110. Корни и множители

110.1. Доказать, что остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ (где a — некоторое число), равен $P(a)$.

110.2.* Как вычислить значение многочлена степени n с заданными коэффициентами в заданной точке x, сделав не более n операций умножения?

110.3. Доказать, что многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x - a$ (здесь a — некоторое число) в том и только том случае, когда a — корень многочлена P, то есть когда $P(a) = 0$.

110.4. Известно, что числа a и b являются корнями многочлена $P(x)$, причём $a \neq b$. Доказать, что $P(x)$ делится на $(x - a)(x - b)$.

110.5. Доказать, что многочлен степени n не может иметь более n различных корней.

110.6. Известно, что многочлен $P(x)$ даёт при делении на $(x-1)$ остаток 3, а при делении на $(x + 1)$ — остаток 5. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x^2 - 1)$.

110.7. Найти числа a и b, если известно, что многочлен $x^{100} + x^{99} + ax + b$ делится на $x^2 - 1$.

110.8. (а) График многочлена $P(x)$ симметричен относительно оси ординат. Доказать, что многочлен $P(x)$ не содержит нечётных степеней (коэффициенты при них равны 0). (б) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для многочленов, не содержащих чётных степеней.

110.9. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь графики $y = P(x)$ и $y = Q(x)$, если степени многочленов P и Q равны соответственно p и q?

110.10.* Какое максимальное число точек пересечения могут иметь графики $y = P(x)$ и $x = Q(y)$, если степени многочленов P и Q равны соответственно p и q?

110.11. Найти многочлен степени 3, если известно, что он имеет корни 1 и 2, а старший коэффициент и свободный член равны 1.

110.12.* Доказать, что не существует (не равного тождественно нулю) многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого $P(t, \sin t) = 0$ для всех t.

110.13. Доказать, что через любые три точки с различными абсциссами проходит единственный график квадратного трёхчлена ($y = ax^2 + bx + c$; старший коэффициент может быть равен 0).

110.14.* Многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $1+i$. Доказать, что он делится на многочлен $x^2 - 2x + 2$.

110.15. Доказать, что многочлены $x^5 + 5x + 2$ и $x^5 + 3x - 3$ не имеют общих корней.

110.16.* Многочлены $x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x - 5$ и $x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 10$ имеют общий корень. Найти его.

Говорят, что число a является для многочлена $P(x)$ *корнем кратности не менее* k, если $P(x)$ делится без остатка на $(x - a)^k$. Максимальное такое k называют *кратностью* корня.

110.17. Доказать, что если для многочлена $P(x)$ число α является корнем кратности не менее 2, а число β является корнем, то $P(x)$ делится без остатка на $(x - \alpha)^2(x - \beta)$. [Решение этой и следующей задач упрощается, если пользоваться однозначностью разложения на множители для многочленов, но можно без этого обойтись.]

110.18.* Доказать, что если для многочлена $P(x)$ число α является корнем кратности не менее k, а число β является корнем кратности не менее l, то $P(x)$ делится на $(x-\alpha)^k(x-\beta)^l$.

110.19.* Доказать, что число корней многочлена, если каждый считать столько раз, какова его кратность, не превосходит степени многочлена.

110.20. Многочлен $P(x) = x^2+px+q$ имеет два различных корня α и β. (**а**) Выразить p и q через эти корни (*формулы Виета* для квадратного трёхчлена). (**б**) Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа α^2 и β^2.

110.21. Многочлен $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ имеет три различных корня α, β и γ. (**а**) Выразить p, q и r через эти корни (*формулы Виета*). (**б**) Выразить $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ через p, q и r. (**в**) Составить кубическое уравнение, корнями которого были бы числа α^2, β^2 и γ^2.

110.22. Прямая пересекает график $y = x^3$ в трёх точках. Две из них имеют абсциссы a и b. Найти абсциссу третьей точки. (Как сделать это с помощью формул Виета?)

110.23.* Кубическое уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ с целыми коэффициентами имеет три корня α, β и γ. Доказать, что число $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ — целое при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$.

110.24.* Как выглядят формулы Виета для многочленов высших степеней?

110.25.* Как выглядят формулы Виета для многочленов с кратными корнями?

110.26.* Найти сумму и произведение всех комплексных корней уравнения $z^n = 1$ с помощью формул Виета.

110.27. Доказать, что произведение расстояний от точки до вершин правильного n-угольника не изменится, если повернуть n-угольник вокруг центра.

110.28.* Вычислить произведение

$$\cos 0 \cdot \cos(\pi/n) \cdot \cos(2\pi/n) \cdot \ldots \cdot \cos((n-1)\pi/n) \cdot \cos((n\pi)/n)$$

110.29. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $(x-a)$, $(x-b)$ и $(x-c)$ равны соответственно a^2, b^2 и c^2. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

110.30. Доказать, что любой многочлен степени не выше 3 однозначно представляется в виде $a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$

110.31. Доказать, что любой многочлен степени не выше 3 однозначно представляется в виде $a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3)$.

110.32. (**а**) Указать многочлен $P(x)$, для которого $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ и $P(4) = 1$. Какова наименьшая возможная степень такого многочлена? (**б**) Доказать, что для любых чисел a, b, c, d можно найти многочлен степени не выше 3, для которого $P(0) = a$, $P(1) = b$, $P(2) = c$ и $P(3) = d$.

110.33. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные числа. Доказать, что для любых чисел $y_1, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше n, для которого $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $\ldots$, $P(x_n) = y_n$.