107. Многочлены с одной переменной

Если многочлен содержит только одну переменную, его обычно записывают в порядке убывания степеней: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Числа $a_n, \ldots, a_1$ называют *коэффициентами* многочлена, при этом (если $a_n \neq 0$) число n называют *степенью* многочлена, a_n — *старшим коэффициентом*, a_0 — *свободным членом*.

107.1. (а) Многочлен $P(x)$ имеет степень 5, а многочлен $Q(x)$ имеет степень 7. Что можно сказать про степени многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? (б) Тот же вопрос, если степени обоих многочленов равны 7.

107.2. (а) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют старшие коэффициенты 5 и 7. Что можно сказать про старшие коэффициенты многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? (б) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют свободные члены 5 и 7. Что можно сказать про свободные члены многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

107.3. Каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ содержит по два (ненулевых) члена. Сколько ненулевых членов может быть в их произведении? Указать все варианты.

Многочлен с одной переменной x обозначают $P(x)$, $Q(x)$ и т.п. Если подставить вместо переменной число a, то получится число, которое обозначают $P(a)$, $Q(a)$ и т.п. Если $P(a) = 0$, то a называют *корнем* многочлена P.

107.4.* (а) Число $P(0)$ — свободный член многочлена P. Записать аналогичным образом сумму коэффициентов многочлена P. (б) Сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна 5, а сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна 7. Что можно сказать про сумму коэффициентов многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

107.5. Произвольный многочлен $P(x)$ умножили на $x - 1$. Могут ли у произведения все коэффициенты быть положительны?

107.6.* У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равна сумме коэффициентов при нечётных степенях. Многочлен $Q(x)$ также обладает таким свойством. Можно ли утверждать, что это свойство выполнено для многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? А если про коэффициенты многочлена Q ничего не известно?

107.7.* (а) Найти многочлен второй степени, имеющий корни 1 и 2. (б) Найти многочлен третьей степени, имеющий корни 1, 2 и 3.

107.8. Числа a и b таковы, что многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ имеет корень 2. Найти один из корней многочлена $x^3 + bx^2 + ax + 1$.

107.9. Доказать, что корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ и $c \neq 0$ можно найти по формуле

$$x_{12} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Применима ли эта формула, если одно из чисел a и c равно нулю?

107.10.* (а) Найти многочлен $P(x)$, для которого $P(n+1) - P(n) = n$ при всех n. Как с его помощью вычислить сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$? (б) Найти многочлен $P(x)$, для которого $P(x + 1) - P(x) = x^2$. (в) Вычислить сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

107.11. Обозначим через $P(Q(x))$ многочлен, который получится, если в $P(x)$ вместо x подставить $Q(x)$. (Например, если $P(x) = x^2$, а $Q(x) = x + 1$, то $P(Q(x)) = (x + 1)^2 =$

$x^2 + 2x + 1$, а $Q(P(x)) = x^2 + 1$. Каковы степени многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$, если степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны m и n?

107.12. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причём каждый из них имеет хотя бы один нечётный коэффициент. Доказать, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечётный коэффициент.

107.13.* Найти коэффициенты при x^2, x и 1 (свободный член) многочлена

$$(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2$$

(10 скобок).

107.14. Доказать, что в произведении $(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{10})$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется нечётных степеней x.

107.15. Все коэффициенты многочлена — целые числа в диапазоне от -9 до 9. Доказать, что он не может иметь корня, большего 10.

107.16.* Многочлен $P(x)$ принимает только неотрицательные значения. Доказать, что его степень чётна.

107.17.* Для произвольного многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность $P(0), P(1), P(2)\ldots$ его значений в целых точках. $P(x)$. Составим последовательность разностей, написав под каждыми двумя числами их разность (получится последовательность $P(1)-P(0), P(2)-P(1), \ldots$). Аналогичным образом составим последовательность вторых разностей и т. п. Доказать, что рано или поздно получится последовательность из одних нулей.

107.18.* (**а**) Доказать тождество $P(x) - 2P(x+1) + P(x+2) = 0$. для любого многочлена $P(x)$ первой степени. (**б**) Доказать тождество $P(x)-3P(x+1)+3P(x+2)-P(x+3) = 0$. для любого многочлена $P(x)$ степени не выше 2. (**в**) Сформулировать и доказать аналогичное тождество для многочленов бóльших степеней.