## 93. Взаимно-однозначные соответствия. Счётные множества

Если между элементами (конечных) множеств $A$ и $B$ можно установить *взаимно однозначное соответствие* (каждому элементу одного соответствует ровно один элемент другого), то множества содержат равное число элементов.

**93.1.** На окружности выбрано 100 точек. Доказать, что число 57-угольников с вершинами в выбранных точках равно количеству 43-угольников с вершинами в выбранных точках.

**93.2.** Доказать, что количество последовательностей длины 100 из нулей и единиц, в которых число единиц нечётно, равно количеству последовательностей длины 100 из нулей и единиц, в которых число единиц чётно. Какому тождеству для биномиальных коэффициентов соответствует это утверждение?

**93.3.** Для каждого целого положительного числа $n$ подсчитаем число его целых положительных делителей. Доказать, что это число нечётно тогда и только тогда, когда $n$ — точный квадрат.

**93.4.*** Координатная плоскость разбита на клетки размера $1 \times 1$ (углы клеток имеют целые координаты). (**а**) Доказать, что число путей (по сторонам клеток) длины 18 из точки $(1,0)$ в точку $(10,9)$, имеющих хотя бы одну общую точку с диагональю $y = x$, равно числу всех путей длины 18 из точки $(1,0)$ в точку $(9,10)$. (**б**) Найти число путей длины 18 из точки $(1,0)$ в точку $(10,9)$, проходящих целиком в области $y < x$. (**в**) Найти количество различных последовательностей из 10 нулей и 10 единиц, в которых любой начальный отрезок содержит не меньше нулей, чем единиц. Какую долю составляют они среди всех последовательностей из 10 нулей и 10 единиц?

**93.5.** Доказать, что число способов разрезать $n$-угольник на треугольники, проведя непересекающиеся диагонали, равно числу способов расстановок скобок в произведении $n-1$ сомножителей (без изменения их порядка). (Например, пятиугольник можно разрезать на треугольники пятью способами, и в произведении $abcd$ есть пять расстановок скобок: $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$, $((ab)c)d$, $a((bc)d)$, $a(b(cd))$.) [Указание: сомножители можно писать на сторонах, а произведения — на диагоналях.]

**93.6.*** Найти формулу для числа способов в предыдущей задаче.

Взаимно однозначное соответствие можно устанавливать и между бесконечными множествами — если для данных двух множеств это возможно, множества называют *равномощными* (имеющими равную *мощность*).

**93.7.** Установить взаимно однозначное соответствие (**а**) между множеством целых чисел и множеством чётных целых чисел; (**б**) между множеством целых чисел и множеством неотрицательных целых чисел; (**в**) между множеством простых чисел и множеством составных натуральных чисел; (**г**) между множеством целых чисел и множеством точек на плоскости, обе координаты которых целые.

**93.8.** Установить взаимно однозначное соответствие (**а**) между отрезками разной длины (например, $[0,1]$ и $[2,4]$ на числовой оси); (**б**) между интервалом $(0,1)$ и лучом $(1,+\infty)$ на числовой оси; (**в**) между интервалом $(0,1)$ и всей числовой осью $\mathbb{R}$; (**г**) между окружностью и границей квадрата; (**д**) между кругом и квадратом (внутренности включаются).

**93.9.** Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством всех подмножеств натурального ряда.

**93.10.** Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством всех бесконечных последовательностей, составленных из цифр $0, 1, 2, 3$.

**93.11*** Тот же вопрос, если вместо цифр $0, 1, 2, 3$ рассматривать цифры $0, 1, 2$.

**93.12*** Указать многочлен $P(x, y)$, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множеством пар неотрицательных целых чисел и множеством неотрицательных целых чисел.

Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел (другими, словами, если его элементы можно перенумеровать).

**93.13.** Доказать, что любые два счётных множества равномощны.

**93.14.** Доказать, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

**93.15.** Доказать, что всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

**93.16.** Доказать, что объединение двух непересекающихся счётных множеств счётно.

**93.17.** Доказать, что объединение любых двух счётных множеств счётно.

**93.18.** Доказать, что объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

**93.19.** Доказать, что (**а**) множество всех пар $(m, n)$ натуральных чисел (точек на плоскости, обе координаты которых натуральные) счётно; (**б**) множество рациональных чисел (отношений целых чисел) счётно; (**в**) множество всех периодических десятичных дробей счётно; (**г**) множество всех конечных последовательностей нулей и единиц счётно; (**д**) множество всех конечных последовательностей, элементами которых являются целые числа, счётно.

**93.20.** Число корней многочлена степени $n$ не превосходит $n$. Используя этот факт, доказать, что множество *алгебраических* чисел, то есть чисел, являющихся корнями ненулевых многочленов с целыми коэффициентами, счётно.

**93.21.** Доказать, что если $A$ бесконечно, а $B$ конечно или счётно, то $A \cup B$ равномощно $A$.

**93.22.** Установить взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и полуинтервалом $[0, 1)$.

**93.23.** Доказать, что интервал (на числовой оси), отрезок, вся числовая ось и окружность равномощны.

**93.24.** Доказать, что множество всех точек плоскости равномощно множеству всех прямых на плоскости.

**93.25.** Доказать, что открытый круг (круг без границы) равномощен кругу с границей.

**93.26.** Доказать, что множество всех точек плоскости равномощно множеству всех точек квадрата.

**93.27.** Доказать, что множество иррациональных чисел равномощно множеству всех действительных чисел.

**93.28.** Доказать, что $[0, 1] \cup [2, 3]$ равномощно $[0, 1]$.

**93.29.** (Определение бесконечности по Дедекинду) Доказать, что множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно своей части (не совпадающей со всем множеством).

**93.30*** Выбрано некоторое множество интервалов на прямой, причём известно, что любые два интервала из этого множества не имеют общих точек. Доказать, что это множество конечно или счётно.

**93.31**.* На плоскости нарисовано некоторое множество непересекающихся восьмёрок (они не имеют общих точек, но одна может целиком лежать внутри другой). Доказать, что это множество конечно или счётно.

**93.32**.* Доказать, что множество точек плоскости, у которых координата $x$ целая, равномощно прямой.

**93.33**.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчётно, найдя способ для любого счётного множества последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ указать последовательность, отличающуюся от всех $\alpha_i$.

**93.34**.* (а) Построить взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и лучом $(1, +\infty)$, сохраняющее порядок (бóльшие числа соответствуют бóльшим). (б) Можно ли сделать это для множеств $(0, 1)$ и $[0, 1)$? (в) для множеств $\mathbb{Z}$ (целые числа) и $\mathbb{Q}$ (рациональные числа)? (г) для множеств $\mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$? (д) для множества рациональных чисел и множества конечных десятичных дробей (то есть чисел вида $m/10^n$ при целых $m$ и $n$)?

**93.35**.* Можно ли построить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и плоскости, если требуется, чтобы расстояния между соответствующими парами точек отличались не более чем в 10 раз?

**93.36**.* Существует ли взаимно однозначное соответствие $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, при котором $f(5n+1) = 3f(n) + 1$ для всех $n$?

**93.37**.* Доказать, что всякая функция $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ может быть представлена в виде суммы $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где каждая из трёх функций $f_1, f_2, f_3$ является взаимно однозначным соответствием $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

**93.38**.* Установить взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, сохраняющее порядок. Как вы думаете, можно ли сделать то же самое для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

**93.39**.* Доказать, что нельзя изобразить на карте участок местности (считаем Землю шаром) так, чтобы расстояния между точками на карте были в одно и то же число раз меньше расстояний между соответствующими точками на местности. (Два варианта: расстояния на местности могут измеряться по прямой или по поверхности сферы; в обоих случаях это невозможно.)