98. Разные задачи о пределах

98.1. Последовательность x_n сходится к a; последовательность y_n сходится к b. Доказать, что последовательности $x_n + y_n$ и $x_n - y_n$ сходятся к $a + b$ и $a - b$.

98.2. Последовательность x_n сходится к a; последовательность y_n сходится к b. Доказать, что последовательность $x_n y_n$ сходится к ab. (Указание: удобно записать x_n и y_n как $a + \alpha_n$ и $b + \beta_n$.)

98.3. Последовательность x_n сходится к $a \neq 0$. Доказать, что почти все её члены (все, кроме конечного числа) отличны от 0 и что последовательность $y_n = 1/x_n$ сходится к $1/a$.

98.4. Последовательность x_n сходится к a; последовательность y_n сходится к b, причём $b \neq 0$. Доказать, что последовательность x_n/y_n сходится к a/b.

98.5. Найти предел последовательности $(2n^2+n+3)/(3n^2-n-2)$. (Указание: это легко сделать почти без вычислений, пользуясь предыдущими задачами.)

98.6. Что можно сказать о сходимости последовательностей x_n+y_n и $x_n y_n$, если (а) одна из последовательностей x_n и y_n сходится, а другая расходится? (б) обе расходятся?

98.7. (а) Дать определение стремящейся к бесконечности последовательности и доказать, что $x_0, x_1, \ldots$ стремится к бесконечности (запись: $x_i \to \infty$) тогда и только тогда, когда последовательность $y_i = 1/x_i$ сходится к нулю. (б) Дать определение стремящейся к $+\infty$ последовательности.

98.8. Известно, что последовательность x_n имеет предел. (а) Доказать, что последовательность $y_n = x_{n+1} - x_n$ сходится к нулю. (б) Верно ли обратное? (в) Что можно сказать про последовательность x_{n+1}/x_n?

98.9. Что можно сказать о последовательностях $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n y_n$ и x_n/y_n, если известно, что последовательности x_n и y_n стремятся к $+\infty$?

98.10.* Доказать, что $0{,}99^n$ сходится к 0, можно так: сначала (с помощью аксиомы полноты) установить, что предел существует, а затем — что он равен 0. Провести это рассуждение подробно.

98.11. Последовательность a_n состоит из положительных чисел. Предположим, что последовательность отношений a_{n+1}/a_n имеет предел α. Что можно сказать о последовательности a_n, если известно, что (а) $\alpha < 1$; (б) $\alpha = 1$; (в) $\alpha > 1$?

98.12. Доказать, что при любом целом положительном c и при любом $a > 1$ последовательность n^c/a^n сходится к 0 (геометрическая прогрессия растёт быстрее любой степени).

98.13. Доказать, что при любом $a > 0$ последовательность $a^n/n!$ сходится к 0 (факториал растёт быстрее геометрической прогрессии).

98.14. Какое из чисел $2^{n\sqrt{n}}$ и $n!$ больше при бóльших n?

98.15. Найти предел последовательности $\sqrt[n]{n^c}$ (здесь c — фиксированное положительное целое число).

98.16. Найти предел последовательности $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

98.17. Найти предел последовательности $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

98.18.* Найти предел последовательности $\sqrt[3]{n^3+n^2} - n$.

98.19.* Найти предел последовательности $\sqrt[3]{n^3+n} - n$.

98.20. Последовательность неотрицательных чисел $x_0, x_1, \ldots$ сходится к числу a. Доказать, что a неотрицательно и $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

98.21. (Продолжение) Тот же вопрос для $\sqrt[3]{x_n}$.

98.22. Последовательность чисел $x_0, x_1, \ldots$ сходится к числу a. Доказать, что последовательность $\sin x_0, \sin x_1, \ldots$ сходится к числу $\sin a$. Верны ли аналогичные утверждения для косинуса и тангенса?

98.23. Последовательность x_n определена так: $x_0 = 0$, а $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$. Найти её предел (если он есть).

98.24.* (Продолжение) Тот же вопрос, если $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$.

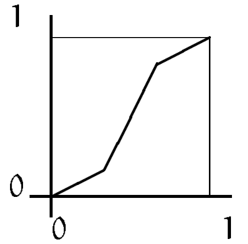
98.25. Последовательность x_n определена так: $x_0 = 1$, а $x_{n+1} = \sin x_n$. Найти её предел (если он есть).

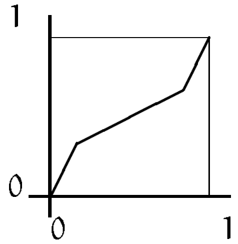
98.26.* Тот же вопрос, если $x_0 = 1$, а $x_{n+1} = \cos x_n$.

98.27. Каждый следующий член последовательности на единицу больше трети предыдущего. Доказать, что последовательность сходится и найти её предел.

98.28. Функция f с действительными аргументами и значениями такова, что $|f(y) - f(x)| \leqslant 0{,}99|y - x|$ для всех x и y. Доказать, что при любом a последовательность $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$ сходится и что её предел α является неподвижной точкой функции f, то есть $f(\alpha) = \alpha$.

98.29.* Последовательность x_n точек отрезка $[0, 1]$ определена соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$, где f — функция, график которой изображён на рисунке. При каких x_0 эта последовательность имеет предел и чему равен этот предел? (Дать ответ для каждого из двух вариантов рисунка.)





98.30. Первые два члена последовательности равны a и b, а каждый следующий есть среднее арифметическое двух предыдущих. Доказать, что последовательность сходится, и найти её предел.

98.31.* Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ состоит из положительных чисел, и каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих. Доказать, что предел x_{n+1}/x_n существует, и найти его.

98.32.* Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ определена рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$; при этом $x_0 = 2$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти её предел.

98.33.* Пусть $n_0, n_1, n_2 \ldots$ — произвольная последовательность целых положительных чисел. Доказать, что последовательность

$$n_0,\quad n_0 + \frac{1}{n_1},\quad n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}},\quad n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \ldots$$

имеет предел (который называют значением *бесконечной цепной дроби*).

98.34. Известно, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ сходится к 1 и все её члены отличны от 1. Найти предел последовательности $(x_n^5 - 1)/(x_n - 1)$.

98.35. (Продолжение) Тот же вопрос для последовательности $(\sqrt{x_n} - 1)/(x_n - 1)$.

98.36.* (Продолжение) Тот же вопрос для последовательности $(\sin x_n - \sin 1)/(x_n - 1)$.

98.37.* Последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ для любых $m, n > 0$. Доказать, что последовательность a_n/n имеет предел.

98.38.* Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ имеет предел a. Доказать, что последовательность средних арифметических $y_i = (x_1 + \ldots + x_i)/i$ также имеет предел a. Верно ли обратное?

98.39.* Доказать, что последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$, $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ и $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ сходятся. Как связаны их пределы?

98.40.* (Задача о беспризорниках и каше) По кругу написаны n чисел. За один шаг каждое из чисел заменяют на среднее арифметическое двух его соседей, и так делают бесконечно много раз. Посмотрим на числа, стоящие в фиксированной точке круга в последовательные моменты времени. Можно ли утверждать, что эта последовательность сходится?

98.41.* (Продолжение) На гранях куба написаны числа. За один шаг каждое из чисел заменяют на среднее арифметическое его четырёх соседей. Можно ли утверждать, что для любой грани последовательность написанных на ней чисел имеет предел?

98.42.* Найти предел последовательности $(1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10})/n^{11}$.