95. Последовательности

Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется *ограниченной сверху*, если существует её *верхняя грань* — такое число c, что все члены последовательности не превосходят c. Символическая запись этого условия ($\exists c$ означает «существует c», $\forall i$ означает «для всех i»):

$$\exists c\ \forall i\ (a_i \leqslant c)$$

95.1. Сформулируйте определение ограниченной снизу последовательности. Сформулируйте определение последовательности, не ограниченной сверху (не используя слова «не»).

Говоря просто об *ограниченной* последовательности, имеют в виду последовательность, ограниченную и сверху, и снизу.

95.2. Может ли ограниченная последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена? (Наибольший член — тот, который является верхней гранью.)

95.3. Является ли последовательность $a_n = 10^n/n!$ ограниченной?

95.4. Тот же вопрос для последовательности $a_n = 1{,}01^n$.

95.5. $\ldots\ a_n = n^2/2^n$.

95.6. $\ldots\ a_n = \sqrt[n]{n!}$.

95.7. $\ldots\ a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, где $a_0 = 0$.

95.8.* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

95.9.* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

95.10.* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$

95.11. Ограничена ли последовательность, заданная формулами $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$?

95.12. Доказать, что сумма и произведение ограниченных последовательностей ограничены: если последовательности a_n и b_n ограничены, то и последовательности $c_n = a_n + b_n$ и $d_n = a_n b_n$ ограничены. Верны ли аналогичные утверждения для разности и частного?

Будем называть множество M «ловушкой» для последовательности $a_0, a_1, \ldots$, если все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, лежат в M. Будем называть множество M «кормушкой» для этой последовательности, если оно содержит бесконечно много членов последовательности.

95.13. Может ли ловушка не быть кормушкой? может ли кормушка не быть ловушкой? Можно ли утверждать, что один из отрезков $[0,1]$ и $[1,2]$ является ловушкой, если известно, что отрезок $[0,2]$ является ловушкой? Можно ли утверждать, что один из отрезков $[0,1]$ и $[1,2]$ является кормушкой, если известно, что отрезок $[0,2]$ является кормушкой?

95.14. Володя считает, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда существует отрезок, являющийся её ловушкой. Прав ли он?

Символическая запись: множество M является ловушкой для последовательности $a_0, a_1, \ldots$, если

$$\exists N\ (\forall n > N)\ (a_n \in M)$$

95.15. (а) Записать аналогичным образом определение кормушки. (б) Закончить фразу: множество M не является ловушкой для последовательности в том и только том случае, когда ... (не используя слов «не существует» или «не для всех»).

95.16. Существует ли последовательность, для которой любой интервал является кормушкой? для которой любой интервал является ловушкой?

95.17. Доказать, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её кормушкой.

95.18. Доказать, что для всякой ограниченной монотонной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её ловушкой.

Если из последовательности выбросить некоторые члены, сохранив порядок оставшихся, получится её *подпоследовательность*.

95.19. Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная (невозрастающая или неубывающая) бесконечная подпоследовательность.

95.20.* Доказать, что у всякой последовательности длины n^2+1 существует монотонная подпоследовательность длины $n+1$, но у последовательности длины n^2 может не быть монотонной подпоследовательности длины $n+1$.

95.21. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая другая последовательность целых чисел является её подпоследовательностью?

95.22.* Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое целое положительное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причём единственным способом?

95.23. Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ такова, что $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 1/2^n$ при всех n. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 1/n$.

95.24. Закончить определение: последовательность точек на плоскости называется ограниченной, если ...

95.25.* Квадратная таблица 100×100 заполнена числами. За один шаг можно изменить знак у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Доказать, что с помощью нескольких таких операций можно добиться, чтобы суммы чисел во всех строках и суммы чисел во всех столбцах были неотрицательными.