101. Пределы функций

Пусть функция f определена на множестве $M \subset \mathbb{R}$ и принимает действительные значения. Пусть a — действительное число (принадлежащее M или нет). Говорят, что $f(x)$ *имеет предел* A *при* x, *стремящемся к* a, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность точки a, во всех точках которой (кроме, быть может, самой точки a) значения функции отличаются от A меньше чем на ε:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)[(x \neq a \text{ и } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon]$$

Запись: $A = \lim_{x \to a} f(x)$.

101.1. Закончить предложение: функция $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$ тогда и только тогда, когда предел...

101.2.* Напротив, можно формально определить предел через непрерывность: функция $f : M \to \mathbb{R}$ имеет предел A в точке a, если она становится непрерывной в точке... (закончить определение).

101.3. Говорят, что точка a является *предельной точкой* множества M, если сколь угодно близко к a имеются точки множества M, отличные от a. Докажите, что в этом случае предел $\lim_{x\to a} f(x)$ определён однозначно (если существует): два разных числа не могут быть пределами одновременно.

101.4. Закончить предложение (и доказать): функция $f : M \to \mathbb{R}$ имеет предел A в точке a, если и только если для любой последовательности точек M, сходящейся к $a, \ldots$

101.5. Сформулировать и доказать утверждения о пределе суммы, разности, произведения и частного.

101.6.* Известно, что $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Почему формально нельзя утверждать, что в этом случае $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$? (Считаем, что f и g — функции, определённые на всех действительных аргументах.)

101.7. Найти пределы: $(\sin x)/x$ при $x \to 0$.

101.8. $(\sin x)/x$ при $x \to 2$.

101.9.* $(1 - \cos x)/x^2$ при $x \to 0$.

101.10.* $(\sin x - \operatorname{tg} x)/x^3$ при $x \to 0$.

101.11.* $(\arcsin x)/x$ при $x \to 0$.

101.12. $(x^{10} - a^{10})/(x - a)$ при $x \to a$.

101.13. $((2 + 3x)^{10} - 2^{10})/x$ при $x \to 0$.

101.14. $(\sqrt{x} - \sqrt{a})/(x - a)$ при $x \to a$.

101.15. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})/(x - a)$ при $x \to a$.

101.16.* $(\sin x - \sin a)/(x - a)$ при $x \to a$.

101.17.* $\sin 3x/ \sin 5x$ при $x \to 0$.

101.18. Дать определение предела функции f «при x, стремящемся к a справа». (Иногда это обозначают $x \to a + 0$; аналогично $x \to a - 0$ обозначает, что x стремится к a слева.) Доказать, что монотонная (невозрастающая или неубывающая) функция всегда имеет пределы справа и слева. В каком случае эти пределы совпадают?

101.19.* Доказать, что монотонная функция, определённая на всей прямой, непрерывна везде, за исключением не более чем счётного числа точек.

101.20. Дать определение предела $f(x)$ при $x \to +\infty$. Найти предел $\lim_{x\to+\infty} x^{100}/2^x$.

101.21.* Доказать, что $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x$ существует и равен e (то есть пределу последовательности $(1+1/n)^n$).

101.22. Найти предел $\sqrt{x^2+x}-x$ при $x \to +\infty$.

101.23. Найти предел $\sin x/x$ при $x \to +\infty$.

101.24.* Найти предел $(\log_2 x)/x$ при $x \to +\infty$.

101.25.* Найти предел $(1+x/3)^{1/x}$ при $x \to 0$.

101.26.* Найти предел $x \log_2 x$ при $x \to 0$.

101.27.* Найти предел $\sqrt[x]{2}$ при $x \to +\infty$.

101.28.* Найти предел $\sqrt[x]{x}$ при $x \to +\infty$.

101.29.* Найти предел $(\cos x)^{1/x^2}$ при $x \to 0$.

101.30.* Функция f определена и непрерывна на всей прямой. Можно ли утверждать, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, если известно, что для любого x последовательность $f(x), f(x+1), f(x+2)\ldots$ сходится к 0?

101.31.* Тот же вопрос, если для любого $x > 0$ последовательность $f(x), f(2x), f(3x), \ldots$ сходится к 0.