111. Многочлены и целые числа

111.1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень a. Доказать, что его свободный член делится на a.

111.2.* Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет два целых корня a и b. Доказать, что его свободный член делится на ab.

111.3. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(7) = 5$, а $P(11) = 7$?

111.4. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1, не имеет рациональных, но не целых корней.

111.5. (а) Доказать, что квадратный корень из целого числа либо целый, либо иррациональный. (б) Тот же вопрос для корня произвольной целой положительной степени.

111.6. Решить уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$. (Указание: оно имеет целый корень.)

111.7. Несократимая дробь $\alpha = p/q$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Доказать, что p является делителем его свободного члена, а q — делителем старшего коэффициента.

111.8.* (Продолжение) Доказать, что многочлен $P(x)$ в этом случае можно представить в виде $P(x) = (qx - p)R(x)$, где $R(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

111.9. (а) Указать многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (б) Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррационально.

111.10.* Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ иррационально.

111.11. Доказать, что если число $2 + \sqrt{3}$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, то число $2 - \sqrt{3}$ также является его корнем, и многочлен $P(x)$ делится без остатка на многочлен $x^2 - 4x + 1$.

111.12.* Доказать, что если число $\sqrt[3]{2}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то этот многочлен делится без остатка на многочлен $x^3 - 2$.

111.13. (а) Известно, что многочлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых x. Можно ли утверждать, что он имеет целые коэффициенты? (б) При каких a, b и c квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x?

111.14.* (а) Дано целое $k \geqslant 0$. Указать многочлен $P(x)$ наименьшей степени, для которого $P(1) = P(2) = \ldots = P(k-1) = 0$, а $P(k) = 1$. (б) Как связан этот многочлен (будем обозначать его $P_k(x)$) с биномиальными коэффициентами? (в) Доказать, что многочлен $P_k(x)$ принимает целые значения во всех целых точках. (г) Пусть $Q(x)$ — произвольный многочлен, который принимает целые значения во всех целых точках. Доказать, что его можно представить в виде $c_0 + c_1P_1(x) + \ldots + c_kP_k(x)$ при некотором k и некоторых целых $c_1, \ldots, c_k$.