96. Пределы

Говорят, что последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *имеет предел* 0 (стремится к нулю, сходится к нулю, является бесконечно малой), если для любого положительного числа ε интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ является ловушкой. Обозначение: $a_n \to 0$ (или $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

96.1. Записать это определение символически:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N \ldots$$

96.2. Продолжить фразу: «Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ не стремится к нулю, если ... », не используя слова «не».

96.3. Доказать, что последовательность $a_n = 1/n$ стремится к нулю, указав, как находить N по ε (см. задачу 1).

96.4. Доказать, что последовательность $a_n = 1/n^2$ стремится к 0.

96.5. Тот же вопрос для последовательности $a_n = 1/2^n$

96.6. Тот же вопрос для последовательности $a_n = 0{,}99^n$

96.7. $\ldots\ a_n = n/2^n$.

96.8. $\ldots\ a_n = n^{10}/2^n$.

96.9. $\ldots\ a_n = 2^n/n!$.

96.10. $\ldots\ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

96.11. $\ldots\ a_n = (\sin n)/n$

96.12. Может ли сходящаяся к 0 последовательность перестать сходиться к 0, если переставить её члены?

96.13. Последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ стремятся к 0. Доказать, что их сумма и разность, заданные формулами $c_i = a_i \pm b_i$, также стремятся к нулю.

96.14. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ стремится к 0, а последовательность $b_0, b_1, \ldots$ ограничена. Доказать, что произведение $c_i = a_i b_i$ стремится к нулю.

96.15. Известно, что последовательность неотрицательных чисел стремится к нулю. Доказать, что последовательность квадратных корней из них также стремится к нулю.

96.16. Закончить определение предела последовательности: «последовательность $x_0, x_1, x_2 \ldots$ *имеет предел* a, если для любого $\varepsilon > 0$ ... ». (Обозначение: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.)

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся*** (к этому пределу).

96.17. Доказать, что у последовательности может быть только один предел.

96.18. Найти предел последовательности $a_n = (n-1)/n$.

96.19. Доказать, что последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ не имеет предела.

96.20. Найти предел последовательности $\sqrt[n]{2}$.

96.21.* Найти предел последовательности $\sqrt[n]{n}$.

96.22. Найти предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, если $x_0 > 0$.

96.23. Сходящаяся последовательность имеет бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Доказать, что её предел равен 0.

96.24. Доказать, что если последовательность x_n имеет ненулевой предел и все её члены отличны от нуля, то последовательность $y_n = 1/x_n$ ограничена.

96.25. Закончить фразу: «Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ имеет предел a тогда и только тогда, когда её можно представить в виде $x_i = a + y_i$, где ... ».

96.26. Может ли сходящаяся последовательность перестать быть сходящейся, если изменить конечное число её членов?

96.27. Может ли сходящаяся последовательность начать сходиться к другому пределу, если изменить все её члены с нечётными номерами?

96.28. Может ли сходящаяся последовательность иметь расходящуюся (= не сходящуюся) подпоследовательность?

96.29. Доказать, что сходящаяся последовательность всегда ограничена.

96.30. Доказать *теорему о двух милиционерах*: если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ при всех n и последовательности $a_0, a_1 \ldots$ и $c_0, c_1, \ldots$ (милиционеры) имеют один и тот же предел (отделение) то последовательность $b_0, b_1, \ldots$ также сходится к этому пределу.

96.31.* Сходится ли последовательность $10^n/2^{(n^2)}$ к нулю?

96.32. Сходится ли последовательность $x_n = \sin n$?

96.33. Сходится ли последовательность $x_n = \sin(1/n)$?

96.34. Сходится ли последовательность $x_n = \cos(1/n)$?

96.35. Сходится ли последовательность $x_n = (1/n)\sin n$?

96.36.* Сходится ли последовательность $x_n = n\sin(1/n)$?

96.37.* Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего членов?

96.38. Последовательность состоит из положительных членов, при этом сумма любого числа её членов не превосходит 1. Доказать, что она стремится к 0.

96.39. Найти предел последовательности $a_n = (1 + 1/n^2)^n$.

96.40.* Найти предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, если $x_0 > 0$.

96.41.* Найти предел последовательности $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

96.42.* Доказать, что последовательность, для которого $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (x_n + 3/x_n)/2$, сходится.

96.43.* Первые два члена x_0 и x_1 последовательности положительны, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих: $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$. Доказать, что последовательность отношений $y_n = x_{n+1}/x_n$ имеет предел.