106. Контрольная работа (анализ)

106.1. Даны два ряда с неотрицательными членами $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Верно ли, что (а) если оба они расходятся, то и ряд $\sum \min(a_n, b_n)$ расходится; (б) если оба они сходятся, то и ряд $\sum \max(a_n, b_n)$ сходится.

106.2. Тот же вопрос для рядов с монотонно убывающими членами.

106.3. Доказать, что для любого многоугольника на плоскости существует прямая, делящая его на многоугольники равных площади и периметра.

106.4. В каких случаях будет непрерывна функция, определенная на множестве $M = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$?

106.5. Верно ли, что всякая равномерно непрерывная на интервале функция ограничена на нём? А на прямой?

Найти пределы функций:

106.6. $\cos 5x / \cos 7x$ при $x \to \pi/2$;

106.7. $(x+7)^{3/2} - (x+5)^{3/2}$ при $x \to +\infty$.

106.8. $x(\operatorname{ctg} x)$ при $x \to 0$.

106.9. Используя известные свойства показательной функции ($a^{x+y} = a^x a^y$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, непрерывность, монотонность), доказать, что $(a^x)^y = a^{xy}$ при всех $a > 0$ и при всех $x, y \in \mathbb{R}$.