104. Производная

Производной функции f в точке a называется предел отношения $(f(x)-f(a))/(x-a)$ при $x \to a$. Если он существует, функция называется *дифференцируемой* в точке a. Производная функции f в точке a обозначается $f'(a)$.

104.1. Найти производные (в произвольной точке a) функций: (**а**) $x \mapsto 2x$; (**б**) $x \mapsto x^2$; (**в**) $x \mapsto 1/x$; (**г**) $x \mapsto \sqrt{x}$; (**д**) $x \mapsto x^n$ для целых положительных n; (**е**) $x \mapsto x^n$ для любых целых n; (**ж**) $x \mapsto \sin x$; (**з**) $x \mapsto \cos x$; (**и**) $x \mapsto e^x$; (**к**) $x \mapsto \ln x$.

104.2. Доказать, что функция f имеет производную A в точке a тогда и только тогда, когда $f(a+h) = f(a) + Ah + o(h)$ при $h \to 0$.

104.3. Доказать, что всякая дифференцируемая в точке a функция непрерывна в a, но обратное неверно.

Замечание. Определению $f'(a)$ можно придать смысл, если точка a принадлежит области определения функции f и является для неё предельной точкой. Однако обычно предполагают, что f определена в некоторой окрестности точки a (на интервале, содержащем a).

104.4. Доказать правила дифференцирования суммы и произведения функций: (**а**) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$; (**б**) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. (Удобно использовать задачу 2.)

104.5. (Производная сложной функции) Пусть функция f определена в окрестности точки a и дифференцируема в a; пусть функция g определена в окрестности точки $b = f(a)$ и дифференцируема в b. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ определена в окрестности точки a, дифференцируема в a и $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$. (Указание: использовать задачу 2.)

104.6. (**а**) Функция f определена в окрестности точки a и дифференцируема в точке a, причём $f(a) \neq 0$. Найти производную функции $x \mapsto 1/f(x)$. (Можно воспользоваться предыдущей задачей.) (**б**) Найти производную частного $x \mapsto g(x)/f(x)$ в точке a, если функции f и g определены в окрестности a и дифференцируемы в a, причём $f(a) \neq 0$.

104.7. Найти производные функций: (**а**) $x \mapsto (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$; (**б**) $x \mapsto \sin 2x = 2\sin x \cos x$ (двумя способами); (**в**) $x \mapsto \operatorname{tg} x$; (**г**) $x \mapsto \sin(\sin x)$; (**д**) $x \mapsto a^x$ (для любого $a > 0$); (**е**) $x \mapsto \log_a x$ (для любого $a > 0$, кроме 1); (**ж**) $x \mapsto \exp(2\ln x)$; (**з**) $x \mapsto x^\alpha$ (α — произвольное число; функция рассматривается при $x > 0$); (**и**) $x \mapsto x^x$ (при $x > 0$).

104.8. Функция f определена, непрерывна и строго монотонна на некотором интервале. Доказать, что если она дифференцируема в точке a этого интервала и $f'(a) \neq 0$, то обратная функция g дифференцируема в точке $f(a)$, и найти $g'(f(a))$.

104.9.* (Продолжение) Что можно сказать о $g'(f(a))$, если $f'(a) = 0$?

104.10. Найти производные функций (**а**) $x \mapsto \arcsin x$; (**б**) $x \mapsto \arccos x$; (**в**) $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

104.11.* Найти производную функции $x \mapsto \arcsin(\cos x)$.

104.12. *Второй производной* функции f называется производная её производной, то есть производная функции $f' : x \mapsto f'(x)$. Написать формулу для второй производной произведения $h(x) = f(x)g(x)$, то есть выразить $h''(a)$ через значения функций f и g и их производных в точке a.

104.13.* (Продолжение) Написать аналогичную формулу для $h^{(5)}(a)$ (пятой производной).

104.14.* Найти вторую производную функции $h(x) = f(g(x))$ (считая известными значения функций f и g и их производных).

104.15.* Найти вторую производную обратной функции, считая известными значения самой функции и двух её производных.

104.16.* Указать какую-либо функцию f, для которой (**а**) $f'(x) = (x+3)^2$; (**б**) $f'(x) = (5x+3)^2$; (**в**) $f'(x) = f(x)$; (**г**) $f'(x) = -f(x)$; (**д**) $f''(x) = -f(x)$.

104.17. Что получится, если n раз продифференцировать (дифференцировать = брать производную) многочлен степени n?

104.18. Доказать, что для многочлена P степени n справедлива *формула Тейлора*:

$$P(a+h) = P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

(Указание: $P(a+h)$ при фиксированном a есть многочлен от h.)

104.19. Объяснить смысл описания производной как «мгновенной скорости изменения функции», как «отношения бесконечно малого приращения функции к приращению аргумента» и как «тангенса угла наклона касательной» (которая в свою очередь описывается как «предельное положение секущей»).

104.20. Найти уравнение касательной к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 3$ в точке $(1, 1)$.

104.21.* (Продолжение) Две перпендикулярные касательные к этому эллипсу пересекаются в точке X. Доказать, что расстояние от X до начала координат не зависит от выбора касательных (и равно $3/\sqrt{2}$).

104.22.* (**а**) Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для касательных к параболе, проведённых из одной точки. (**б**) Квадрат касательной к окружности равен произведению отрезков секущих. Сформулировать аналогичное утверждение для параболы.

104.23.* Две параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ пересекаются в точках A и B и имеют общую касательную, касающуюся парабол в точках C и D. Доказать, что прямая AB делит отрезок CD пополам.

104.24.* Для площади круга радиуса r есть формула $S(r) = \pi r^2$; производная $S'(r) = 2\pi r$ даёт формулу для длины окружности. Для объёма шара радиуса r есть формула $V(r) = (4/3)\pi r^3$; производная $V'(r) = 4\pi r^2$ даёт формулу для площади сферы. Объяснить наблюдаемое явление.