102. Асимптотические обозначения

Пусть f и g — две функции, определённые в окрестности точки a. Говорят, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если найдётся такое число c, что $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$ при всех x, достаточно близких к a. (Читается: «эф от икс есть о большое от же от икс».) Говорят, что $f(x) = o(g(x))$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность точки a, в которой $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$. (Читается: «эф от икс есть о малое от же от икс».)

102.1. Записать эти определения формально: $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists c(\exists\delta > 0)\ldots$; $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \ldots$

Смысл этих определений: $f(x) = O(g(x))$ значит, что вблизи a значение $f(x)$ не сильно больше $g(x)$ (превосходит $g(x)$ не более чем в ограниченное число раз); $f(x) = o(g(x))$ означает, что вблизи a значение $f(x)$ бесконечно мало по сравнению с $g(x)$.

Используя эти обозначения, можно сказать, что функция f непрерывна в точке a, если $f(x) = f(a) + o(1)$ при $x \to a$.

102.2. Какие из следующих утверждений верны: (**а**) $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$; (**б**) $\sin x = o(x)$ при $x \to 0$; (**в**) $\cos x = O(x)$ при $x \to 0$; (**г**) $\cos x = O(1)$ при $x \to 0$; (**д**) $\cos x = 1 + o(x)$ при $x \to 0$; (**е**) $\sin x = O(x)$ при $x \to 1$; (**ж**) $\sin x = o(x)$ при $x \to 1$; (**з**) $\sin x = o(x)$ при $x \to +\infty$; (**и**) $x^2 = O(2^x)$ при $x \to +\infty$. (**к**) $1/x = O(\sin x)$ при $x \to +\infty$.

102.3.* Гражданин пошёл в сберкассу платить за квартиру, но вместо этого положил деньги на счёт с 5% годовых. Можно ли утверждать, что его долг (включая пеню в 1% исходной суммы за каждый день просрочки) будет o-малым от суммы на счёте при стремлении времени к бесконечности?

102.4.* Можно ли утверждать, что $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$, если (**а**) $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$; (**б**) $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$; (**в**) $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$; (**г**) $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$?

102.5. Известно, что $f(x) = O(x^4)$ и $g(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$. Что можно сказать про $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(g(x))$?

102.6.* Известно, что $f(x) = O(x^4)$ и $g(x) = O(1)$ при $x \to 0$. Что можно сказать про $f(g(x))$ и $g(f(x))$?

102.7. Доказать, что $1/(1 + x) = 1 - x + O(x^2)$ при $x \to 0$.

102.8. ...что $1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$ при $x \to 0$.

102.9. ...что $\sqrt{1 + x} = 1 + x/2 + O(x^2)$.

102.10. Найти аналогичную формулу для $\sqrt{9 + x}$.

102.11. Найти разложение функции $f(x) = 1/(1 - 2x + x^2)$ по степеням x при $x \to 0$ вплоть до членов четвёртого порядка, то есть найти значения коэффициентов a, b, c, d, e, для которых

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$$

при $x \to 0$.

102.12. Доказать, что разложение по степеням x однозначно: если

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k + o(x^k) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k + o(x^k)$$

при $x \to 0$, то $a_i = b_i$ при всех $i = 0, \ldots, k$

102.13. Доказать, что $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=1/(2\sqrt{x})+o(1/x)$ при $x\to+\infty$.

102.14. ...что $\sin x = x + o(x)$ при $x\to 0$.

102.15. ...что $\sin x - \operatorname{tg} x = O(x^3)$ при $x\to 0$.

102.16. ...что $\sin x = x + O(x^3)$ при $x\to 0$.

102.17. ...что $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$ при $x\to 0$.

102.18. ...что $\operatorname{ctg} x = 1/x + o(1)$ при $x\to 0$

102.19. Показать, что максимальное отклонение дуги длиной x на единичной окружности от стягивающей её хорды есть $O(x^2)$ при $x\to 0$.

102.20.* Предполагая, что формула $\sqrt{1+x}=1+x/2+ax^2+O(x^3)$ (при $x\to 0$) верна для некоторой константы a, найти значение a.

102.21.* (Продолжение) Доказать, что при этом a формула действительно верна.

102.22.* Указать a и b, при которых формула $\sqrt{1+x}=1+x/2+ax^2+bx^3+O(x^4)$ верна (при $x\to 0$).

102.23.* Разложить $\sin x$ в окрестности точки $\pi/3$ по степеням $(x-\pi/3)$ вплоть до четвёртой (другими словами, разложить $\sin(\pi/3+x)$ по степеням x с точностью до $o(x^4)$.

102.24.* Указать a, при котором $\sqrt[3]{1+x}=1+ax+O(x^2)$.

Во многих задачах полезны разложения (при $x\to 0$)

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots \text{ и } \cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$$

(которые можно оборвать в любом месте); как мы увидим дальше, их легко получить по формуле Тейлора или из ряда $e^{ix}=\cos x + i\sin x$.

102.25.* Найти разложение вплоть до x^4 для $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$.

102.26.* (Продолжение) для $\sin(\sin x)$ вплоть до x^4.

102.27.* (Продолжение) для $\arcsin x$ вплоть до x^4. (Можно предполагать, что такое разложение существует — это будет следовать из общих теорем.)

102.28.* Разложить по степеням x (с точностью $o(x^2)$) расстояние (**а**) от точки $(0,2)$ до точки $(0,x)$; (**б**) от точки $(-1,1)$ до точки $(0,x)$; (**в**) длину ломаной $(-1,1)$–$(0,x)$–$(2,2)$; (**г**) длину ломаной $(-1,1)$–$(0,x)$–$(1,2)$. Как объяснить, почему в одних случаях коэффициент при x равен нулю, а в других — нет?

102.29.* Треугольник имеет стороны a,b,c. Одну из сторон удлинили на x; пусть $S(x)$ — площадь получившегося треугольника со сторонами $a,b,c+x$. Разложить $S(x)$ по степеням x с точностью $o(x)$. В каком случае коэффициент при x равен 0?

102.30.* Пусть X — некоторая фигура на плоскости. Рассмотрим ε-окрестность X (состоящую из тех точек, которые отстоят не более чем на ε от некоторой точки множества X). Разложить площадь этой окрестности по степеням ε для различных фигур, в том числе круга, отрезка, окружности, квадрата, круга с круглой дыркой, круга с двумя круглыми дырками, участка гладкой кривой и др. В каких случаях получающиеся формулы точны при малых ε?

102.31.* Показать, что для некоторых a и b верна формула $1+1/2^2+1/3^2+\ldots+1/n^2 = a+b/n+O(1/n^2)$ и найти b. (Найти a гораздо сложнее — как мы увидим, оно равно $\pi^2/6$.)

102.32.* Последовательность x_n определена соотношением: $x_{n+1}=\sin x_n$; при этом $x_0 = 1$. Показать, что $x_n = O(1/\sqrt{n})$.

102.33.* Уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет бесконечно много решений; перенумеруем неотрицательные его решения в порядке возрастания: $x_0=0, x_1, x_2\ldots$ Тогда можно написать формулу $x_n = n\pi + a + b/n + c/n^2 + d/n^3 + o(1/n^3)$. Найти a,b,c,d.

102.34.* (а) При анализе алгоритма выяснилось, что время его работы $T(n)$ на входах длины n (определённое для целых положительных n) удовлетворяет соотношению $T(n) = T([n/2]) + T([n/3]) + O(n)$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Показать, что $T(n) = O(n)$. (б) Что можно сказать о $T(n)$, если $T(n) = 2T([n/2]) + O(n)$?

102.35.* В окрестности точки $(1, 1)$ кривая $x^5 + x + y^5 + y = 4$ совпадает с графиком некоторой функции $y = f(x)$; при этом $f(1 + h) = 1 + ah + bh^2 + o(h)$ для некоторых a и b. Считая это известным, найти a и b.

102.36.* При каком n предел $(\sin \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg} \sin(x))/x^n$ при $x \to 0$ существует и отличен от 0?

102.37.* Найти предел
$$\frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}$$
при $x \to 0$.