108. Рациональные функции

108.1. Упростить выражение:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

108.2. Найти числа a и b, при которых (для всех x)

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

108.3. Найти числа a, b и c, при которых

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

108.4.* Найти числа a, b, c, d, при которых

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x+b}+\frac{c}{x+d}$$

108.5.* Существуют ли числа a, b, c, d, при которых

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{a}{x+b}+\frac{c}{x+d}$$

для всех x?

108.6.* Существуют ли числа a, b, c, d, e, f, при которых

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+b}+\frac{c}{x+d}+\frac{e}{x+f}$$

для всех x?

108.7. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

108.8. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$$

108.9. Из числа x получают новое число $f(x)$ по формуле $f(x)=x/(x-1)$. Доказать, что двукратное применение этого правила возвращает к исходному числу: $f(f(x))=x$.

108.10. Проверить, что при любом значении t точка с координатами $(2t/(t^2+1),(t^2-1)/(t^2+1))$ лежит на окружности единичного радиуса с центром в нуле.

108.11.* Как с помощью этих формул искать пифагоровы треугольники (прямоугольные треугольники с целыми сторонами) и рациональные точки на окружности?

108.12.* Какие тригонометрические формулы соответствуют утверждению задачи 10? Каков геометрический смысл параметра t?

108.13. Нарисовать график функции $y = 1/x$. (Он называется *гиперболой*.)

108.14. Нарисовать график функции $y = 1/x^2$.

108.15. Нарисовать график функции $y = 1/(x(x-1))$.

108.16. Нарисовать график функции $y = x/(x-1)$.

108.17. Нарисовать график функции $y = 1/(x^2+1)$.

108.18. Нарисовать график функции $y = 1/(x^2-1)$.

108.19. Нарисовать график функции $y = (x^2+1)/x$.

108.20. Графики $y = 1/x$ и $y^2 - x^2 = 1$ получаются друг из друга композицией поворота и гомотетии. Найти угол поворота и коэффициент гомотетии.

Функции вида $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ (здесь a, b, c, d — некоторые числа) называют *дробно-линейными*.

108.21. Доказать, что графики любых двух дробно-линейных функций подобны. В каком случае коэффициент подобия равен 1?

108.22. Найти касательную к гиперболе $y = 1/x$, проходящую через точку $\langle 2, 1/2\rangle$ (касательная — прямая, имеющая с гиперболой только одну общую точку).

108.23.* Имеет ли график $y = x + 1/x$ оси симметрии?

108.24.* Описать все дробно-линейные функции, для которых $f(f(x)) = x$.

108.25.* Существуют ли дробно-линейные функции f, для которых $f(f(f(x))) = x$, за исключением функции $f(x) = x$?

108.26. (**а**) Двойное отношение четырёх точек p, q, r, s на числовой оси определяется как

$$\frac{r-p}{r-q} : \frac{s-p}{s-q}$$

Как изменится двойное отношение, если переставить какие-то две точки? (**б**) Доказать, что дробно-линейная функция сохраняет двойное отношение: если $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, то двойное отношение точек p, q, r, s равно двойному отношению точек $f(p), f(q), f(r), f(s)$ (**в**) На плоскости выберем две прямые, на каждой произвольно фиксировано начало отсчёта и единица измерения. Выберем точку O, не лежащую на этих прямых, и для каждой точки X на первой прямой рассмотрим её проекцию Y на вторую прямую (точки O, X, Y лежат на одной прямой). Доказать, что координата точки Y является дробно-линейной функцией координаты точки X. (**г**) Из двух предыдущих утверждений вытекает, что двойное отношение четырёх точек на прямой сохраняется при центральной проекции. Как доказать это геометрически?