100. Непрерывные функции

Функция непрерывна в точке a, если в близких к a точках она принимает близкие к $f(a)$ значения. Формально говоря, функция $f : M \to \mathbb{R}$, определённая на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}$, ***непрерывна в точке*** $a \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ с таким свойством: во всякой точке $x \in M$, отстоящей от a менее чем на δ, значение $f(x)$ отличается от $f(a)$ менее чем на ε:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in M)[(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

100.1. Доказать непрерывность и указать способ отыскивать δ по ε, если: (а) $f(x) = 1$ и $a = 2$; (б) $f(x) = x$ и $a = 2$; (в) $f(x) = x^2$ и $a = 2$; (г) $f(x) = 1/x$ и $a = 2$; (д) $f(x) = \sqrt{x}$ и $a = 2$; (е) $f(x) = \sqrt{x}$ и $a = 0$; (ж) $f(x) = \sin x$ и $a = 1$.

100.2. Закончить фразу, не употребляя слова «не»: функция f ***разрывна*** (не является непрерывной) в точке a, если ...

100.3.* Пусть функция f определена на множестве целых чисел: $M = \mathbb{Z}$. В каких случаях она будет непрерывной согласно приведённому определению?

100.4. Доказать, что следующее определение непрерывности эквивалентно исходному: функция $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, если для всякой последовательности $x_0, x_1, \ldots$ точек M, сходящейся к a, последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$ сходится к $f(a)$.

100.5. (а) В каких точках непрерывна ***функция Дирихле***, равная 1 в иррациональных точках и 0 в рациональных? (б) Тот же вопрос для ***функции Римана***, которая равна 0 в иррациональных точках и равна $1/q$ в рациональной точке p/q (если дробь p/q несократима).

100.6. Привести пример функции, определённой на всей прямой, (а) разрывной в целых точках и непрерывной в остальных; (б) непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.

100.7.* Доказать, что для любого счётного множества действительных чисел можно построить возрастающую функцию, разрывную во всех точках этого множества и непрерывную во всех остальных.

100.8.* Может ли определённая на всех прямой возрастающая функция быть разрывной во всех точках?

100.9.* Может ли функция быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных?

100.10. Две функции f и g определены на множестве M и непрерывны в точке $a \in M$. Доказать, что их сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель отличен от нуля в точке a) также непрерывны в этой точке.

100.11. Функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, принимает значения в множестве $Y \subset \mathbb{R}$ и непрерывна в точке $a \in X$. Функция g определена на множестве Y и непрерывна в точке $b = f(a)$. Доказать, что ***композиция*** $g \circ f$, то есть функция $x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$, непрерывна в точке a.

100.12. Будет ли функция $f(x) = \sqrt{\sin x - (2 + \operatorname{tg} x)/((2 - \operatorname{tg} x)^2)}$ непрерывной во всех точках своей области определения?

100.13. Функция f определена и непрерывна на отрезке. Доказать, что f ограничена на этом отрезке. Объясните, почему аналогичное рассуждение нельзя провести для интервала.

100.14. (Продолжение) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что она достигает максимума: найдётся такая точка $m \in [a,b]$, что $f(x) \leqslant f(m)$ для всех $x \in [a,b]$.

100.15.* Утверждение задачи 100.14 можно получить как следствие задачи 100.13, рассмотрев функцию $1/(f - \sup f)$. Проведите это рассуждение подробно.

100.16.* Назовём функцию f ограниченной в окрестности точки a, если найдётся интервал, содержащий a, на котором f ограничена. (**а**) Привести пример функции, определённой на всей прямой и не ограниченной ни на каком интервале. (**б**) Доказать, что всякая определённая на отрезке локально ограниченная (ограниченная в окрестности любой точки отрезка) функция ограничена на всём отрезке.

100.17. Функция f непрерывна на отрезке и принимает в его концах значения разных знаков. Доказать, что она имеет корень на этом отрезке.

100.18. Доказать, что существует корень любой целой положительной степени из любого положительного числа.

100.19. Доказать, что всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

100.20.* Доказать, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, для которого $a + b + c > 0$ и $a - b + c < 0$, имеет (действительный) корень.

100.21. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

100.22. Доказать, что всякая строго возрастающая непрерывная функция, определённая на отрезке, является взаимно однозначным соответствием между двумя отрезками и обратная функция также непрерывна.

100.23.* Доказать, что любое монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками непрерывно (в обе стороны).

100.24.* (**а**) Дать определение непрерывности для функций, определённых на плоскости. (**б**) Доказать, что любой многочлен на комплексной плоскости непрерывен. (**в**) Доказать, что для любого многочлена найдётся точка на комплексной плоскости, где его абсолютная величина минимальна. (**г**) Доказать, что в этой точке многочлен неизбежно равен нулю (основная теорема алгебры).

100.25. Как надо доопределить функцию $\sin x/x$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной всюду?

100.26.* Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве M, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что образы любых двух точек M, отстоящих менее чем на δ, отстоят менее чем на ε. (**а**) Записать это определение символически. (**б**) Очевидно, равномерно непрерывная на множестве M функция непрерывна во всех точках множества M. Показать, что обратное утверждение неверно. (**в**) Будет ли функция $x \mapsto x^2$ равномерно непрерывной? (**г**) Тот же вопрос для функции $x \mapsto \sqrt{x}$ (определённой на множестве неотрицательных чисел). (**д**) Тот же вопрос для функции $x \mapsto \sin(x^2)$. (**г**) Показать, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.

100.27. Доказать, что если две непрерывные функции определены на всей прямой и совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

100.28.* Функция f определена и непрерывна на всей прямой, при этом $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Доказать, что эта функция есть умножение на константу.

100.29. *Показательная функция* $x \mapsto a^x$ (при любом $a > 0$) обладает такими свойствами: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Кроме того, при $a > 1$ она монотонно возрастает, при $a = 1$ — постоянна, при $a < 1$ — убывает. (а) Считая эти свойства известными, доказать, что показательная функция непрерывна в точке 0; (б) во всех точках прямой.

100.30.* (Продолжение) (а) Доказать, что указанные в предыдущей задаче свойства определяют показательную функцию однозначно. (б) Пользуясь лишь этими свойствами, доказать, что $6^x = 2^x 3^x$ при всех x.

100.31.* Дать определение непрерывной на окружности функции. Доказать, что для любой непрерывной на окружности функции найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых она принимает равные значения.

100.32. Доказать, что любой многоугольник можно разделить вертикальной прямой на две равновеликие (равные по площади) части.

100.33.* На плоскости нарисовано два многоугольника (возможно, пересекающихся). Доказать, что найдётся прямая, которая делит каждый из них на две равновеликие части.

100.34.* Дать определение непрерывности для функции, определённой на подмножестве плоскости. Доказать, что всякая непрерывная на квадрате функция ограничена и достигает максимума.

100.35.* Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = x$ имеет решение.

100.36.* Определённая на отрезке функция называется *выпуклой вниз*, если хорда, соединяющая любые две точки графика, лежит выше графика. Доказать, что всякая выпуклая вниз функция непрерывна.

100.37.* Доказать, что если непрерывная на отрезке функция удовлетворяет неравенству $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$, то она выпукла вниз.