99. Ряды

Сумма бесконечного ряда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ определяется как предел *частичных сумм* $s_n = x_1 + \ldots + x_n$. Если этот предел существует, ряд называют *сходящимся*; если нет — *расходящимся*.

99.1. При каких x сходится ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$? Какова его сумма?

99.2.* При каких x сходится ряд $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$? Какова его сумма?

99.3.* При каких x сходится ряд $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \ldots$? Какова его сумма?

99.4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)) = 1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + \ldots$.

99.5. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + 8n + 15)$.

99.6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)(n+2))$.

99.7. Указать N, при котором сумма первых N членов ряда $\sum 1/n^2$ отличается от его суммы не более чем на $1/1000$.

99.8. Ряд состоит из положительных членов, но не сходится. Доказать, что найдётся частичная сумма этого ряда, большая 10.

99.9. (а) Доказать, что ряд $1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+\ldots$ сходится. (б) Сформулировать и доказать общее утверждение про сходимость знакопеременных рядов с убывающими по модулю членами.

99.10. Найти сумму ряда $1/1^5 - 1/2^5 + 1/3^5 - \ldots$ с точностью 1%.

99.11. Может ли сходящийся ряд стать расходящимся, если его члены сгруппировать (сложить) по два? Может ли расходящийся ряд стать при этом сходящимся?

99.12. Сходящийся ряд состоит из неотрицательных членов. Доказать, что при любой перестановке членов он останется сходящимся и сумма не изменится.

99.13. Доказать, что члены сходящегося ряда стремятся к нулю. Верно ли обратное?

99.14. Ряд $a_1+a_2+\ldots$ состоит из неотрицательных членов, причём $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$. Доказать, что он сходится или расходится одновременно с рядом $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$.

99.15. При каких положительных s ряд $1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \ldots$ сходится? (Его сумма обозначается обычно $\zeta(s)$ и называется *дзета-функцией Римана*.)

99.16. Сходится ли ряд $\sum(1/n\log n)$?

99.17. Сходится ли ряд $\sum(1/n\log^2 n)$?

99.18.* Сходится ли ряд $\sum(1/n\log n\log\log n)$?

99.19. Ряд $x_1 + x_2 + \ldots$ называют *абсолютно сходящимся*, если ряд из модулей $|x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots$ сходится. Докажите, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

99.20. (Продолжение) Приведите пример сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда.

99.21.* Доказать, что при перестановке и группировке членов абсолютного сходящегося ряда он остаётся абсолютно сходящимся и сумма его не меняется.

99.22.* В произведении двух абсолютно сходящихся рядов

$$(a_1 + a_2 + \ldots)(b_1 + b_2 + \ldots)$$

раскрыли скобки (расположив попарные произведения в каком-то порядке). Доказать, что получится абсолютно сходящийся ряд и его сумма будет равна произведению сумм исходных рядов.

99.23.* Доказать, что если ряд сходится, но не абсолютно, то перестановкой его членов можно получить ряд с любой заданной наперёд суммой.

99.24. Доказать, что ряд $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ абсолютно сходится при любом x.

99.25.* (Продолжение) Обозначим сумму этого ряда через $\exp(x)$. Доказать, что $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ при всех x и y.

99.26.* Доказать, что $\exp(1) = \lim(1 + 1/n)^n$. (Это число называется *основанием натуральных логарифмов* и обозначается e.)

99.27.* Доказать, что $\exp(x) = e^x$ (а) для положительных целых x; (б) для любых целых x; (в) для любых рациональных x.

99.28.* Доказать, что функция exp монотонна: $\exp(x) < \exp(y)$ при $x < y$ (числа x и y могут быть и отрицательными).

99.29.* (а) Определить сумму ряда из комплексных чисел. Какие ряды естественно назвать абсолютно сходящимися? Доказать, что они сходятся. (б) Определить $\exp(z)$ для комплексного z и доказать, что $\exp(z)$ при чисто мнимом z лежит на единичной окружности.

99.30.* Из ряда $\sum 1/n$ выбросили все члены, в которых в десятичной записи знаменателя есть цифра 7. Сходится ли полученный ряд?

99.31.* Известно, что ряды $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n b_n$ сходится?

99.32.* (а) Известно, что ряд $\sum a_n$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n^2$ сходится? (б) Известно, что ряд $\sum a_n^2$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n$ сходится? (в) Известно, что ряд $\sum a_n^2$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n^4$ сходится? (г) Известно, что ряд $\sum a_n$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n^3$ сходится?

99.33.* Ряд $\sum a_n$ состоит из положительных членов и расходится. Доказать, что ряд $\sum b_n$, где $b_n = a_n/(a_1 + \ldots + a_n)$, также расходится.

99.34.* (а) Доказать, что ряд $\sum(\sin nx)/n$ сходится при любом x. (б) При каких комплексных z сходится ряд $\sum z^n/n$? (Как связаны эти вопросы?)