109. Деление с остатком

Рассмотрим *рациональные дроби с одной переменной*, то есть отношения многочленов $P(x)/Q(x)$. Как и обычные дроби, они делятся на «правильные» и «неправильные». Правильными считаются те, у которых степень числителя меньше степени знаменателя, неправильными — остальные.

Неправильную дробь можно преобразовать в сумму многочлена и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

109.1. Выполнить такое преобразование для дроби $x^2/(x-2)$.
109.2. ... для дроби $x^3/(x-1)$.
109.3. ... для дроби $x^4/(x-1)$.
109.4. ... для дроби $x^4/(x+1)$.
109.5. ... для дроби $x^4/(x+2)$.
109.6. ... для дроби $x^3/(x^2-1)$.
109.7. ... для дроби $x^3/(x^2+x)$.
109.8. ... для дроби $x^3/(2x+3)$.
109.9. ... для дроби $x^{10}/(x+2)$.
109.10. ... для дроби $x^{10}/(x^2+2)$.
109.11. Записать решения задач 1–10 в виде «деления уголком», следуя такому образцу:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^2-2x} & x+2 \\ \quad 2x & \\ \quad \underline{2x-4} & \\ \quad\quad 4 & \end{array}$$

Если дробь $P(x)/D(x)$ представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби,

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

то $Q(x)$ называют *частным* от деления $P(x)$ на $Q(x)$, а $R(x)$ — остатком. При этом выполняются такие свойства: во-первых, $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$; во-вторых, степень $R(x)$ меньше степени $D(x)$ или $R(x) = 0$.

109.12. Степень делимого равна 100, степень делителя равна 43. Какими могут быть степени частного и остатка?

109.13. Как изменятся частное и остаток, если делимое и делитель умножить на $(x-1)$?

109.14*. Доказать, что деление многочленов с остатком всегда выполнимо, и притом единственным образом.

109.15. Какой остаток получится, если делить $x^{1000}-1$ на $x^{17}-1$?

109.16. Многочлен $P(x)$ даёт остаток $x+7$ при делении на x^2-1. Какой остаток даст он при делении на $x+1$?

109.17. При каких n и k многочлен $x^n - 1$ делится на многочлен $x^k - 1$ без остатка?

109.18. Найти остаток от деления $(x^2 + x + 1)^{100}$ на $x^2 + 1$.

109.19. Найти остаток от деления x^{57} на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

109.20. Придумать многочлен, который при делении на $x^2 + 1$ даёт остаток $x + 1$, а при делении на $x^2 + 2$ даёт остаток $x - 1$.

109.21. (а) Все коэффициенты делимого и делителя — целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты частного и остатка — целые? (б) Все коэффициенты делимого и делителя — рациональные. Можно ли утверждать, что все коэффициенты частного и остатка — рациональные?

109.22. При делении многочлена $P(x)$ на $x^2 - 1$ был получен остаток $x + 1$, а при делении многочлена $Q(x)$ — остаток $x - 1$. Какой остаток будет при делении многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$ при делении на $x^2 - 1$?

109.23.* При делении многочлена $P(x)$ на $x^2 + 1$ получился остаток $a + bx$ (здесь a и b — некоторые числа); при делении $Q(x)$ получился остаток $c + dx$. Какой остаток будет при делении на $x^2 + 1$ многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? Что напоминают вам эти формулы?

109.24.* Делится ли многочлен $x^{100} + 3x^{70} - 5$ на многочлен $x^5 + x^3 - 2$ без остатка?