97. Аксиома полноты и её следствия

Число c называют *верхней гранью* числового множества X, если все элементы этого множества не превосходят c. Символическая запись: $(\forall x \in A)(x \leqslant c)$. Аналогично определяется *нижняя грань*.

97.1. Какие числа являются верхними и нижними гранями множества $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$?

Следующее свойство действительных чисел мы принимаем без доказательства:

Аксиома полноты. Пусть L и R — два числовых множества, причём любой элемент первого не превосходит любого элемента второго ($l \leqslant r$ для всех $l \in L$ и $r \in R$). Тогда существует число c, разделяющее L и R, то есть являющееся верхней гранью L и нижней гранью R.

97.2. Пусть L и R — множества действительных чисел, для которых $l < r$ при всех $l \in L$ и $r \in R$. Можно ли утверждать, что найдётся c, при котором $l < c < r$ для всех $l \in L$ и $r \in R$?

97.3.* Утверждение, аналогичное аксиоме полноты, можно сформулировать для любого упорядоченного множества. Верно ли оно для (**а**) целых чисел; (**б**) рациональных чисел; (**в**) бесконечных последовательностей нулей и единиц (упорядоченных *лексикографически*: одна последовательность меньше другой, если до некоторого позиции они совпадают, а в этой позиции у первой стоит нуль, а у второй — единица).

97.4. (Существование точной верхней грани) Пусть L — ограниченное сверху множество. Доказать, что среди всех его верхних граней существует наименьшая. Она называется *точной верхней гранью* и обозначается $\sup L$ (supremum).

По аналогичным причинам любое ограниченное снизу множество R имеет *точную нижнюю грань* $\inf R$ (infimum).

97.5.* Часто аксиома полноты формулируется так: любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Докажите, что эта формулировка равносильна приведённой выше.

97.6. Доказать, что всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. (Указание: верхняя грань множества значений ограниченной возрастающей последовательности является её пределом.)

Многие из (молчаливо) принятых нами без обоснования утверждений можно вывести из аксиомы полноты.

97.7.* (Аксиома Архимеда) Доказать, что множество натуральных чисел не ограничено сверху: для всякого числа существует большее его натуральное. (Указание: множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел вместе с каждым числом содержит на единицу большее; такое множество не может иметь точной верхней грани.)

97.8.* Докажите, что существует $\sqrt{2}$, то есть действительное число $\alpha > 0$, для которого $\alpha^2 = 2$. (Указание: рассмотрим множество положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше 2, и возьмём его точную верхнюю грань.)

97.9. (Лемма о вложенных отрезках) Доказать, что любая последовательность вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$$

(каждый следующий отрезок есть часть предыдущего) имеет общую точку (принадлежащую всем отрезкам).

97.10. Доказать, что множество действительных чисел несчётно: для любой последовательности действительных чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ можно указать число, не совпадающее ни с одним из x_i.

97.11.* Последовательность $x_0, x_1, x_2 \ldots$ такова, что $|x_{i+1} - x_i| \leqslant 1/i^2$. Доказать, что она сходится.

Последовательность называется *фундаментальной*, если она имеет отрезки-ловушки сколь угодно малой длины: для всякого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины не более ε, являющийся её ловушкой.

97.12. Более традиционно такое определение фундаментальной последовательности:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall k, l > N)\ (|x_k - x_l| \leqslant \varepsilon)$$

Показать, что это определение равносильно только что приведённому.

97.13. (**а**) Доказать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. (**б**) Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена. (**в**) Доказать, что если фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то она и сама сходится (к тому же пределу). (Как мы увидим, из аксиомы полноты следует, что всякая фундаментальная последовательность сходится.)

97.14. Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ такова, что $|x_{i+1} - x_i| \leqslant 1/i^2$. Доказать, что она фундаментальна.

97.15. Используя аксиому полноты, показать, что всякая фундаментальная последовательность сходится.

97.16. Доказать, что всякая ограниченная последовательность имеет фундаментальную (и, следовательно, сходящуюся) подпоследовательность.

97.17.* Дать определения сходящейся и фундаментальной последовательности точек плоскости. Всякая ли фундаментальная последовательность на плоскости сходится?

97.18.* Сформулировать и доказать плоский аналог леммы о вложенных отрезках.

97.19.* Говорят, что последовательность интервалов $I_1, I_2, \ldots$ образует ***покрытие*** множества M, если всякая точка этого множества входит в (хотя бы) один из интервалов I_n. (**а**) Можно ли указать покрытие интервала бесконечной последовательностью других интервалов, в котором ни один из интервалов нельзя выбросить (оставив покрытие покрытием)? (**б**) Тот же вопрос для покрытия отрезка бесконечной последовательностью интервалов.

97.20. Точка a называется ***предельной точкой*** последовательности $x_0, x_1, x_2 \ldots$, если любой интервал, содержащий a, содержит бесконечно много членов этой последовательности. (**а**) Записать это определение с помощью кванторов. (**б**) Доказать, что число a является предельной точкой последовательности тогда и только тогда, когда некоторая её подпоследовательность сходится к a. (**в**) Доказать, что всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

97.21.* Может ли существовать последовательность, предельными точками которой являются числа $1, 1/2, 1/3, \ldots$ (и только они)?

97.22.* (**а**) Имеется множество отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Можно ли утверждать, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам? (**б**) Тот же вопрос для интервалов на прямой. (**в**) Тот же вопрос для кругов на плоскости? (**г**) Тот же вопрос для прямоугольников на плоскости (стороны параллельны осям координат; прямоугольник рассматривается вместе со внутренностью).

97.23.* На плоскости имеется конечное множество кругов, причём любые три круга из этого множества имеют общую точку. Следует ли из этого, что существует точка, принадлежащая всем кругам?

97.24.* (Продолжение) Тот же вопрос для бесконечного множества кругов.