105. Теоремы о производной

105.1. Пешеход шёл 8 минут с переменной скоростью и прошёл более 800 м. Можно ли утверждать, что найдется промежуток длиной в минуту, за который пешеход прошёл более 100 м?

105.2.* (Продолжение) Можно ли утверждать, что найдётся промежуток в три минуты, за который пешеход прошёл более 300 м?

105.3. (Теорема о конечном приращении) Функция f дифференцируема во всех точках интервала I, и её производная не превосходит (по модулю) некоторого числа c. Доказать, что для любых точек x и y этого интервала выполнено неравенство

$$|f(y) - f(x)| \leqslant c|y - x|$$

(«если мгновенная скорость не превосходит c, то и средняя скорость не превосходит c»).

105.4. Доказать, что если две функции определены на интервале и имеют одну и ту же производную ($f'(x) = g'(x)$ для любой точки x этого интервала), то они отличаются на константу: $f(x) = g(x) + C$ для некоторого числа C и для всех x.

105.5. Функция f определена на всей прямой, причём $|f(y) - f(x)| \leqslant (y - x)^2$ при всех x, y. Что можно сказать про эту функцию?

105.6.* Функция f определена и дифференцируема на всей прямой, при этом $f'(x) = f(x)$ при всех x. Доказать, что $f(x) = ce^x$ при некотором c и при всех x.

Точка a называется точкой *локального максимума* функции f, если найдётся некоторая окрестность точки x, в которой функция f определена и все её значения не превосходят $f(a)$. Если все они (кроме значения в точке a) строго меньше $f(a)$, то говорят о *строгом локальном максимуме*.

105.7. Доказать, что у любой функции не более чем счётное число точек строгого локального максимума.

105.8.* (Продолжение) Для точек локального максимума (не обязательно строгого) этого сказать нельзя: у постоянной функции всякая точка будет точкой локального максимума. Доказать, что множество *значений* любой функции во всех её точках локального максимума не более чем счётно.

105.9. (Принцип Ферма) Доказать, что если функция дифференцируема в точке локального максимума, то её производная в этой точке равна нулю.

105.10. (Теорема Ролля) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала (a, b), причём $f(a) = f(b)$. Доказать, что найдётся точка $c \in (a, b)$, для которой $f'(c) = 0$.

105.11. (Теорема Лагранжа) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала (a, b), причём $f(a) = f(b)$. Доказать, что найдётся точка $c \in (a, b)$, для которой $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. (Существует точка, в которой мгновенная скорость равна средней, а касательная параллельна секущей.)

105.12.* Верно ли аналог теоремы Лагранжа для движения по плоскости? Тот же вопрос для теоремы о конечном приращении.

105.13. Вывести теорему о конечном приращении из теоремы Лагранжа.

105.14. Функция f определена и дифференцируема на интервале I. Доказать, что f является неубывающей ($f(x) \leqslant f(y)$ при $x \leqslant y$) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in I$.

105.15. (Продолжение) Верно ли аналогичное утверждение про (строго) возрастающие функции и функции с всюду положительной производной?

105.16. Известно, что функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируемы внутри него, причём $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всех $x \in [0, 1]$ и $f(0) = g(0)$. Доказать, что $f(1) \leqslant g(1)$.

105.17.* Функция f определена и дифференцируема на всей прямой, при этом $|f'(x)| \leqslant |x|$ и $f(0) = 1$. Какие значения может принимать $f(10)$?

105.18.* Функция f определена и дифференцируема на всей прямой, при этом $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ и $f(0) = 1$. Какие значения может принимать $f(10)$?

105.19. (**а**) Функция f определена в окрестности нуля и дифференцируема в нуле, причём $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$. Доказать, что $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. (**б**) Функция f определена и дифференцируема в окрестности нуля, дважды дифференцируема в нуле, причём $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и $f''(x) = 0$. Доказать, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. (**в**) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для старших производных.

105.20. 20. Используя предыдущую задачу, доказать, что $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ при $x \to 0$.

105.21. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) Если функция f определена и дифференцируема $n - 1$ раз в окрестности точки a и имеет n-ю производную в a, то

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + (f''(a)/2!)h^2 + \ldots + (f^{(n)}(a)/n!)h^n + o(h^n)$$

при $h \to 0$.

105.22. (Достаточное условие максимума) Функция f дифференцируема на интервале I, её производная равна 0 в точке $a \in I$, положительна слева от a и отрицательна справа от a. Доказать, что в этом случае максимум функции на интервале I достигается в точке a.

105.23. Найти минимальное значение функции $x \mapsto x \ln x$ на интервале $(0, 1)$.

105.24.* Известно, что $a, b > 0$, $a^b = b^a$ и $a \neq b$. Доказать, что одно из чисел a и b меньше e, а другое — больше. Доказать, что для любого числа $a \in (1, e)$ найдётся единственное $b > e$, при котором $a^b = b^a$.

105.25. Функция f дифференцируема в окрестности точки a, дважды дифференцируема в a, причём $f'(a) = 0$ и $f''(a) > 0$. Доказать, что точка a является точкой строгого локального минимума.

105.26.* (Теорема Коши) Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $f(a) \neq f(b)$. Тогда найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

(отношение средних скоростей равно отношению мгновенных) или $f'(c) = g'(c) = 0$.

105.27.* (Правило Лопиталя раскрытия неопределённости $0/0$) Функции f и g определены и дифференцируемы в окрестности некоторой точки a, причём $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$ и существует предел $f'(x)/g'(x)$ при $x \to a$, равный некоторому числу c. Доказать, что предел $f(x)/g(x)$ при $x \to a$ также существует и равен c.

105.28. Функция f определена и дважды дифференцируема на интервале I, содержащем 0, причём $f(0) = f'(0) = 0$, а $|f''(x)| \leqslant M$ при всех $x \in I$. Доказать, что $|f(x)| \leqslant (M/2)x^2$.

105.29. (Продолжение) Сформулировать аналогичное утверждение для старших производных.

105.30. (Формула Тейлора) Функция f определена и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки a, причём её $(n+1)$-я производная (во всех точках этой окрестности) не превосходит по модулю числа M. Доказать, что погрешность приближённой формулы

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + (f''(a)/2!)h^2 + \ldots + (f^{(n)}(a)/n!)h^n$$

не превосходит $(M/(n+1)!)h^{n+1}$ (если точка $a+h$ лежит в упомянутой окрестности).

105.31. (Продолжение) Доказать, что $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$ и $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$ при всех x.

105.32. (Продолжние) Используя формулу Тейлора, доказать, что $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ при всех x.

105.33.* Доказать, что $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$, если $|x| < 1$. (При $x = 1$ это тоже верно, как мы видели; при остальных x ряд расходится.)

105.34.* (Бином Ньютона с произвольным показателем) Доказать, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

для любого (не обязательно целого) α, если $|x| < 1$.

105.35.* Функция f дифференцируема n раз на всей прямой и её n-я производная всюду равна нулю. Что можно сказать о функции f?

105.36.* Функция f дифференцируема на всей прямой; уравнение $f(x) = 0$ имеет k решений. Доказать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере $k-1$ решение.

105.37.* («Малочлены») Многочлен от одной переменной имеет не более 100 ненулевых коэффициентов (но может включать сколь угодно большие степени). Доказать, что он имеет не более 1000 корней.

105.38.* Доказать, что n-я производная функции $x \mapsto e^{-1/x}$ (рассматриваемой для положительных x) имеет предел 0 при $x \to 0$.