103. Пределы с экспонентой

При любом $a > 0$ функция $x \mapsto a^x$ определена и непрерывна при всех x; при этом $a^{x+y} = a^x a^y$ и $a^0 = 1$. При $a > 1$ эта функция возрастает, при $a < 1$ — убывает (при $a = 1$ она постоянна).

Число e определяется как предел последовательности $(1 + 1/n)^n$; значение e^x обозначается также $\exp x$. Обратная к $x \mapsto a^x$ функция обозначается $\log_a x$ (*логарифм по основанию* a); она определена (и непрерывна) при $a > 0$ и $a \neq 1$. Логарифм по основанию e называется натуральным и обозначается $\ln$.

103.1.* Показательную функцию $x \mapsto a^x$ можно построить так: сначала определить её для целых x, затем для рациональных ($a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$), а затем (по непрерывности или по монотонности) для всех действительных x. Проведите это построение подробно и докажите для построенной функции указанные в начале листка свойства.

103.2. Доказать, что предел $(1 + 1/x)^x$ при $x \to +\infty$ равен e.

103.3. Найти предел $(1 + x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

103.4. Найти предел $(1 + 2x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

103.5. Найти предел $(1 - x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

103.6. Найти предел $(1 + x^2)^{1/x}$ при $x \to 0$.

103.7. Найти предел $(1 + x)^{1/x^2}$ при $x \to 0$.

103.8.* Найти предел $(1 + \sin x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

103.9.* Найти предел $(\cos x)^{1/x^2}$ при $x \to 0$.

103.10. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(другими словами, $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$).

103.11. Доказать, что

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

(другими словами, $e^y = 1 + y + o(y)$ при $y \to 0$).

103.12.* Предполагая, что $e^x = 1 + x + ax^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, найти a. (Указание: $e^{2x} = e^x e^x$.)

103.13.* Доказать, что при $x \to 0$

$$\exp x = 1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n! + O(x^{n+1})$$

($\exp x$ определяется как сумма ряда $1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n! + \ldots$).

103.14.* (Продолжение) Считая, что $\ln(1 + x) = ax + bx^2 + o(x^2)$, найти a и b.

103.15. Найти предел $(2^x - 1)/x$ при $x \to 0$.

103.16. Найти предел $\log_2(1 + x)/x$ при $x \to 0$.

103.17. Найти предел $(\exp(a + h) - \exp(a))/h$ при $h \to 0$ (и постоянном a).

103.18. Найти предел $(\ln(a + h) - \ln(a))/h$ при $h \to 0$ (и постоянном a).

103.19. Доказать, что если $a_n \to a$ и $b_n \to b$, причём $a > 0$, то $a_n^{b_n} \to a^b$. (Указание: логарифм и экспонента непрерывны.)

103.20. Найти предел a^x/x^n при $x \to +\infty$ (где $a > 1$, $n > 0$).

103.21. Найти предел $x \ln x$ при $x \to 0$.

103.22.* Доказать, что для некоторого γ имеет место равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

103.23.* (Продолжение) Доказать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{a}{n} + O(1/n^2)$$

для подходящего a и найти это a.

103.24.* Найти предел суммы

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

при $n \to \infty$.

103.25.* Найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

103.26.* Доказать, что $\ln(n!) = n \ln n + o(n \ln n)$.

103.27.* Доказать более точную оценку: $\ln(n!) = n \ln n + O(n)$.

103.28.* Доказать ещё более точную оценку: $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$.

103.29.* Доказать ещё более точную оценку: $\ln(n!) = n \ln n - n + (1/2) \ln n + c + o(1)$. Другими словами,

$$n! = (n/e)^n \sqrt{Cn}(1 + o(1))$$

Можно доказать, что $C = 2\pi$ (формула Стирлинга), а идя дальше, разложить $o(1)$ по степеням $1/n$.

103.30.* Числа $a_1, a_2, \ldots$ положительны и меньше 1. Доказать, что три свойства равносильны: (1) ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ расходится; (2) произведение $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$ стремится к бесконечности; (3) произведение $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)$ стремится к нулю.

103.31.* (Продолжение) Вывести отсюда, что гармонический ряд $\sum(1/i)$ расходится.

103.32.* (Продолжение) Доказать, что ряд $1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots$ (обратные к простым числам) расходится.