrightarrow{d_1}\ldots\xrightarrow{d_{N-1}}C^\infty(M,\,V_N)\xrightarrow{d_N}0 \qquad (8.14)$$

образуют комплекс. Пусть $\sigma^0_{d_j}:\pi_0^*V_j\to\pi_0^*V_{j+1}$ — главные символы операторов d_j (однородные функции по ξ порядка m). Комплекс (8.14) называется *эллиптическим*, если последовательность расслоений

$$0\to\pi_0^*V_0\xrightarrow{\sigma^0_{d_0}}\pi_0^*V_1\xrightarrow{\sigma^0_{d_1}}\ldots\xrightarrow{\sigma^0_{d_{N-1}}}\pi_0^*V_N\to 0$$

точна (т. е. точны последовательности векторных пространств над каждой точкой $(x,\,\xi)\in T_0^*M$).

а) Доказать, что эллиптичность комплекса (8.14) равносильна эллиптичности всех лапласианов $\Delta_j=\delta_j d_j+d_{j-1}\delta_{j-1}$, где δ_j — ПДО, сопряженный к d_j при каком-нибудь введении плотности на M и метрики в расслоениях V_j.

б) Доказать, что если (8.14) — эллиптический комплекс, то при любом $s\in\mathbb{R}$ комплекс

$$0\xrightarrow{d_{-1}}H^s(M,\,V_0)\xrightarrow{d_0}H^{s-m}(M,\,V_1)\xrightarrow{d_1}\ldots\xrightarrow{d_{N-1}}H^{s-Nm}(M,\,V_n)\xrightarrow{d_N}0$$

является фредгольмовым, причем размерности его когомологий (и, следовательно, эйлерова характеристика) не зависят от s. Сами когомологии можно определить также как когомологии комплекса (8.14), т. е. положить

$$H^j = \operatorname{Ker} d_j|_{C^\infty(M,V_j)}/d_{j-1}(C^\infty(M, V_{j-1})).$$

З а д а ч а 8.8. Показать, что комплекс де Рама над n-мерным вещественным многообразием M

$$0 \to \Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^n(M) \to 0$$

($\Lambda^j(M)$ — пространство гладких внешних j-форм над M, d — внешний дифференциал) и комплекс Дольбо над комплексным многообразием M комплексной размерности n

$$0 \to \Lambda^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,n}(M) \to 0$$

($\Lambda^{p,q}(M)$ — пространство гладких форм типа (p, q) на M, $\bar\partial$ — оператор Коши—Римана—Дольбо) являются эллиптическими комплексами.

Вывести отсюда конечномерность когомологий де Рама и Дольбо в случае, когда M замкнуто.